

大阪公立大学理学部数学科
2026 年度「数理統計学 1」の第 16 回目講義資料:
正規分布に関連した分布

注意 教科書 [1] の記法とは微妙に異なるところがあることに注意せよ.

正規分布に関連した分布であるガンマ分布, χ^2 分布, F 分布, t 分布を定義し, これらの基本的な性質を述べる. これらの分布は正規母集団から標本に基づく統計量の分布 (いわゆる標本分布) の議論で重要な役割を担う. それぞれの分布の確率密度関数の導出は自己完結な形で行った.

1 ガンマ分布

まず, ガンマ関数を導入する. $a > 0$ に対してガンマ関数を

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

で定義する. $a > 1$ のとき, 部分積分により

$$\begin{aligned} \Gamma(a) &= \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx = -x^{a-1} e^{-x} \Big|_0^{\infty} + (a-1) \int_0^{\infty} x^{a-2} e^{-x} dx \\ &= (a-1) \Gamma(a-1) \end{aligned}$$

となる. $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$ なので, 帰納法により

$$\Gamma(k) = (k-1)! \quad (k = 1, 2, \dots)$$

となる.

定義 1.1. (ガンマ分布) $a, b > 0$ とする. 連続型確率変数 X が母数 (a, b) のガンマ分布に従うとは, X の p.d.f. が

$$p_{a,b}(x) = \begin{cases} \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} & (x > 0) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

で与えられるときをいう. これを $X \sim \text{Ga}(a, b)$ と記す.

補題 1.2. $k \geq 2$ は自然数とする. $X_1, X_2, \dots, X_k$ を独立な確率変数, 各 $X_j \sim \text{Ga}(a_j, b)$ ($j = 1, 2, \dots, k, a_j > 0, b > 0$) としたとき

$$X_1 + X_2 + \dots + X_k \sim \text{Ga}(a_1 + a_2 + \dots + a_k, b)$$

となる.

Proof. 証明は次の補題を用いてする.

□

補題 1.3. 連続型確率変数 X, Y は独立とし, それぞれの p.d.f. を p^X, p^Y とする. このとき $X+Y$ の p.d.f. は

$$p^{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p^X(x-y)p^Y(y) dy$$

で与えられる.

Proof. 確率ベクトル (X, Y) の同時 p.d.f. は $p^X(x)p^Y(y)$ になることに注意する. $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} \Pr(X+Y \leq t) &= \int \int_{x+y \leq t} p^X(x)p^Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p^Y(y) \left\{ \int_{-\infty}^{t-y} p^X(x) dx \right\} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p^Y(y) \left\{ \int_{-\infty}^t p^X(z-y) dz \right\} dy \\ &\quad (x|_{-\infty}^{t-y} = z-y|_{-\infty}^t \text{ と変換}) \\ &= \int_{-\infty}^t \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} p^X(z-y)p^Y(y) dy \right\} dz \quad (\because \text{Fubini の定理}^1) \end{aligned}$$

となる. よって微積分の基本定理より

$$p^{X+Y}(t) = \frac{d}{dt} \Pr(X+Y \leq t) = \int_{-\infty}^{\infty} p^X(t-y)p^Y(y) dy$$

を得る. □

補題 1.2 の証明. $X_1 \sim \text{Ga}(a_1, b)$, $X_2 \sim \text{Ga}(a_2, b)$ とし, X_1 と X_2 は独立とする. $\text{Ga}(a, b)$ の p.d.f. を $p(\cdot | a, b)$ と書く. 補題 1.3 より

$$\begin{aligned} p^{X_1+X_2}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x-y | a_1, b) p(y | a_2, b) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b^{a_1}}{\Gamma(a_1)} (x-y)^{a_1-1} e^{-b(x-y)} \cdot \frac{b^{a_2}}{\Gamma(a_2)} y^{a_2-1} e^{-by} dy \\ &= \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-bx} \int_0^x (x-y)^{a_1-1} y^{a_2-1} dy \\ &\quad (x-y > 0 \text{ かつ } y > 0 \text{ より } 0 < y < x \text{ となる.}) \\ &= \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx} \int_0^1 (1-z)^{a_1-1} z^{a_2-1} dz \\ &\quad (y = xz \text{ と変換}) \end{aligned}$$

を得る. ここで $p^{X_1+X_2}$ は p.d.f. であることに注意すると

$$\begin{aligned}
1 &= \int_0^\infty p^{X_1+X_2}(x) dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \left(\int_0^1 (1-z)^{a_1-1} z^{a_2-1} dz \right) b^{a_1+a_2} \int_0^\infty x^{a_1+a_2-1} e^{-bx} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \left(\int_0^1 (1-z)^{a_1-1} z^{a_2-1} dz \right) \underbrace{\int_0^\infty w^{a_1+a_2-1} e^{-w} dw}_{=\Gamma(a_1+a_2)} \\
&\quad (w = bx \text{ と変換}) \\
&= \frac{\Gamma(a_1+a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int_0^1 (1-z)^{a_1-1} z^{a_2-1} dz \quad (\text{ガンマ関数の定義より})
\end{aligned}$$

より

$$\int_0^1 (1-z)^{a_1-1} z^{a_2-1} dz = \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{\Gamma(a_1+a_2)} \quad (1)$$

を得る. よって

$$X_1 + X_2 \sim \text{Ga}(a_1 + a_2, b)$$

がわかる. あとはこのことを繰り返せばよい.

注意 1.4. $a_1 > 0, a_2 > 0$ に対して

$$B(a_1, a_2) := \int_0^1 (1-z)^{a_1-1} z^{a_2-1} dz$$

をベータ関数とよぶ. すると (1) から

$$B(a_1, a_2) = \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{\Gamma(a_1+a_2)}$$

という関係式が成り立つことがわかる. □

2 χ^2 分布

定義 2.1. $Z_1, Z_2, \dots, Z_k \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, 1)$ とする.

$$S = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_k^2$$

の分布を自由度 k の χ^2 分布といい, $S \sim \chi_k^2$ と記す.

$Z \sim N(0, 1)$ のとき $Y = Z^2$ の p.d.f. は

$$p^Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{(1/2)-1} e^{-y/2} & (y > 0) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases} \quad (2)$$

となる. 演習問題 5.1 を参照せよ. さらに

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

であったこと²を思い出すと

$$p^Y(y) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} y^{(1/2)-1} e^{-y/2} & (y > 0) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

がわかる. これは $\text{Ga}(1/2, 1/2)$ の p.d.f. である. さらに補題 1.2 より

$$\chi_k^2 = \text{Ga}\left(\frac{k}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

がわかる. よって χ_k^2 の p.d.f. は

$$p_k(x) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{(k/2)-1} e^{-x/2} & (x > 0) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

である.

3 F 分布

定義 3.1. $k, m \in \mathbb{N}$ とする. X と Y は独立で $X \sim \chi_k^2$ と $Y \sim \chi_m^2$ とする. このとき

$$F = \frac{X/k}{Y/m}$$

の分布を自由度 (k, m) の F 分布といい, $F \sim F(k, m)$ と記す.

注意 3.2. 上の定義では, F 分布の記号を $F(k, m)$ と書いた. 分布関数の記号と同じ F の字体 F を使用しているが, 文脈から判断できるので記号の乱用をする. $\square$

補題 3.3. $k, m \in \mathbb{N}$ とする. $F \sim F(k, m)$ のとき, F の p.d.f. $p(x|k, m)$ は

$$p_{k,m}(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{k+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \frac{k^{k/2} m^{m/2} x^{(k/2)-1}}{(m+kx)^{(k+m)/2}} & (x > 0) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

で与えられる.

² $N(0, 1/2)$ の p.d.f. から

$$\sqrt{\pi} = \sqrt{2\pi(1/2)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

である. ここで, $t = x^2$ とおく. すると $dt = 2x dx$ から $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$ となるので

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} &= 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} \underbrace{dx}_{=\frac{1}{2}t^{(1/2)-1}dt} = \int_0^{\infty} t^{(1/2)-1} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

がわかる.

Proof. 証明は次の補題を用いて行う.

□

補題 3.4. X, Y を独立な正值の連続型確率変数とし, それぞれの p.d.f. を $p^X(x)$ と $p^Y(x)$ とする. このとき

$$Z = \frac{X}{Y}$$

の p.d.f. は

$$p^Z(z) = \begin{cases} \int_0^\infty y p^X(zy) p^Y(y) dy & (z > 0) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

で与えられる.

Proof. 仮定から確率ベクトル (X, Y) の同時 p.d.f. は $p^X(x)p^Y(y)$ となる. よって $t > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \Pr(Z \leq t) &= \int_0^\infty \left\{ \int_0^{ty} p^X(x) p^Y(y) dx \right\} dy \\ &= \int_0^\infty \left\{ \int_0^t p^X(zy) p^Y(y) y dz \right\} dy \quad (x = zy \text{ と変換}) \\ &= \int_0^t \left\{ \int_0^\infty p^X(zy) p^Y(y) y dy \right\} dz \quad (\because \text{Fubini の定理}) \end{aligned}$$

となる. ここで微積分の基本定理を用いると

$$p^Z(t) = \frac{d}{dt} \Pr(Z \leq t) = \int_0^\infty y p^X(ty) p^Y(y) dy$$

となる.

□

補題 3.3 の証明 補題 3.4 を用いる. $z > 0$ のとき, $Z = X/Y$ の p.d.f. は

$$\begin{aligned}
p^Z(z) &= \int y p^X(zy) p^Y(y) dy \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{m/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^\infty y (zy)^{(k/2)-1} e^{-(zy)/2} y^{(m/2)-1} e^{-y/2} dy \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{(k+m)/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} z^{(k/2)-1} \int_0^\infty y^{(k+m)/2-1} e^{-(z+1)y/2} dy \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{(k+m)/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} z^{(k/2)-1} \int_0^\infty \left(\frac{2x}{z+1}\right)^{(k+m)/2-1} e^{-x} \frac{2}{z+1} dx \\
&\quad (x = \frac{z+1}{2}y \text{ と変換}) \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} z^{(k/2)-1} (1+z)^{-(k+m)/2} \int_0^\infty x^{(k+m)/2-1} e^{-x} dx \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{k+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} z^{(k/2)-1} (1+z)^{-(k+m)/2}
\end{aligned}$$

となる. $F = \frac{m}{k}Z$ なので

$$\begin{aligned}
p_{k,m}(x) &= p^Z\left(\frac{k}{m}x\right) \frac{k}{m} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{k+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} (kx/m)^{(k/2)-1} (1+(kx/m))^{-(k+m)/2}
\end{aligned}$$

となる. この式を整理すると主張は証明される.

4 t 分布

定義 4.1. $Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_k \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, 1)$ のとき

$$T = \frac{Z_0}{\sqrt{\frac{1}{k}(Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_k^2)}}$$

を自由度 k の t 分布といい, これを $T \sim t_k$ と記す.

補題 4.2. T の p.d.f. は

$$p_k^T(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{k}} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-(k+1)/2} & (x > 0) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

で与えられる

Proof. 定義より

$$T^2 \sim F(1, k)$$

であることをまず思い出す. T の分布は対称なので

$$p_k^T(x) = p_k^T(-x) \quad (x \geq 0)$$

となる. よって $x > 0$ に対して

$$2\Pr(0 \leq T \leq x) = \Pr(-x \leq T \leq x) = \Pr(T^2 \leq x^2)$$

となる. 上の式から $F(1, k)$ の p.d.f. を $p_{1,k}(\cdot)$ と書けば

$$2 \int_0^x p_k^T(t) dt = \int_0^{x^2} p_{1,k}(t) dt \quad (3)$$

となる. さらに, $t \mapsto t^2$ と変換すると

$$\int_0^{x^2} p_{1,k}(t) dt = \int_0^x p_{1,k}(t^2) 2t dt \quad (4)$$

となる. よって, (3) と (4) を合わせると

$$\int_0^x p_k^T(t) dt = \int_0^x p_{1,k}(t^2) t dt \quad (5)$$

を得る. ここで補題 3.3 から

$$p_{1,k}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{k^{k/2} t^{-1/2}}{(k+t)^{(k+1)/2}}$$

であることを思い出す. この式を (5) の右辺に代入して, x について両辺を微分して, 微積分の基本定理を用いると

$$p_k^T(x) = p_{1,k}(x^2) \underbrace{x}_{=t^{1/2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{k}} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-(k+1)/2}$$

となる. □

5 演習問題

演習問題 5.1. $Z \sim N(0, 1)$ とする. Z の p.d.f. を

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad (-\infty < z < \infty)$$

としたとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 任意の $y > 0$ に対して, $\Pr(Z^2 \leq y)$ を p も用いて表現せよ.

(2) $Y := Z^2$ とし, Y の p.d.f. を p^Y と書く. このとき, $y > 0$ に対して

$$p^Y(y) = \frac{d}{dy} \Pr(Y \leq y)$$

となることを利用して, Y の p.d.f. が (2) で与えられることを示せ.

演習問題 5.2. k を自然数とする. 連続型確率変数 T は p.d.f.

$$p(t) = \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma(k/2)} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \frac{1}{(1+t^2/k)^{(k+1)/2}}, \quad -\infty < t < \infty$$

を持つとする. ただし, $\Gamma(\cdot)$ の Euler のガンマ関数で

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx \quad (a > 0)$$

で定義する.

(1) $\int_{-\infty}^\infty p(t) dt$ を計算せよ.

(2) 連続型確率変数 U と V は独立で, U は自由度 k の χ^2 分布 χ_k^2 に従い, V は $N(0, 1)$ に従うとする.

$$T = \frac{V}{\sqrt{\frac{U}{k}}}$$

とおいたとき, T の p.d.f. p^T を変数変更の公式を用いて求めよ.

ヒント 1 教科書とは記法が異なるので, 注意すること. $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)^\top$ を 2 次元確率ベクトルとし, その同時 p.d.f. を $p^{\mathbf{Z}}$ と書くことにする. さらに $\mathbb{Z} := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2; p^{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) > 0\}$ とし, 関数

$$\mathbf{h}(\cdot) = (h_1(\cdot), h_2(\cdot))^\top : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbf{h}(\mathbb{Z})$$

は 1 対 1 とし, $j = 1, 2$ に対して

$$X_j = h_j(Z_1, Z_2); \quad \mathbf{X} = (X_1, X_2)^\top$$

とおく. $\mathbf{h}$ は 1 対 1 なので, $\mathbf{h}$ の逆写像を

$$\mathbf{h}^{-1} = (h_1^{-1}, h_2^{-1})^\top : \mathbf{h}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

が存在すると仮定する. よって, $\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{h}(\mathbf{z})) = \mathbf{z}$ なので, $\mathbf{Z} = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{X})$ となる³. 変換 $\mathbf{h}$ の Jacobian を

$$J_{\mathbf{h}}(\mathbf{z}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(\mathbf{z})}{\partial z_1} & \frac{\partial h_1(\mathbf{z})}{\partial z_2} \\ \frac{\partial h_2(\mathbf{z})}{\partial z_1} & \frac{\partial h_2(\mathbf{z})}{\partial z_2} \end{pmatrix}$$

³ここで, すこし記号の乱用をしている. すなわち, h_j^{-1} は $\mathbf{h}^{-1}$ の第 j 成分の表記であって, h_1 の逆関数ではないことに注意せよ.

とおく. さらに, $\mathbf{X}$ の同時 p.d.f. を求めるために, $\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x})$ の Jacobian $\mathbf{J}_{\mathbf{h}^{-1}}(\mathbf{x})$ を

$$\mathbf{J}_{\mathbf{h}^{-1}}(\mathbf{x}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1^{-1}(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1^{-1}(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_2^{-1}(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2^{-1}(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

で定める.

$\mathbf{J}_{\mathbf{h}}(\mathbf{z}) \neq 0$ ($\mathbf{z} \in \mathbb{Z}$)⁴ が成立するとき

$$\mathbf{p}^{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p}^{\mathbf{Z}}(\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}))}{|\mathbf{J}_{\mathbf{h}}(\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}))|} = |\mathbf{J}_{\mathbf{h}^{-1}}(\mathbf{x})| \mathbf{p}^{\mathbf{Z}}(\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x})) \quad (6)$$

となることが知られている. これは, 標準的な多変数の積分の変換公式からわかる.

ヒント 2 確率ベクトル (U, V) の同時 p.d.f. $\mathbf{p}^{(U, V)}$ は

$$\mathbf{p}^{(U, V)}(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} \frac{1}{\Gamma(k/2) 2^{k/2}} u^{(k/2)-1} e^{-u/2} & \begin{pmatrix} -\infty < v < \infty; \\ 0 < u < \infty \end{pmatrix} \\ 0 & \text{(その他の場合)} \end{cases}$$

となる. さらに

$$T = \frac{V}{\sqrt{\frac{U}{k}}}; \quad W = U$$

として, (6) を利用して, 同時 p.d.f. $\mathbf{p}^{(T, W)}$ を求め

$$\mathbf{p}^T(t) = \int_0^\infty \mathbf{p}^{(T, W)}(t, w) dw$$

を計算すればよい.

References

- [1] 綿森葉子, 田中秀和, 田中潮 (2023). 測度論からの数理統計学. 共立出版.

⁴実は, a.e $\mathbb{X}$ でよい.