# 条件付き確率とベイズの定理

今野　良彦*

## 1　条件付き確率

２つのことが独立に起きるならば, その確率はおのおのの確率の積になる．たとえば, 確率 $p$ で表が出るコインを 2 回投げたとき, 両方とも表になる確率は $p \times p$ だが, ２つのことが独立でない場合もある．

たとえば, 学校のクラスに 36 人の生徒がいて, そのうちの $\frac{1}{3}$ が理科が得意, また $\frac{1}{2}$ が数学が得意だったとしよう．生徒を 1 人ランダムに選んだときに, この生徒が理科も数学も得意な確率はいくつだろうか．２つが独立だったら, 確率は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ということになる．でも, 理科の勉強では数学をよく使うから, 理科が得意な生徒は数学も得意なことが多い．だから, この２つは「独立ではない」．

クラスの 36 人を, 理科と数学が得意か不得意かで分類したら, こうなっていたとしよう．

| | 数学が得意 | 数学が不得意 |
|---|---|---|
| 理科が得意 | 10 | 2 |
| 理科が不得意 | 8 | 16 |

この表を使って確率を計算してみよう．36 人のクラスの中で, 理科も数学も得意な生徒は 10 人いるから, その確率は $\frac{10}{36} \fallingdotseq 0.28$. これは, さっき計算した $\frac{1}{6} \fallingdotseq 0.17$ よりもかなり大きい．

理科が得意なときに, 数学も得意な確率を

$$P(\text{数学} \mid \text{理科})$$

と書くことにしよう．表を使って計算すると, 理科が得意な生徒は全部で $10 + 2 = 12$ 人．そのうち 10 人が数学も得意だから,

$$P(\text{数学} \mid \text{理科}) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

ということになる．一方, 理科が不得意なときに, 数学が得意な確率は $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$. つまり, 理科が得意か不得意かで, 数学が得意である確率が変わる．２つは独立でないことがわかる．この $P(\text{数学} \mid \text{理科})$ のことを, 条件付き確率といい, 「理科が得意」という条件の下での確率だからである．

では, 数学が得意なときに, 理科が得意な確率はどうだろう．表を使って計算してみると,

$$P(\text{理科} \mid \text{数学}) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}.$$

これは $P(\text{数学} \mid \text{理科}) = \frac{5}{6}$ とは違う．この２つの確率は, 似ているように思えるかもしれないが, 別々のものである．

* 日本女子大学理学部数物科学科
email: konno@fc.jwu.ac.jp
http://mcm-www.jwu.ac.jp/~konno/index.html
talk.html

## 2 ベイズの定理

でもこの 2 つは, 全く無関係というわけでもない. この 2 つには, こんな関係がある.

$$P(\text{数学})P(\text{理科}\,|\,\text{数学}) = P(\text{理科})P(\text{数学}\,|\,\text{理科}).$$

ここで, $P(\text{数学})$ とは数学が得意な確率で, $\dfrac{1}{2}$ で, $P(\text{理科})$ は理科が得意な確率で, $\dfrac{1}{3}$ である. この式が正しいことは, 数字をあてはめてみれば,

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{6}$$

と確かめられる.

これはたまたま一致したわけではない. それを理解するために, こう書いてみよう.

$$\begin{aligned}
P(\text{数学}) &= \frac{\text{数学が得意な人数}}{\text{クラス全員の人数}},\\
P(\text{理科}\,|\,\text{数学}) &= \frac{\text{数学も理科も得意な人数}}{\text{数学が得意な人数}},\\
P(\text{理科}) &= \frac{\text{理科が得意な人数}}{\text{クラス全員の人数}},\\
P(\text{数学}\,|\,\text{理科}) &= \frac{\text{数学も理科も得意な人数}}{\text{理科が得意な人数}}.
\end{aligned}$$

これを使って, $P(\text{数学})P(\text{理科}\,|\,\text{数学})$ と $P(\text{理科})P(\text{数学}\,|\,\text{理科})$ を計算すると, どちらも

$$\frac{\text{数学も理科も得意な人数}}{\text{クラス全員の人数}}$$

になることがわかる. どちらも, 「数学も理科も得意な確率」を計算しているから, 一致したのだ.

この式,

$$P(\text{数学})P(\text{理科}\,|\,\text{数学}) = P(\text{理科})P(\text{数学}\,|\,\text{理科}).$$

は, 「ベイズの定理」として知られている. トーマス・ベイズは 18 世紀の英国の牧師だった. 神が存在する確率を計算しようとして, この式を見つけたらしい. しかし, この式は生前は発表されることなく, 死後半世紀ぐらいたって, フランスのピエール＝シモン・ラプラスという数学が書いた確率の本[2]で紹介されて有名になった.

## 3 乳がん検診は受ける意味がないか

確率を使うときには, 条件付き確率の計算がカギになることが多い. そして, ベイズの定理を使うと, その計算がすっきりわかる. 乳がん検診の是非を巡る議論を例にとって, これを説明しよう.

[2]「天体力学概論」は、1799 年から 1825 年にかけて出版された全 5 巻の大著で、剛体や流体の運動を論じたり、地球の形や潮汐の理論までも含んでいる.

アメリカがん協会は, 乳がんの早期発見のために, 女性は 40 歳から毎年マンモグラフィー[3]検診を受けることを勧めている．ところが, 2009 年に米国政府の予防医学作業部会が, 「40 代の女性には, 定期的な検診を行うことを推奨しない」という勧告を発表して, 話題になった.

もし乳がんにかかっていたら, マンモグラフィーで陽性になる確率は 90 パーセントだという．これを式で書くと,

$$P(\text{陽性} \,|\, \text{乳がんあり}) = 0.9$$

となる．確率 90 パーセントなら, 検診したほうがよいと思うかもしれない．では, 予防医学作業部会はなぜ検診をすすめなかっただろうか.

マンモグラフィーを受診して, 陽性だったとしよう．そのときに知りたいのは, 陽性だった自分が本当にがんにかかっている確率だ．ところが, 確率 90 パーセントといっているのは, この逆で, がんにかかっていたときに陽性の診断が出る確率だ．この 2 つの確率は違うものだけれど, 関係がある．ベイズの定理をこの場合にあてはめると,

$$P(\text{陽性})P(\text{乳がんあり} \,|\, \text{陽性}) = P(\text{乳がんあり})P(\text{陽性} \,|\, \text{乳がんあり})$$

となる．この公式を使って, $P(\text{乳がんあり} \,|\, \text{陽性})$ を計算してみよう.

さて, 最近の統計によると, 米国の 40 代の女性が乳がんにかかる確率は 0.8 パーセントだという．つまり

$$\begin{aligned} P(\text{乳がんあり}) &= 0.008, \\ P(\text{乳がんなし}) &= 1 - 0.008 = 0.992 \end{aligned}$$

である．また,

$$\begin{aligned} P(\text{陽性} \,|\, \text{乳がんあり}) &= 0.9, \\ P(\text{陽性} \,|\, \text{乳がんなし}) &= 0.07 \end{aligned}$$

であることが知られている.

では、$P(\text{陽性})$ を計算してみよう。ここで使うのは、

$$P(\text{陽性}) = P(\text{乳がんあり})P(\text{陽性} \,|\, \text{乳がんあり}) + P(\text{乳がんなし})P(\text{陽性} \,|\, \text{乳がんなし})$$

という式だ.

$$P(\text{乳がんあり})P(\text{陽性} \,|\, \text{乳がんあり})$$

は, 乳がんがあって陽性になる確率、

$$P(\text{乳がんなし})P(\text{陽性} \,|\, \text{乳がんなし})$$

は, 乳がんでなくて陽性になる確率だ．乳がんは「ある」か「ない」かのどちらしかないから, この両方の確率を足すと, $P(\text{陽性})$ になるというのが上の式だ．これを使えば,

$$P(\text{陽性}) = 0.008 \times 0.9 + 0.992 \times 0.07 \fallingdotseq 0.08(0.07664)$$

となる．つまり, 40 代の女性がマンモグラフィーを受診して, その結果が陽性になる確率は 8 パーセントというわけだ.

[3]乳がんの早期発見のために人の乳房を X 線撮影する手法

これらをベイズの定理の公式に代入すると,

$$\begin{aligned} P(\text{乳がんあり}\mid\text{陽性}) &= \frac{P(\text{乳がんあり})P(\text{陽性}\mid\text{乳がんあり})}{P(\text{陽性})} \\ &= \frac{0.008\times 0.9}{0.08} \fallingdotseq 0.09(0.09394572). \end{aligned}$$

つまり,「陽性の結果が出たときに, 乳がんにかかっている確率」はたったの 9 パーセントである. 偽陽性の確率が 91 パーセントもあることになる.

予防医学作業部会は, 検診を受けた女性の 8 パーセントが陽性になるのに, その 9 割以上のひとは実際には乳がんにかかっていないのだから, 受診をすることを勧めないといっているのだ. 陽性とならば体細胞検査などのより負担の大きな検査をうけることになるし, 心理的なショックも大きい. 偽陽性だとわっかた 3 カ月後にも, 2 人に 1 人は健康に不安を感じているという調査もある. 検査をうけないとがんを見逃すリスクがあるが, 検査を受けるのにもリスクがある.

だけど, 本人にとっては, 1 回しかない命だから, がんの早期発見のためなら, 偽陽性のリスクがあっても検診を受けたいと思うかもしれない. 実際, 40 代の女性のマンモグラフィー検診を勧めているアメリカがん協会は, 予防医学作業部会の勧告に反対する声明を発表している.

40 代の女性が乳がん検診で陽性が出た場合, 実際に乳がんにかかっている確率は 9 パーセントであった. では, 陽性になった時に, もう一度検査を受けたらだおうなるのだろう. 計算を簡単にするために, 検診の信頼度は同じだとする. 1回目の検診で陽性が出た場合, 乳がんの確率は 9 パーセントだった. だから, このグループについては $P(\text{乳がんあり}) = 0.09$ を使う. では, このグループの女性が2回目の検診で陽性になる確率 $P(\text{陽性})$ はどうかというと

$$\begin{aligned} P(\text{陽性}) &= P(\text{乳がんあり})P(\text{陽性}\mid\text{乳がんあり}) + P(\text{乳がんなし})P(\text{陽性}\mid\text{乳がんなし}) \\ &= 0.09\times 0.9 + 0.91\times 0.07 \fallingdotseq 0.14(0.1447) \end{aligned}$$

となる.

この値について, ベイズの定理の公式を使うと

$$\begin{aligned} P(\text{乳がんあり}\mid\text{陽性}) &= \frac{P(\text{乳がんあり})P(\text{陽性}\mid\text{乳がんあり})}{P(\text{陽性})} \\ &= \frac{0.09\times 0.9}{0.14} \fallingdotseq 0.58(0.5785714). \end{aligned}$$

となる. 一度陽性が出ただけでは, 乳がんである確率が 9 パーセントしかなくとも, 再度検査をしてもう一度陽性になったならば, 確率は 58 パーセントとなる.

検診をする前の乳がんの確率は 0.8 パーセント. 検診をして陽性だったときの確率は 9 パーセント. 2度目の検診をしてまた陽性だったら, 確率は 58 パーセント. ベイズの定理を使うと, 新しい情報が手に入るごとに, 確率がどのように修正されていくかが分る.「経験に学ぶ」ということを, 数学的に表現することができるんだ.

## 4 「経験に学ぶ」を数学的に学ぶ

「経験に学ぶ」ということを, 癖のあるサイコロを例にとって説明しよう. 学校で確率の勉強をするときには,「サイコロを振ったときには 1 の目が出たからといって, 次回サイコロを振った

ときにはどの目が出るかの確率は変わらない」ということが強調される．サイコロを 2 回ふるときに, おのおのの確率は独立だからである．たとえば, 癖のないサイコロなら, 最初に 1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$. 次回に 1 の目が出る確率も $\frac{1}{6}$.

ところが, 癖のないサイコロと癖のあるサイコロがまざっていて, どちらのサイコロを振っているのかわからないときには, 1 回目に 1 の目が出たかどうかで, 2 回目の確率が左右される.

癖のないサイコロが 1 の目を出す確率は $\frac{1}{6}$ だが, 癖のあるサイコロが 1 の目を出す確率は $\frac{1}{2}$ としよう．これを数式で書くとこうなる.

$$
\begin{aligned}
P(\text{ 1 の目} \mid \text{癖なし}) &= \frac{1}{6}, \\
P(\text{ 1 の目} \mid \text{癖あり}) &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

このように癖のないサイコロと癖のあるサイコロが同じ数だけあって, 手に取ったサイコロの癖のあるなしの確率は 5 分 5 分だったする.

$$P(\text{癖なし}) = P(\text{癖あり}) = \frac{1}{2}.$$

これらのデータを使うと, 1 の目の出る確率は

$$
\begin{aligned}
P(1 \text{ の目}) &= P(1 \text{ の目 かつ 癖なし}) + P((1 \text{ の目 かつ 癖あり}) \\
&= P(\text{癖なし}) \times \frac{P(1 \text{ の目 かつ 癖なし})}{P(\text{癖なし})} + P(\text{癖あり}) \times \frac{P(1 \text{ の目 かつ 癖あり})}{P(\text{癖あり})} \\
&= P(\text{癖なし})P(\text{ 1 の目} \mid \text{癖なし}) + P(\text{癖あり})P(\text{ 1 の目} \mid \text{癖あり}) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

と計算できる．$P(\text{癖なし})P(\text{ 1 の目} \mid \text{癖なし})$ は, 手に取ったサイコロに癖がなくて, しかも 1 の目が出る確率. $P(\text{癖あり})P(\text{ 1 の目} \mid \text{癖あり})$ は, 手に取ったサイコロに癖があって, しかも 1 の目が出る確率である．サイコロには癖が「ある」か「ない」かのどちらしかないから, この両方の確率は足すと $P(1 \text{ の目 })$ になるわかである.

では, 最初に 1 の目が出たとして, そのときに同じサイコロをもう一度振って, 2 回目も 1 の目が出る確率はどうだろうか．まず, 最初に 1 の目が出たかどうかで, サイコロに癖があるかないかの確率が変わることに注意しよう．ベイズの定理の公式を使うと,

$$P(1 \text{ の目})P(\text{癖なし} \mid 1 \text{ の目}) = P(\text{癖なし})P(1 \text{ の目} \mid \text{癖なし})$$

だから

$$
\begin{aligned}
P(\text{癖なし}\,|\,1\text{ の目}) &= \frac{P(\text{癖なし})P(1\text{ の目}\,|\,\text{癖なし})}{P(1\text{ の目})}\\
&= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}\\
&= \frac{1}{4},\\
P(\text{癖あり}\,|\,1\text{ の目}) &= 1 - P(\text{癖なし}\,|\,1\text{ の目}) = \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

ということになる．もともとサイコロに癖があるかないかの確率は

$$P(\text{癖あり}) = P(\text{癖なし}) = \frac{1}{2}$$

だったけれども, 最初に振ってみて 1 の目になったら, 癖のある確率は $\frac{3}{4}$ に増える．

1 の目が出ると, 癖のあるサイコロを持っている確率が増えるから, 同じサイコロをもう一度ふると, 1 の目が出る確率も増える．これを計算するために,

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \text{1 回目の振ったときに 1 の目がでる},\\
A_2 &= \text{2 回目の振ったときに 1 の目がでる},
\end{aligned}
$$

とおく．すると

$$
\begin{aligned}
P(A_2|\,A_1) &= \frac{P(A_1\text{ かつ }A_2)}{P(A_1)}\\
&= \frac{P(\text{ 癖なし})\dfrac{P(A_1\text{ かつ }A_2)}{P(\text{ 癖なし})} + P(\text{ 癖あり})\dfrac{P(A_1\text{ かつ }A_2)}{P(\text{ 癖あり})}}{P(A_1)}\\
&= \frac{P(\text{ 癖なし})\times P(A_1\text{ かつ }A_2|\text{ 癖なし}) + P(\text{ 癖あり})\times P(A_1\text{ かつ }A_2|\text{ 癖あり})}{P(A_1)}\\
&= \frac{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}}{\dfrac{1}{3}}\\
&= \frac{1}{24}+\frac{3}{8}\\
&= \frac{5}{12}
\end{aligned}
$$

となる．最初に振ったときに 1 の目が出る確率は $P(\text{ 1 の目 }) = \frac{1}{3} \fallingdotseq 0.3$ だったけれど, 1 の目が出たとき, 同じサイコロを振ってもう一度 1 の目が出る確率は

$$P(1\text{ の目}\,|\,1\text{ の目}) = \frac{5}{12} \fallingdotseq 0.4$$

と増えている．最初に 1 の目が出たことを知れば, サイコロに癖のある確率は $\frac{1}{2}$ から $\frac{3}{4}$ に変わるので, その情報を使うと, 次回にも 1 の目の出る確率は $\frac{1}{3}$ から $\frac{5}{12}$ に修正される．これが, ベイズの定理を使って「経験に学ぶ」ということである．

## 5 モンティ・ホール問題

条件付き確率とベイズの定理を使って次の問題の確率を計算してみよう．

0 三つの扉がある．一つは賞品．二つは賞品なし．

1 挑戦者は三つの中から一つ扉を選ぶ．

2 司会者（モンティ・ホール）は答えを知っており，残り二つの扉の中で賞品なしの扉を等確率で一つ選んで開ける．

3 挑戦者は残り二つの扉の中から好きな方を選べる．このとき扉を変えるべきか？変えないべきか．

挑戦者は扉 1 を選び, 司会者は扉 2 を開けたとしよう．次のように記号を定める．

$$
\begin{aligned}
A &= \text{司会者によって扉 2 が開けられる事象}, \\
B &= \text{扉 1 に賞品がある事象}
\end{aligned}
$$

すると

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \text{司会者によって扉 2 が開けられる確率}, \\
P(B) &= \text{扉 1 に賞品がある確率}, \\
P(A|\,B) &= \text{扉 1 に賞品があるときに, 司会者によって扉 2 が開けられる確率}, \\
P(B|\,A) &= \text{司会者によって扉 2 開かれたときに, 扉 1 に賞品がある確率}
\end{aligned}
$$

であり, $P(B|\,A)$ が求めたい確率である．すぐにわかることは

$$
\begin{aligned}
P(B) &= \frac{1}{3}, \\
P(A|\,B) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

である．$P(A)$ は少々難しい．これは次のように求める．

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(\text{扉 1 に賞品があってかつ扉 2 が司会者によって開けられる}) \\
&\quad +P(\text{扉 2 に賞品があってかつ扉 2 が司会者によって開けられる}) \\
&\quad +P(\text{扉 3 に賞品があってかつ扉 2 が司会者によって開けられる}) \\
&= P(\text{司会者によって扉 2 が開けられる}\,|\,\text{扉 1 に賞品}) \times P(\text{扉 1 に賞品}) \\
&\quad +P(\text{司会者によって扉 2 が開けられる}\,|\,\text{扉 2 に賞品}) \times P(\text{扉 2 に賞品}) \\
&\quad +P(\text{司会者によって扉 2 が開けられる}\,|\,\text{扉 3 に賞品}) \times P(\text{扉 3 に賞品}) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

となる. したがって,

$$P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(A|\,B) = \frac{1}{2}, \quad P(A) = \frac{1}{2}$$

がわかった. ここで, ベイズの定理の公式を使うと

$$\begin{aligned} P(B|\,A) &= \frac{P(B)P(A|\,B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となり, 扉を変えない方が正解である確率がこれである. したがって, 扉を変えた方が正解である確率は

$$1 - P(B|\,A) = \frac{2}{3}$$

となるので, 挑戦者は扉を変えた方がよいのである.