

2024 年度  
統計数学特別講義第四

大坂公立大学 大学院理学研究科 数学専攻

今野 良彦

2024 年 4 月 17 日





# 目次

はじめに	v
<b>第 1 章 線型モデル</b>	<b>1</b>
1.1 線型単回帰モデルと最小 2 乗推定量	1
1.2 線型重回帰モデル	5
1.3 変数選択の規準	9
1.3.1 自由度調整済み決定係数	9
1.3.2 Mallows $C_p$	10
1.3.3 交差検証法	11
1.3.4 AIC	13
1.3.5 BIC	16
1.4 補遺：Laplace 近似について	19
1.5 章末注釈と参考文献	21
1.6 演習問題	21
<b>第 2 章 劣 Gauss 型確率変数列と最大不等式</b>	<b>23</b>
2.1 正規分布の裾確率と積率母関数	23
2.2 劣 Gauss 型確率変数列とその裾確率評価	25
2.2.1 劣 Gauss 確率変数列の和	30
2.3 劣指数型確率変数	34
2.3.1 Bernstein の不等式	37
2.4 最大値の確率不等式	38
2.4.1 有限集合上の最大値	38
2.4.2 凸多面体上の最大値	39
2.4.3 $\ell_2$ 球上の最大値	40
2.5 独立なランダム行列の和に対する最大値の確率不等式	43
2.5.1 Laplace 変換法	45
2.6 補遺	50
2.7 章末注釈と参考文献	51
2.8 演習問題	51
<b>第 3 章 高次元線型回帰モデル</b>	<b>53</b>
3.1 ランダムと固定デザインの線型回帰モデル	53

3.1.1	ランダムデザインの場合	53
3.1.2	固定デザインの場合	54
3.2	最小 2 乗推定量の再訪問	55
3.2.1	制約なしの最小 2 乗推定量	56
3.2.2	制約付きの最小 2 乗推定量	59
3.3	Gauss 確率変数列モデル	65
3.3.1	劣 Gauss 型確率変数列モデル	65
3.3.2	スパース適応的しきい値推定量	66
3.4	高次元線型回帰モデル	72
3.4.1	BIC 推定量と LASSO 推定量	72
3.4.2	BIC 推定量の精度評価	73
3.4.3	LASSO 推定量の精度評価	77
3.4.4	SLOPE 推定量	86
3.5	補遺	92
3.5.1	(3.36) の計算	92
3.6	章末注釈と参考文献	95
3.7	演習問題	95
<b>第 4 章</b>	<b>誤特定された線型モデル</b>	<b>97</b>
4.1	オラクル不等式	97
4.1.1	最小 2 乗推定量のオラクル不等式	99
4.1.2	BIC 推定量のスパース・オラクル不等式	101
4.1.3	LASSO に対するスパースオラクル不等式	105
4.1.4	Maurey の論法	108
4.2	ノンパラメトリック回帰	115
4.2.1	フーリエ分解	115
4.2.2	Sobolev 族と楕円体	116
4.2.3	積分 2 乗誤差	120
4.3	章末注釈と参考文献	124
4.4	演習問題	124
<b>第 5 章</b>	<b>ミニマックス下限</b>	<b>125</b>
5.1	ミニマックスの意味での最適性	125
5.2	有限個の仮説検定への簡略化	127
5.3	2 つの仮説に基づく下限	129
5.3.1	Neyman-Pearson の補題にと全変動距離	129
5.3.2	Kullback-Leibler divergence	131
5.4	たくさんの仮説に対する下限	136
5.5	Gauss 列モデルへの応用	142
5.5.1	推定法の下限	142

5.5.2	スパース推定に対する下限 . . . . .	143
5.6	$\chi^2$ - divergence による下限 . . . . .	147
5.7	Moment matching による $\ell_1$ ノルムの推定限界 . . . . .	151
5.7.1	制約されたリスク不等式 . . . . .	151
5.7.2	多項式近似による不利な事前分布 . . . . .	152
5.7.3	ミニマックス限界 . . . . .	152
5.8	章末注釈と参考文献 . . . . .	153
5.9	演習問題 . . . . .	153
<b>第 6 章</b>	<b>行列推定</b>	<b>155</b>
6.1	行列についての基本的事項 . . . . .	155
6.1.1	特異値分解 . . . . .	155
6.1.2	ノルムと内積 . . . . .	156
6.1.3	スペクトルノルム . . . . .	157
6.1.4	有用な行列不等式 . . . . .	157
6.2	多変量回帰モデル . . . . .	158
6.2.1	モデル . . . . .	159
6.2.2	劣 Gauss 行列モデル . . . . .	159
6.3	共分散行列の推定 . . . . .	168
6.4	主成分分析 . . . . .	173
6.4.1	スパイク共分散モデル . . . . .	173
6.4.2	スパース PCA . . . . .	177
6.4.3	ミニマックス下限 . . . . .	180
6.5	グラフィカルモデル . . . . .	182
6.5.1	Gaussian グラフィカルモデル . . . . .	182
6.5.2	下限 . . . . .	189
6.6	章末注釈と参考文献 . . . . .	190
6.7	演習問題 . . . . .	190
<b>第 A 章</b>	<b>補遺: 線形代数の復習</b>	<b>191</b>
A.1	特異値分解 . . . . .	191
A.2	Moore-Penrose の一般化逆行列 . . . . .	198
	<b>参考文献</b>	<b>201</b>



# はじめに

この講義録は, 中央大学大学院理工学研究科の統計数学特別講義第四の講義録である. 高次元線型回帰モデルの推測理論を非漸近理論の立場から論じたものである.

2024 年 01 月 14 日更新

