2004 年 6 月 2 日（今野）

5 月 21 日出題のレポートのコメント

確率変数

- 離散型確率変数と連続型確率変数はつぎのように定義します.
  * 確率変数 X の分布関数が連続関数の時 $\Rightarrow$ X を連続型確率変数という.
  * 確率変数 X の分布関数が階段関数の時 $\Rightarrow$ X を離散型確率変数という.
- $P(X = x)$ の確率について
  * 確率変数 X が連続型ならば，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して，$P(X = x) = 0$.
  * 確率変数 X が離散型確率変数ならば，ある $x \in \mathbb{R}$ において，$P(X = x) > 0$ となる.
- 確率関数と確率密度関数
  * 確率変数 X が離散型確率変数ならば，$f_X(x) = P(X = x)$ を確率関数という.
  * 確率変数 X が連続型のときは，上記のように確率関数を定義しても無意味．そのかわりに確率密度関数を用いる．すなわち，任意の $a, b(a < b) \in \mathbb{R}$ 対して，非負値関数 $f_X(x)$ が存在して，

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$$

をみたせば，それを確率密度関数ということにする.

分布関数

- X を確率変数としたとき，X の分布関数を $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ で定義する．ただし，$x \in \mathbb{R}$ である．したがって，$F_X(x)$ は実数上で定義される関数で
  * $0 \leq F_X(x) \leq 1$
  * 非減少
  * 右連続

  となる.
- 連続型確率変数 X が確率密度関数 $f_X(x)$ をもつとき,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)\,dt$$

とかける．確率密度関数が与えられたときに積分の計算をして分布関数をきちんと求めることができるようにすること.

- X が離散型確率変数で確率関数 $f_X(x)$ をもつときには，$P(X = x) \neq 0$ なる点 x で $f_X(x)$ の値だけジャンプをする右連続な階段関数となることに注意せよ.

期待値　– $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ とする．連続型確率変数 X が確率密度関数 $f_X(x)$ をもつとき，$g(X)$ の期待値は

$$\mathbb{E}[\underline{g(X)}]=\int_{-\infty}^{\infty}\underline{g(x)}f_X(x)\,dx$$

となる．ただし，

$$\mathbb{E}[\underline{|g(X)|}]=\int_{-\infty}^{\infty}\underline{|g(x)|}f_X(x)\,dx<\infty$$

のときに $g(X)$ の期待値は存在することに注意.

– 離散型確率変数 X が確率関数 $f_X(x)$ をもつとき，$g(X)$ の期待値は

$$\mathbb{E}[\underline{g(X)}]=\sum_x\underline{g(x)}f_X(x)$$

となる．ただし，

$$\mathbb{E}[\underline{|g(X)|}]=\sum_x\underline{|g(x)|}f_X(x)<\infty$$

のときに $g(X)$ の期待値は存在することに注意.

確率の公理 A と B を事象としたとき,「$A\cap B=\emptyset$ ならば，$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$ 」をよく使います．これをどこで利用しているかやどこで利用するべきかをきちんと理解すると議論の流れがより明瞭になると思います.

注意　– 考えてもわからないときには，なにをどう考えたかを書くこと．さらに，どこがどうなるかがわからなかったかをできるだけ今野に伝わるようにかくこと．上記の記述をもって解答をした場合と同等とみなします.

– 再提出時においては下記の点を目標に再提出のレポートを作成のこと.

  * 連続型確率変数と離散型確率変数の区別をしっかりと理解すること.
  * 期待値を定義に従い積分や和の式でかけること.
  * 離散型確率変数の確率関数が与えられたときにその分布関数をキチンと求めること.
  * 連続型確率変数の確率密度関数が与えられたときにその分布関数をキチンと求めること.

問題 21　– Y の確率関数を求めると

$$f_Y(y)=\begin{cases}1/3 & (y=0)\\ 2/3 & (y=1)\end{cases}$$

となる．これから $\mathbb{E}[Y]$ と $\mathbb{VAR}[Y]$ を求めると計算が楽. $\mathbb{E}[Y]=(2/3)$ と $\mathbb{VAR}[Y]=(2/3)-(2/3)^2=(2/9)$ となることがわかる.

問題 24 – 期待値の中を展開し，期待値の線形性を使うと

$$g(t) = \mathbb{E}[(X-t)^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2tX + t^2] = t^2 - 2\mathbb{E}[X]t + \mathbb{E}[X^2]$$

となる．うえの式で $\mathbb{E}[X]$ と $\mathbb{E}[X^2]$ は定数である．したがって，$g(t)$ は t の 2 次関数である．あとは 2 次関数の最小化問題になる．

– $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ のとき， $-\infty < \mathbb{E}[X] < \infty$ であることの証明には Jensen の不等式を使えない．なぜならば，Jensen の不等式の条件は $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は凸関数でかつ $\underline{\mathbb{E}[|g(X)|] < \infty \text{ と } \mathbb{E}[|X|] < \infty}$ であることが仮定であるので．Jensen の不等式からわかることは， $\underline{\mathbb{E}[X^2] < \infty \text{ かつ } \mathbb{E}[|X|] < \infty \text{ ならば，} \mathbb{E}[X^2] \geq \{\mathbb{E}[X]\}^2}$ であること．したがって，直接的に証明するか後で導入される Hölder (Cauchy-Schwarz) の不等式を使い「$\mathbb{E}[X^2] < \infty$ ならば，$\mathbb{E}[|X|] < \infty$ 」を証明する．たとえば，X が確率密度関数 $f_X(x)$ を持てば

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X|] &= \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{-1} |x| f_X(x)\,dx + \int_{-1}^{-1} |x| f_X(x)\,dx + \int_{1}^{\infty} |x| f_X(x)\,dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{-1} x^2 f_X(x)\,dx + \int_{-1}^{-1} f_X(x)\,dx + \int_{1}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 f_X(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \mathbb{E}[X^2] + 1 < \infty
\end{aligned}$$

となる．X が離散型確率変数のときも同様にすれば，$\mathbb{E}[|X|] \leq \mathbb{E}[X^2] + 1$ であることがわかる．

問題 25 – X が連続型確率変数のときの変数変換の公式をきちんと適用できるように復習すること

– または，$Y = X^2$ の分布関数 $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$ を求める．そのために，Y の定義より $y < 0$ のとき，$F_Y(y) = 0$ となるので，$y \geq 0$ として，$F_Y(y)$ を求めよう．$y \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^2 \leq y) \\
&\quad = \mathbb{P}((\{X^2 \leq y\} \cap \{X < 0\}) \cup (\{X^2 \leq y\} \cap \{X = 0\}) \cup (\{X^2 \leq y\} \cap \{X < 0\}))
\end{aligned}$$

に確率の公理と連続型確率変数の性質 (すべての x に対し，$\mathbb{P}(X = x) = 0$) を利用して変形する．