4.4 確率変数の列の収束について

以下では，特に断りがない限り $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を確率変数列とし，X を確率変数とし，これらは同一の確率空間上で定義されているとする．

定義 4.6 (確率収束) $n\to\infty$ のとき，$\{X_n\}$ が X に**確率収束**するとは，任意の正数 ϵ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$$

をみたすときをいい，$X_n \xrightarrow{P} X$ と記す．

定義 4.7 (分布収束) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}, X$ は確率変数とし，$F_X(x)$ を X の分布関数とする．$n\to\infty$ のとき，$\{X_n\}$ が X に**分布収束**するとは，$F_X(x)$ の任意の連続点において，

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \le x) = F_X(x)$$

をみたすときをいい，$X_n \xrightarrow{d} X$ と記す．

注意 4.2 $X_n \xrightarrow{d} F_X(x)$ のように記すこともある．また，X が正規分布 $N(0,\sigma^2)$ に従うとき，$X_n \xrightarrow{d} N(0,,\sigma^2)$ と記すこともある．また，$F_X(x)$ のことを X_n の極限分布という．

例 4.6 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立同一に $[0, 1]$ 上の一様分布に従うとし，

$$M_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

とする．直感的には，$n\to\infty$ のとき，M_n は 1 に近づくことがわかるであろう．これはつぎのことから保障される．まず，M_n の分布関数は

$$F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & (x<0), \\ x^n & (0\le x\le 1), \\ 1 & (x>1), \end{cases}$$

と(4-4)なる．したがって，任意の正数 ϵ に対して，

$$\begin{aligned} P(|M_n - 1| > \epsilon) &= P(\{M_n < 1-\epsilon\} \cup \{M_n > 1+\epsilon\}) \\ &= P(M_n < 1-\epsilon) + P(M_n > 1+\epsilon) \\ &= P(M_n < 1-\epsilon) = (1-\epsilon)^n \to 0 \qquad (n\to\infty), \end{aligned}$$

がわかる(4-5)．

次に，$n(1-M_n)$ の極限分布を求めよう：$x\ge 0$ に対して，

$$\begin{aligned} P(n|1-M_n| \le x) &= P(M_n \ge 1 - x/n) = 1 - P(M_n < 1 - x/n) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \\ &\to 1 - e^{-x} \qquad (n\to\infty), \end{aligned}$$

となる．また，$x<0$ のときは $P(n|1-M_n|\le x) = 0$ となる．したがって，

$$n|1-M_n| \xrightarrow{d} F_X(x)$$

を得る．ただし，

$$F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & (x\ge 0), \\ 0 & (x<0), \end{cases}$$

である．すなわち，母数 1 の指数分布に分布収束することがわかる．

以下では確率変数列の収束に関する重要な定理を証明するための補題である．

補題 4.2 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ を事象の列とする．$n \uparrow \infty$ のとき，

$$P(A_n) \to 1, \qquad P(B_n) \to 1$$

ならば，

$$P(A_n \cap B_n) \to 1$$

が成立する．

証明 $P(A_n^c) = 1 - P(A_n) \to 0 (n \to \infty)$ に注意すれば，

$$P\{(A_n \cap B_n)^c\} = P(A_n^c \cup B_n^c) \leq P(A_n^c) + P(B_n^c) \to 0, \quad (n \to \infty)$$

よりわかる． □

定理 4.10 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を確率変数列で

$$X_n \xrightarrow{P} c, \qquad Y_n \xrightarrow{P} d, \qquad (n \to \infty)$$

を満足するとする．ただし，c と d は定数とする．このとき，

(i) $X_n \pm Y_n \xrightarrow{P} c \pm d$

(ii) $X_n Y_n \xrightarrow{P} cd$

(iii) $d \neq 0$ ならば，$X_n / Y_n \xrightarrow{P} c/d$

が成立する．

証明 (i) の証明．$|(X_n + Y_n) - (c + d)| \leq |X_n - c| + |Y_n - d|$ から，どんな正の数 $\epsilon > 0$ に対しても

$$|X_n - c| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{かつ} \quad |Y_n - d| < \frac{\epsilon}{2} \tag{4.13}$$

ならば，

$$|(X_n + Y_n) - (c + d)| < \epsilon$$

であるので

$$\{|X_n - c| < \frac{\epsilon}{2}\} \cap \{|Y_n - d| < \frac{\epsilon}{2}\} \subset \{|(X_n + Y_n) - (c + d)| < \epsilon\}$$

より，$n \uparrow \infty$ のとき，

$$P\{|(X_n + Y_n) - (c + d)| < \epsilon\} \geq P[\{|X_n - c| < \frac{\epsilon}{2}\} \cap \{|Y_n - d| < \frac{\epsilon}{2}\}] \to 1$$

となる[(4-6)]．なぜならば，$P\{|X_n - a| < \frac{\epsilon}{2}\} \to 1$ と $P\{|Y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}\} \to 1$ から補題 4.2 を用いればわかる．
(ii) の証明．$X_n Y_n - cd = (X_n - c)(Y_n - d) + d(X_n - c) + c(Y_n - d)$ に注意する．どんな正の数 $\epsilon > 0$ に対しても

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{|X_n Y_n - cd| \geq \epsilon\} \quad &\leq \quad \mathbb{P}\{|(X_n - c)(Y_n - d)| \geq \frac{\epsilon}{3}\} + \mathbb{P}\{|(X_n - c)| \geq \frac{\epsilon}{3|d|}\} \\ &\quad + \mathbb{P}\{|(Y_n - d)| \geq \frac{\epsilon}{3|c|}\}\end{aligned}$$

となる．どんな正の数 $\delta > 0$ に対しても

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{|(X_n-c)(Y_n-d)| \geq \frac{\epsilon}{3}\} &= \mathbb{P}\{|(X_n-c)(Y_n-d)| \geq \frac{\epsilon}{3} \text{ かつ } |Y_n-d| \geq \delta\} \\ &\quad +\mathbb{P}\{|(X_n-c)(Y_n-d)| \geq \frac{\epsilon}{3} \text{ かつ } |Y_n-d| < \delta\} \\ &\leq \mathbb{P}\{|Y_n-d| \geq \delta\} + \mathbb{P}\{|(X_n-c)(Y_n-d)| \geq \frac{\epsilon}{3} \text{ かつ } |Y_n-d| < \delta\} \\ &\leq \mathbb{P}\{|Y_n-d| \geq \delta\} + \mathbb{P}\{|X_n-c| \geq \frac{\epsilon}{3\delta}\} \to 0, \qquad (n \to \infty)\end{aligned}$$

となることからわかる．

(iii) の証明．$1/Y_n \xrightarrow{P} 1/d$ を示せば (ii) よりわかる．十分小さな正の数 $\delta > 0$ に対して，$|Y_n - d| \leq \delta$ ならば，$|Y_n| \geq (1/2)|d|$ より

$$\mathbb{P}\{|Y_n| \geq \frac{1}{2}|d|\} \geq \mathbb{P}\{|Y_n-d| \leq \delta\} \to 1, \qquad (n \to \infty)$$

となる．また，$|Y_n| \geq (1/2)|d|$ のとき，

$$\left|\frac{1}{Y_n} - \frac{1}{d}\right| \leq \frac{|Y_n-d|}{|Y_n||d|} \leq \frac{2}{|d|^2}|Y_n-d|$$

が成立する．これらを用いれば，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{Y_n}-\frac{1}{d}\right| \geq \epsilon\right\} &= \mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{Y_n}-\frac{1}{d}\right| \geq \epsilon, |Y_n| \geq \frac{1}{2}|d|\right\} + \mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{Y_n}-\frac{1}{d}\right| \geq \epsilon, |Y_n| < \frac{1}{2}|d|\right\} \\ &\leq \mathbb{P}\left\{|Y_n-d| \geq \frac{|d|^2}{2}\epsilon\right\} + \mathbb{P}\left\{|Y_n| < \frac{1}{2}|d|\right\} \\ &\to 0, \qquad (n \to \infty)\end{aligned}$$

より示せた． □

定理 4.11 （連続写像定理）: g を実数値連続関数とする．このとき，$Y_n \xrightarrow{P} b$（b は定数）ならば，$n \uparrow \infty$ のとき，

$$g(Y_n) \xrightarrow{P} g(b)$$

が成立する．

証明　どんな正の数 $\epsilon > 0$ に対してもある正の数 $\delta > 0$ が存在して，

$$|Y_n - b| \leq \delta \quad \text{ならば} \quad |g(Y_n) - g(b)| \leq \epsilon$$

を満足するので，

$$P\{|Y_n-b| \leq \delta\} \leq P\{|g(Y_n)-g(b)| \leq \epsilon\}$$

より，$n \uparrow \infty$ のとき，

$$P\{|g(Y_n)-g(b)| > \epsilon\} \leq P\{|Y_n-b| > \delta\} \to 0$$

より定理は示せた． □

定理 4.12 （Slutsky の定理）$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ を確率変数列とし $X_n \xrightarrow{d} X$, $A_n \xrightarrow{P} a$，$B_n \xrightarrow{P} b$ を満足するとする．ただし，X は確率変数，a と b は定数とする．このとき，

$$A_n + B_n X_n \xrightarrow{d} a + bX$$

が成立する．

証明 まず,

$$A_n + X_n \xrightarrow{L} a + X$$

を示す．どんな正の数 $\epsilon > 0$ に対しても

$$\begin{aligned} F_{(A_n+X_n)}(x) &= \mathbb{P}\{A_n + X_n \le x\} \\ &= \mathbb{P}\{A_n + X_n \le x, A_n \ge a-\epsilon\} + \mathbb{P}\{A_n + X_n \le x, A_n < a-\epsilon\} \end{aligned} \tag{4.14}$$

となることに注意する．十分小さな ϵ ととり，$x \pm \epsilon$ が $F_{(a+X)}(\cdot) = \mathbb{P}\{a + X \le \cdot)$ の連続点になるようにとる[(4-7)]．(4.14) から

$$F_{(A_n+X_n)}(x) \le \mathbb{P}\{X_n \le x - a + \epsilon\} + \mathbb{P}\{|A_n - a| > \epsilon\}$$

となる．また，$F_{X+a}(\cdot)$ の連続点 x に対して，

$$\begin{aligned} F_{(X_n+a)}(x) &= \mathbb{P}\{X_n + a \le x) = F_{X_n}(x-a) \\ &\to F_X(x-a) = P(X \le x-a) = F_{X+a}(x) \end{aligned}$$

となる ことより，$X_n + a \xrightarrow{d} X + a$ が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} F_{(X_n+A_n)}(x) &\le \lim_{n\to\infty}\{\mathbb{P}(X_n \le x - a + \epsilon) + \mathbb{P}(|A_n - a| > \epsilon)\} \\ &= \lim_{n\to\infty} F_{(X_n+a)}(x+\epsilon) + \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|A_n - a| > \epsilon) \\ &= F_{(X+a)}(x+\epsilon) \end{aligned} \tag{4.15}$$

となる．また，

$$\begin{aligned} 1 - F_{(X_n+A_n)}(x) &= \mathbb{P}\{X_n + A_n > x\} \\ &\le \mathbb{P}\{X_n > x - a - \epsilon\} + \mathbb{P}\{|A_n - a| \ge \epsilon\} \end{aligned}$$

から

$$\liminf_{n\to\infty} F_{(X_n+A_n)}(x) \ge \lim_{n\to\infty}\{F_{(X_n+a)}(x-\epsilon) + \mathbb{P}(|A_n - a| > \epsilon)\} = F_{X+a}(x-\epsilon) \tag{4.16}$$

となる．(4.15) と (4.16) から

$$F_{(X+a)}(x-\epsilon) \le \liminf_{n\to\infty} F_{(X_n+A_n)}(x) \le \limsup_{n\to\infty} F_{(X_n+A_n)}(x) \le F_{(X+a)}(x+\epsilon)$$

を得る．したがって，

$$\lim_{n\to\infty} F_{(X_n+A_n)}(x) = F_{(X+a)}(x)$$

が成り立つ．

つぎに，一般性を失わずに $b=1$ として，$B_n X_n \xrightarrow{d} X$ を示せば，定理は示される．どんな正の数 $\epsilon > 0$ に対しても

$$\begin{aligned} F_{B_nX_n}(x) &= \mathbb{P}\{B_nX_n \le x\} \\ &= P\left\{B_nX_n \le x, \left|\frac{1}{B_n} - 1\right| \le \frac{\epsilon}{|x|}\right\} + \mathbb{P}\left\{B_nX_n \le x, \left|\frac{1}{B_n} - 1\right| > \frac{\epsilon}{|x|}\right\} \\ &\le \mathbb{P}\{X_n \le x + \epsilon\} + \mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{B_n} - 1\right| > \frac{\epsilon}{|x|}\right\} \end{aligned}$$

より，$n \uparrow \infty$ のとき，

$$\limsup_{n\to\infty} F_{B_nX_n}(x) \le \lim_{n\to\infty}\left[\mathbb{P}\{X_n \le x+\epsilon\} + \mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{B_n}-1\right| > \frac{\epsilon}{|x|}\right\}\right] \to F_X(x+\epsilon)$$

を得る．同様な議論により，

$$\liminf_{n\to\infty} F_{B_nX_n}(x) \ge F_X(x-\epsilon)$$

を得る．したがって，

$$F_X(x-\epsilon) \le \liminf_{n\to\infty} F_{B_nX_n}(x) \le \limsup_{n\to\infty} F_{B_nX_n}(x) \le F_X(x+\epsilon)$$

が成り立つので，

$$F_{B_nX_n}(x) \to F_X(x)$$

を得る．よって，定理は示された．□

定理 4.13　$X_n \xrightarrow{P} X$ ならば，$X_n \xrightarrow{d} X$ が成立する．

証明：$A_n = X_n - X$ とおく．条件より，$A_n \xrightarrow{P} 0$ となり，$X_n = X + A_n$ に対して，Slutsky の定理を用いれば，この定理は示される．□

注意 4.3　上の定理の逆は一般には成立しないが，c をある定数とすると，

$$X_n \xrightarrow{d} c \quad \Leftrightarrow \quad X_n \xrightarrow{P} c$$

である．実際，X_n と X の分布関数を H_n と H かけば，すべての $\epsilon > 0$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} H_n(c-\epsilon-) = H(c-\epsilon-) = 0$$

と

$$\lim_{n\to\infty} H_n(c+\epsilon) = H(c+\epsilon) = 1$$

から

$$\begin{aligned} P(|X_n - c| > \epsilon) &= P(X_n > c+\epsilon) + P(X_n < c-\epsilon) \\ &= 1 - H_n(c+\epsilon-) + H_n(c-\epsilon) \to 0 \end{aligned}$$

となる．

定理 4.14　$X_n \xrightarrow{d} X$ となるための必要十分条件は，すべての有界連続な関数 f に対し，

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$$

が成立することである．

証明　どんな x に対しても，ある $A > 0$ が存在して $|f(x)| \le A$ とできる．また，どんな $\epsilon > 0$ に対しても，ある $B > 0$ とある正の整数 n_0 が存在して，どんな $n \ge n_0$ に対しても $P(|X_n| \ge B) \le \epsilon/(3A)$ ともできる．h を実数値関数とし，$0 \le h(x) \le 1$ でかつ

$$h(x) = \begin{cases} 0 & (\,|x| > B+1\,) \\ 1 & (\,|x| \le B+1\,) \end{cases}$$

を満足するものとする．このとき，

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| &\le |\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X_n)h(X_n)]| \\ &\quad + |\mathbb{E}[f(X_n)h(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)h(X)]| + |\mathbb{E}[f(X)h(X)] - \mathbb{E}[f(X)]| \\ &\le \frac{\epsilon}{3} + |\mathbb{E}[f(X_n)h(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)h(X)]|\end{aligned}$$

となる．したがって，コンパクトな台 I をもつ連続関数 g に対して，

$$|\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[g(X)]| < \frac{\epsilon}{3}$$

が成立することを示せばよい．I はコンパクトで，g は一様連続なので，有限個の矩形領域 I_j でその上での g の変動が $\epsilon/12$ 以下になり，$I \subset \cup_j I_j$ とできる．それぞれの I_j から一点 x_j を取り出し，$g_\epsilon(x) = \sum_j g(x_j)\mathbb{I}_{I_j}(x)$ とする．すると，

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[g_\epsilon(X_n)]| &\le \frac{\epsilon}{12} + \mathbb{P}(X_n \notin I) \le \frac{\epsilon}{6} \\ |\mathbb{E}[g(X)] - \mathbb{E}[g_\epsilon(X)]| &\le \frac{\epsilon}{12} + \mathbb{P}(X \notin I) \le \frac{\epsilon}{6}\end{aligned}$$

となる$^{(4\text{-}8)}$．さらに，n を十分おおきくとれば，

$$|\mathbb{E}[g_\epsilon(X_n)] - \mathbb{E}[g_\epsilon(X)]| \le \sum_j |\mathbb{P}(X_n \in I_j) - \mathbb{P}(X \in I_j)||g(x_j) \le \frac{\epsilon}{6}$$

とできることからわかる． □

定理 4.15 $\{X_n\}_{n=1}^\infty$, X は確率変数とし，$g(x)$ を実数値連続関数とする．このとき，つぎが成立する．

$$X_n \xrightarrow{d} X \qquad \text{ならば，} \qquad g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$$

.

証明 定理 4.14 から任意の有界連続関数 f に対して，$n \to \infty$ のとき，

$$\mathbb{E}[f(g(X_n))] \to \mathbb{E}[f(g(X))]$$

を示せばよい．$f \circ g$ も有界連続関数であることと仮定より上の式は明らか． □

系 4.3 $\{X_n\}_{n=1}^\infty$, $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ は確率変数とし，$X_n \xrightarrow{d} c$ かつ $Y_n \xrightarrow{d} d$ とする．ただし，c, d は定数である．このとき，つぎが成立する．

(1) $X_n + Y_n \xrightarrow{d} c + d$.

(2) $X_n Y_n \xrightarrow{d} cd$.

証明 Slutzky の定理より明らか． □

定理 4.16 (デルタ法) $\{X_n\}_{n=1}^\infty$, Z は確率変数，θ を定数とする．$n \to \infty$ のとき，

$$\sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{d} Z$$

が成立すると仮定する．実数値関数 $g(x)$ は $x = \theta$ で微分可能で微係数 $\dot{g}(\theta)$ を持ち，$\dot{g}(\theta) \neq 0$ ならば，

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) \xrightarrow{d} \dot{g}(\theta)Z$$

が成立する．

証明　まず，仮定と定理 4.12 から

$$X_n - \theta = \frac{1}{\sqrt{n}} a_n (X_n - \theta) \xrightarrow{d} 0$$

となる．さらに，注意 4.3 から $X_n - \theta \xrightarrow{P} 0$ となる．ここで $g(X_n)$ を $X_n = \theta$ のまわりでテーラー展開する：

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) = \dot{g}(\theta)\sqrt{n}(X_n - \theta) + \sqrt{n}\mathrm{Rem} \tag{4.17}$$

ここで

$$\lim_{X_n \to \theta} \frac{\mathrm{Rem}}{|X_n - \theta|} = 0$$

である．これと仮定から

$$\frac{\mathrm{Rem}}{|X_n - \theta|} \xrightarrow{P} 0$$

となる．また，$\sqrt{n}(X_n - \theta)$ は分布収束することと上のことに注意して，再度定理 4.14 を用いると

$$\sqrt{n}\mathrm{Rem} = \sqrt{n}(X_n - \theta)\frac{\mathrm{Rem}}{|X_n - \theta|} \xrightarrow{d} 0$$

となり，注意 4.3 から $\sqrt{n}\mathrm{Rem} \xrightarrow{P} 0$ を得る．(4.17) に定理 4.14 を適用すれば定理は証明される． □

例 4.7　$\sqrt{n}(X_n - \mu) \xrightarrow{d} X$ とし，X は正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従うとする．ここで，$\mu \neq 0, \sigma^2 > 0$ を仮定する．このとき，

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{X_n} - \frac{1}{\mu}\right) \xrightarrow{d} -\frac{1}{\mu^2}X$$

となる．さらに，正規分布の性質から $-(1/\mu^2)X$ は正規分布 $N(0, \sigma^2/\mu^4)$ に従うことがわかる．