2004 年 6 月 30 日（今野）

6 月 23 日出題のレポートのコメント

問題 36 – 周辺確率密度関数や条件付確率密度関数を求めたときには，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x)\,dy$$

を確認すること．

– (X, Y) の同時確率 (密度) 関数を $f_{X,Y}(x, y)$ とすれば，X の周辺確率 (密度) 関数 $f_X(x)$ は x のみで表現でき，y には関係なくなる！

たとえば，

$$f_X(x) = \begin{cases} \cdots & \underline{(0 < x < y)} \\ \cdots & (\text{その他}) \end{cases}$$

は下線部がおかしいので，正しくないことがわかる．

– <u>積分範囲について</u>

$$K := \{(x, y) : f_{X,Y}(x, y) > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y,\ 0 < y < 1\}$$

をおくと

$$K = \{(x, y) : 0 < x < 1, x < y < 1\}$$

となることに注意する．したがって，$0 < x < 1$ に対して，

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\,dy = \int_x^1 f_{X,Y}(x, y)\,dy$$

となる．また，$0 < y < 1$ に対して

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\,dx = \int_0^y f_{X,Y}(x, y)\,dx$$

となることに注意せよ．さらに，

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{X,Y}(x, y)\,dx\,dy &= \int\int_K xyf_{X,Y}(x, y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left\{\int_0^y xyf_{X,Y}(x, y)\,dx\right\} dy \\ &= \int_0^1 \left\{\int_x^1 xyf_{X,Y}(x, y)\,dy\right\} dx \end{aligned}$$

となることに注意せよ．

– $\{x \in \mathbb{R} : f_X(x) \neq 0\} = (0, 1)$ なので，$f_{Y|X}(y|x)$ は $x \in (0, 1)$ に対して定義される．また，$X = x$ が与えられたとき，$\mathbb{P}(x < Y < 1) = 1$ になることに注意する．すなわち，$y \notin (x, 1)$ ならば，$f_{Y|X}(y|x) = 0$ となる．したがって，$0 < x < 1$ に対して

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \cdots & (x < y < 1) \\ \cdots & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる．

問題 37 – <u>記号について</u>

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {}_xC_y = \frac{x!}{y!(x-y)!}$$

である <u>タイプミス</u>

  * 「同時確率密度関数」$\longrightarrow$「同時確率関数」
  * 「条件付確率密度関数」$\longrightarrow$「条件付同時確率関数」

.

- 連続型確率変数と離散型確率変数の区別について(問題にタイプミスがあったので混乱した？)
  * 離散型確率変数・確率関数（同時確率関数）・計算は $\sum$ を用いる．
  * 連続型確率変数・確率密度関数（同時密度確率関数）・計算は $\int$ を用いる．
- X と Y の同時確率関数 $f_{X,Y}(x, y)$ を求めたとき，

$$\sum_x \sum_y f_{X,Y}(x, y) = 1$$

  を確認するとよい．
- X と Y の同時確率関数 $f_{X,Y}(x, y)$ を求めるには，

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x)$$

  からわかる．
- Y の期待値を求めるために，$f_{X,Y}(x, y)$ を用いて

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_y \sum_x y f_{X,Y}(x, y)$$

  とすればよい．
- $\mathbb{E}(Y|x)$ と $\mathbb{E}(Y|X)$ の記法について

  $\mathbb{E}(Y|x)$ は $X = x$ が与えられたときの Y の条件付期待値であり，x が与えられると $\mathbb{E}(Y|x)$ の値が定まるので，$\mathbb{E}(Y|x)$ は x の関数となる．したがって，$g(x) := \mathbb{E}(Y|x)$ とおく．このとき，$\mathbb{E}(Y|X)$ を

$$\mathbb{E}(Y|X) = g(X)$$

  で定義する．よって，$\mathbb{E}(Y|X)$ は確率変数 X を関数 g で変換した確率変数 $g(X)$ のこと．
- $f_{Y|X}(y|x)$ と $f_X(x)$ を用いても $\mathbb{E}[Y]$ は求まる．

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y|1) &= \sum_{y=0,1} y f_{Y|X}(y|1) = \frac{1}{2} \\
\mathbb{E}(Y|2) &= \sum_{y=0,1,2} y f_{Y|X}(y|2) = 1
\end{aligned}$$

  と前項の注から

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X)] = \mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x=1,2} g(x) f_X(x) = \sum_{x=1,2} \mathbb{E}(Y|x) f_X(x) \\
&= \frac{1}{2} \times f_X(1) + 1 \times f_X(2)
\end{aligned}$$

  となる．

– (iii) の別解

$x=1$ と $x=2$ の場合にわけて $\mathbb{E}(Y|\,x)$ を計算すれば，比較的簡単であるが，直接的に計算も可能なようです．ただし，議論はやや技術的になる．

$$\mathbb{E}[Y]=\sum_{x=1}^{2}\sum_{y=0}^{x} f_{X,\,Y}(x,\,y)=\sum_{x=1}^{2}\sum_{y=0}^{x} y f_{Y\,|\,X}(y|\,x)f_X(x) \tag{1}$$

となることに注意する．また，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y|\,x) &= \sum_{y=0}^{x} y f_{Y\,|\,X}(y|\,x)=\sum_{y=0}^{x} y\frac{x!}{y!(x-y)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \\
&= \sum_{y=1}^{x}\frac{x!}{(y-1)!(x-y)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{y}\left(\frac{1}{2}\right)^{x-y} \\
&= \frac{x}{2}\sum_{y=1}^{x}\frac{(x-1)!}{(y-1)!\{(x-1)-(y-1)\}!}\left(\frac{1}{2}\right)^{y-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{(x-1)-(y-1)} \\
&= \frac{x}{2}\sum_{z=0}^{x-1}\frac{(x-1)!}{z!\{(x-1)-z\}!}\left(\frac{1}{2}\right)^{z}\left(\frac{1}{2}\right)^{(x-1)-z} \qquad (z=y-1 \text{ とおいた}) \\
&= \frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{x-1}=\frac{x}{2} \qquad (\text{二項定理より})
\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\mathbb{E}(Y|\,X)=\frac{X}{2}$$

である．よって，(1) に代入すれば，

$$\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|\,X)]=\frac{1}{2}\mathbb{E}[X]=\frac{1}{2}\sum_{x=1}^{2} x f_X(x)=\frac{1}{6}\sum_{x=1}^{2} x^2=\frac{5}{6}$$

となる．