·····2.2·····

指数分布族

P_θ を $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ 上の確率測度とし，$\{P_\theta : \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^l\}$ を確率分布族とする．また，$\lambda(x)$ を $\mathcal{X}$ 上の確率測度とする．

定義 2.1 確率測度族 $\{P_\theta : \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^l\}$ が k 母数指数分布族であるとは，Θ 上の関数 $\eta_1(\theta), \eta_2(\theta), \ldots, \eta_k(\theta)$ と $\tilde{A}(\theta)$，および $\mathcal{X}$ 上の関数 $T_1(\boldsymbol{x}), T_2(\boldsymbol{x}), \ldots, T_k(\boldsymbol{x})$ と $S(\boldsymbol{x})$) が存在して，P_θ の ($\mathbb{R}^n$ 上の測度 $\lambda(\boldsymbol{x})$ に関する) 確率密度関数 $p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})$ がつぎで与えられるとき，k 母数指数分布族になるという．

$$p(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\theta}) = S(\boldsymbol{x}) \exp\left[\sum_{i=1}^{k} \eta_i(\theta) T_i(\boldsymbol{x}) - \tilde{A}(\theta)\right] I_B(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

と書けることをいう．ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B$ とし，B は未知の母数 $\boldsymbol{\theta}$ に依存しないとする．

例 2.2 ：X は母数 n と未知の母数 θ の 2 項分布にしたがうとする．すなわち，X の確率関数は

$$p(x|\theta) = \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} \theta^x (1-\theta)^{1-x}$$

で与えられる．ただし，$x \in B = \{0, 1, \ldots, n\}$ である．これは

$$p(x|\theta) = \exp\left[\log\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right) x + n\log(1-\theta) + \log\begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix}\right]$$

となり，1 母数指数分布族となる．

例 2.3 ：$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を未知の母数 (α, β) を持つガンマ分布からのランダム標本とする．ただし，$\alpha > 0, \beta > 0$ である．すなわち，その確率密度関数

$$p(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} \exp(-\beta x)}{\Gamma(\alpha)}, \qquad x \in (0, \infty)$$

からのランダム標本である．ただし，

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

である．このとき，$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ の同時確率密度関数は

$$p(\boldsymbol{x}|\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\beta^\alpha x_i^{\alpha-1}\exp(-\beta x_i)}{\Gamma(\alpha)}\right]$$
$$= \exp\left[(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log x_i - \beta\sum_{i=1}^{n}x_i + n\alpha\log\beta - n\log\Gamma(\alpha)\right]$$

となる．ただし，$B = (0, \infty)^n$ である．したがって，$\boldsymbol{X}$ の確率密度関数は 2 母数指数分布族となる．

例 2.4 ：$P_\theta = N(\mu, \sigma^2), \theta \in \Theta$ である．ただし，

$$\Theta = \{(\mu, \sigma^2) : -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0\}$$

である．P_θ の確率密度関数は

$$p(\boldsymbol{x}) = \exp\left[\frac{\mu}{\sigma^2}x - \frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \log(2\pi\sigma^2)\right)\right]$$

である．したがって，正規分布族は 2 母数指数分布族である．すなわち，(2.1) において

$$\begin{array}{llll} n = 1, & \theta_1 = \mu, & \theta_2 = \sigma^2, & \eta_1(\theta) = \frac{\mu}{\sigma^2}, \quad T_1(x) = x, \\ \eta_2(\theta) = -\frac{1}{2\sigma^2}, & T_2(x) = x^2, & B(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} + \log(2\pi\sigma^2)\right), & S(x) = 1 \end{array}$$

である．

指数分布族が $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)'$ で添え字つけられているとしよう．$\boldsymbol{T}$ と S で生成される指数分布族を

$$f(\boldsymbol{x}|\eta) = S(x)\exp[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\eta - A(\eta)], \qquad \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \tag{2.2}$$

と書くことにする．ただし，

$$A(\eta) = \begin{cases} \log\{\int[S(\boldsymbol{x})\exp\{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})'\eta\}]\,d\mu(\boldsymbol{x})\} & (\text{ 連続型 }) \\ \log\{\sum_x[S(\boldsymbol{x})\exp\{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})'\eta\}]\} & (\text{ 離散型 }) \end{cases}$$

である．このモデルの自然母数空間を

$$\mathcal{E} = \{\eta \in \mathbb{R}^k : -\infty < A(\eta) < \infty\}$$

で定義する．これを正準 k 指数分布族という．

例 2.5 (正規分布族の続き)

$$\begin{array}{ll} k = 2, & \boldsymbol{T} = (T_2(\boldsymbol{x}), T_2(\boldsymbol{x}))' = (x, x^2), \quad \eta_1 = \mu/\sigma^2, \\ \eta_2 = -1/(2\sigma^2) & A(\eta) = \frac{1}{2}\left[-\frac{\eta_1^2}{2\eta_2} + \log\left(\frac{\pi}{-\eta_2}\right)\right] \end{array}$$

である．したがって，

$$\mathcal{E} = \{(\eta_1, \eta_2) : -\infty < \eta_1 < \infty, -\infty < \eta_2 < 0\}$$

である．

例 2.6 (線形回帰モデル) $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ は互いに独立で各 Y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ は $N(\beta_1 + z_i\beta_2, \sigma^2)$ に従うとする．$z_1, z_2, \ldots, z_n$ は説明変数という．$\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ の同時確率密度関数は

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{y}|\,\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}\Pi_{i=1}^n \exp\left[-\frac{(y_i-\beta_1-z_i\beta_2)^2}{2\sigma^2}\right] \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n y_i^2 + \frac{\beta_1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n y_i + \frac{\beta_2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n z_i y_i - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n(\beta_1+z_i\beta_2)^2 - \frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2)\right] \end{aligned}$$

である．ただし，$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ である．これより

$$\begin{array}{llll} k = 3, & \boldsymbol{T}(\boldsymbol{Y}) = (\sum_{i=1}^n Y_i,\, \sum_{i=1}^n Y_i^2,\, \sum_{i=1}^n z_i Y_i)', & \eta_1 = \frac{\beta_1}{\sigma^2} & \eta_2 = \frac{\beta_2}{\sigma^2}, \\ \eta_3 = -\frac{1}{(2\sigma^2)} & A(\eta) = -\frac{n}{4\eta_3}\left[\eta_1^2 + \hat{m}_2\eta_2^2 + \bar{z}\eta_1\eta_2 + 2\log\left(\frac{\pi}{-\eta_3}\right)\right] & & \end{array}$$

となる．ただし，$\bar{z} = (1/n)\sum_{i=1}^n z_i$, $\hat{m}_2 = n^{-1}\sum_{i=1}^n z_i^2$ である．したがって，

$$\mathcal{E} = \{(\eta_1, \eta_2, \eta_3) : -\infty < \eta_1 < \infty, -\infty < \eta_2 < \infty, -\infty < \eta_3 < 0\}$$

である．

2.2.1 指数分布族の性質

$\boldsymbol{T}$ の積率簿関数を

$$M_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{s}) = \mathbb{E}[e^{\boldsymbol{s}'\boldsymbol{T}}]$$

とかく．ただし，$\boldsymbol{s}' = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ である．また，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\boldsymbol{T}] &= (\mathbb{E}(T_1), \mathbb{E}(T_2), \ldots, \mathbb{E}(T_k))' \\ \mathbb{VAR}[\boldsymbol{T}] &= \begin{bmatrix} \mathbb{COV}(T_1, T_1) & \mathbb{COV}(T_1, T_2) & \ldots & \mathbb{COV}(T_1, T_k) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbb{COV}(T_k, T_1) & \mathbb{COV}(T_k, T_2) & \ldots & \mathbb{COV}(T_k, T_k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と書く．

定理 2.1 $\mathcal{P}$ を (2.2) で与えらる正準 k 母数指数分布族とする．このとき，
(i) $\mathcal{E}$ は convex である．
(ii) $A : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ は convex である．
(iii) $\mathcal{E}$ は $\mathbb{R}^k$ の空でない内部集合を含み，$\boldsymbol{\eta}$ を $\mathcal{E}$ の内点とすれば，$\boldsymbol{\eta}$ のもとで $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$ の積率母数関数は，$\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{s} \in \mathcal{E}$ なるすべての $\boldsymbol{s}$ に対して

$$M_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{s}) = \exp\{A(\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{s}) - A(\boldsymbol{\eta})\}$$

で与えらる．$\boldsymbol{\eta}$ は $\mathcal{E}$ の内部なので，$\{\boldsymbol{s} : \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{s} \in \mathcal{E}\}$ は原点を含むある球を含む．

証明：まず，(ii) を示す．$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in \mathcal{E}$ と $0 < \alpha < 1$ を取る．Hölder の不等式を用いる：$u(\boldsymbol{x}), v(\boldsymbol{x}), h(\boldsymbol{x}) \geq 0$, r, $s > 0$, $1/r + 1/s = 1$ に対して

$$\int u(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \leq \left\{\int u^r(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\right\}^{1/r}\left\{\int v^s(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\right\}^{1/s}$$

ここで

$$\frac{1}{r} = \alpha, \quad \frac{1}{s} = 1-\alpha, \quad u(\boldsymbol{x}) = \exp[\alpha\boldsymbol{\eta}_1'\boldsymbol{T}], \quad v(\boldsymbol{x}) = \exp[(1-\alpha)\boldsymbol{\eta}_2'\boldsymbol{T}], \quad h(\boldsymbol{x}) = S(\boldsymbol{x})$$

とおき，Hólder の不等式の両辺に対数をとれば，

$$A(\alpha\boldsymbol{\eta}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{\eta}_2)) \leq \alpha A(\boldsymbol{\eta}_1) + (1-\alpha)A(\boldsymbol{\eta}_2) \tag{2.3}$$

より (ii) は示せた．

また，$\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in \mathcal{E}$ ならば，(2.3) より $\alpha\boldsymbol{\eta}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{\eta}_2 \in \mathcal{E}$ となる．また，すべての $\boldsymbol{\eta}$ に対して $\int \exp(\boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{T}(x))S(x)\,dx > 0$ より $\log\mathbb{E}[S(\boldsymbol{X})\exp\{\boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})] > \infty$ となり，(i) も示せた．

連続型の場合について (iii) を示そう．

$$\begin{aligned}
M_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{s}) &= \mathbb{E}[\exp\{\boldsymbol{s}'\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})\}] \\
&= \int\cdots\int \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})\exp\{(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) - A(\boldsymbol{\eta})\}\,dx_1\cdots d\boldsymbol{x}_q \\
&= \exp[A(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\eta}) - A(\boldsymbol{\eta})]\int\cdots\int \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})\exp\{(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) - A(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\eta})\}\,dx_1\cdots dx_q \\
&= \exp[A(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\eta}) - A(\boldsymbol{\eta})]
\end{aligned}$$

□

系 2.1 ：$\mathcal{E}$ は $\mathbb{R}^k$ の空でない内部集合を含み，$\boldsymbol{\eta}$ を $\mathcal{E}$ の内点とする．このとき

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\boldsymbol{\eta}}[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})] &= \dot{A}(\boldsymbol{\eta}) \\
\mathbb{VAR}_{\boldsymbol{\eta}}[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})] &= \ddot{A}(\boldsymbol{\eta})
\end{aligned}$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned}
\dot{A}(\boldsymbol{\eta}) &= \left(\frac{\partial A}{\partial\eta_1}(\boldsymbol{\eta}), \cdots, \frac{\partial A}{\partial\eta_k}(\boldsymbol{\eta})\right)' \\
\ddot{A}(\boldsymbol{\eta}) &= \left(\frac{\partial^2 A}{\partial\eta_i\partial\eta_j}(\boldsymbol{\eta})\right)_{i=1,2,\ldots,k,\, j=1,2,\ldots,k} \\
\boldsymbol{\eta} &= (\eta_1, \ldots, \eta_k)'
\end{aligned}$$

である．

証明：定理 2.1 (iii) と積率母関数の性質

$$\mathbb{E}[T_j(\boldsymbol{X})] = M_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{s})\frac{\partial}{\partial s_j}A(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\eta})\Big|_{\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}} = \frac{\partial}{\partial s_j}A(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\eta})\Big|_{\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}}, \qquad j=1,\,2\,\ldots,\,k$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_j(\boldsymbol{X})T_i(\boldsymbol{X})] &= \left[M_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{s})\frac{\partial^2}{\partial s_j\partial s_i}A(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\eta}) + M_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{s})\frac{\partial}{\partial s_j}A(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\eta})M_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{s})\frac{\partial}{\partial s_j}A(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\eta})\right]_{\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}} \\ &= \left[\frac{\partial^2}{\partial s_j\partial s_i}A(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\eta}) + \frac{\partial}{\partial s_j}A(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\eta})\frac{\partial}{\partial s_j}A(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\eta})\right]_{\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}}, \qquad i,\,j=1,\,2\,\ldots,\,k\end{aligned}$$

□

例 2.7　可能な結果が k 個のカテゴリーの実験の n 回の独立試行を考える．結果に対応する確率ベクトルを $\boldsymbol{X}=(X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n)$ とおく．ただし，$X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n$ は独立同一の確率変数列で，各 $X_i,\,i=1,\,2,\,\ldots,\,n,$ は k 個のカテゴリー $\{1,\,2,\,\ldots,\,k\}$ のどれかをとるものとする．いま,

$$T_j(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} 1\{X_i=j\},\, \lambda_j = \mathbb{P}(X_1=j), \qquad j=1,\,2,\,\ldots,\,k$$

とおく．

このとき，確率関数は

$$p(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\lambda}) = \Pi_{j=1}^{k}\lambda_j^{T_j(\boldsymbol{x})}, \qquad \boldsymbol{\lambda}\in\Lambda$$

と書ける．ただし，

$$\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\,\lambda_2,\,\ldots,\,\lambda_k)\in\mathbb{R}^k:\,0<\lambda_j<1,\,\sum_{j=1}^{k}\lambda_j=1,\,j=1,\,2,\,\ldots,\,k\}$$

とする．制限なしの母数空間を考える．そのために

$$\lambda_j = \frac{e^{\alpha_j}}{\sum_{j=1}^{k}e^{\alpha_j}}, \qquad j=1,\,2,\,\ldots,\,k, \qquad \boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_k)'\in\mathbb{R}^k$$

とおく．

このとき，確率関数は

$$p_1(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\alpha}) = \exp\Bigl\{\sum_{j=1}^{k}\alpha_jT_j(\boldsymbol{x}) - n\log\sum_{j=1}^{k}e^{\alpha_j}\Bigr\}$$

となる．しかし，この母数化は認定不可能性を持つので，さらに

$$\boldsymbol{T}_{(k-1)}(\boldsymbol{x}) = (T_1(\boldsymbol{x}),\,T_2(\boldsymbol{x}),\,\ldots,T_{k-1}(\boldsymbol{x}))', \qquad \eta_j=\log\frac{\lambda_j}{\lambda_k}=\alpha_j-\alpha_k, \qquad j=1,\,2,\,\ldots,k-1$$

とおく．$\sum_{i=1}^{k}T_i(\boldsymbol{x})=n$ と $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$ に注意すれば，確率関数は

$$p_2(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\eta}) = \exp\Bigl\{\boldsymbol{T}'_{(k-1)}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\eta} - n\log(1+\sum_{j=1}^{k-1}e^{\eta_j})\Bigr\}$$

となる．ただし，

$$\boldsymbol{\eta} = (\eta_1,\, \eta_2,\, \ldots\,,\, \eta_{k-1}), \qquad \lambda_j = \frac{e^{\eta_j}}{1+\sum_{j=1}^{k-1} e^{\eta_j}} = \frac{e^{\alpha_j}}{\sum_{j=1}^{k} e^{\alpha_j}}, \qquad j = 1,\, 2,\, \ldots\,,\, k-1$$

である．したがって，$p_2(\boldsymbol{x}|\,\boldsymbol{\eta})$ は $T_{(k-1)}(\boldsymbol{x})$ と $S(\boldsymbol{x})$ で生成される $k-1$ 母数指数分布族で，自然母数空間は $\mathcal{E} = \mathbb{R}^{k-1}$ となる．

　また，

$$A(\boldsymbol{\eta}) = n \log(1 + \sum_{j=1}^{k-1} e^{\eta_j})$$

に注意して，系 2.1 を用いれば，

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\eta}} T_j(\boldsymbol{X}) = \frac{\partial A}{\partial \eta_j} = n \frac{e^{\eta_j}}{1+\sum_{j=1}^{k-1} e^{\eta_j}} = n\lambda_j, \quad j = 1,\, 2,\, \ldots\,,\, k-1$$

となる．さらに，$1 \le j_1,\, j_2 \le k-1 (j_1 \neq j_2)$ に対し，

$$\mathbb{COV}_{\boldsymbol{\eta}}(T_{j_1}(\boldsymbol{X}),\, T_{j_2}(\boldsymbol{X})) = \frac{\partial^2 A}{\partial \eta_{j_1} \partial \eta_{j=2}} = -\frac{e^{\eta_{j_1}} e^{\eta_{j_2}}}{\{1+\sum_{j=1}^{k-1} e^{\eta_j}\}^2} = -n\lambda_{j_1}\lambda_{j_2},$$

$$\mathbb{VAR}_{\boldsymbol{\eta}}[T_{j_1}(\boldsymbol{X})] = \frac{\partial^2 A}{\partial \eta_{j_1}^2} = n \left[\frac{e^{\eta_{j_1}}}{1+\sum_{j=1}^{k-1} e^{\eta_j}} - \frac{e^{\eta_{j_1}^2}}{\{1+\sum_{j=1}^{k-1} e^{\eta_j}\}^2} \right] = n\lambda_{j_1}(1-\lambda_{j_1})$$

となる．最後に，$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\eta}}[T_k(\boldsymbol{X})]$, $\mathbb{COV}_{\boldsymbol{\eta}}(T_j(\boldsymbol{X}),\, T_k(\boldsymbol{X}))$, $j = 1,\, 2,\, \ldots\,,\, k-1$, $\mathbb{VAR}_{\boldsymbol{\eta}}[T_k(\boldsymbol{X})]$ を求める．これらは，$\sum_{j=1}^{k} T_j(\boldsymbol{X}) = n$ と $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$ を注意すれば，

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\eta}}[T_k(\boldsymbol{X})] = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\eta}}[n - \sum_{j=1}^{k-1} T_j(\boldsymbol{X})] = n(1 - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j) = n\lambda_k$$

と

$$\begin{aligned}
\mathbb{COV}_{\boldsymbol{\eta}}(T_j(\boldsymbol{X}),\, T_k(\boldsymbol{X})) &= \mathbb{COV}_{\boldsymbol{\eta}}(T_j(\boldsymbol{X}),\, n - \sum_{i=1}^{k-1} T_i(\boldsymbol{X})) \\
&= -\sum_{i\neq j}^{k-1} \mathbb{COV}_{\boldsymbol{\eta}}(T_j(\boldsymbol{X}),\, T_i(\boldsymbol{X})) + \mathbb{VAR}_{\boldsymbol{\eta}}[T_j(\boldsymbol{X})] \\
&= n\big[\sum_{i\neq j}^{k-1} \lambda_j\lambda_i - \lambda_j(1-\lambda_j)\big] \\
&= -n\lambda_j\big[1 - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i\big] = -n\lambda_j\lambda_k
\end{aligned}$$

となることがからわかる．また，$T_k(\boldsymbol{X})$ の分散は

$$
\begin{aligned}
\mathbb{VAR}_{\boldsymbol{\eta}}(T_k(\boldsymbol{X})) &= \mathbb{COV}_{\boldsymbol{\eta}}(T_k(\boldsymbol{X}),\, T_k(\boldsymbol{X})) \\
&= \mathbb{COV}_{\boldsymbol{\eta}}(T_k(\boldsymbol{X}),\, n - \sum_{i=1}^{k-1} T_i(\boldsymbol{X})) \\
&= -\sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{COV}_{\boldsymbol{\eta}}(T_k(\boldsymbol{X}),\, T_i(\boldsymbol{X})) \\
&= n\lambda_k \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_j = n\lambda_k(1-\lambda_k)
\end{aligned}
$$

よりわかる．

指数分布族の階数（rank）

指数分布族の階数が k であるとは，指数分布族 (2.2) を生成する $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ は k - 次元で，$1,\, T_1(\boldsymbol{x}),\, T_2(\boldsymbol{x}),\, \ldots,\, T_k(\boldsymbol{x})$ は正の確率で線形独立であることをいう．すなわち，すべてのスカラー $a_j,\ j = 1,\, 2,\, \ldots,\, k+1,$ がゼロでないとき，$P_{\boldsymbol{\eta}}(\sum_{j=1}^{k} a_j T_j(\boldsymbol{x}) = a_{k+1}) < 1$ となる．

定理 2.2 $\mathcal{P} = \{p(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{E}\}$ は (2.2) で与えられる k 母数指数分布族とし，自然母数空間 $\mathcal{E}$ は集合とする．このとき，次は同値である．

(i) $\mathcal{P}$ の階数は k

(ii) $\boldsymbol{\eta}$ は認定可能な母数

(iii) $\mathbb{VAR}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{T})$ は正定値

(iv) $\boldsymbol{\eta} \to \dot{A}(\boldsymbol{\eta})$ は $\mathcal{E}$ 上で 1 対 1

(v) A は $\mathcal{E}$ 上で厳密に凸

証明[1]: <u>(iii) ⇒ (i)</u>　(i) が成立しないと仮定する．すると，ある $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ と c が存在して，ある $\boldsymbol{\eta}$ に対し，

$$\mathbb{P}_{\boldsymbol{\eta}}[\boldsymbol{a}'\boldsymbol{T} = c] = 1$$

が成立する．これより

$$\boldsymbol{a}'\mathbb{VAR}_{\boldsymbol{\eta}}[\boldsymbol{T}]\boldsymbol{a} = \mathbb{VAR}_{\boldsymbol{\eta}}[\boldsymbol{a}'\boldsymbol{T}] = 0$$

となる．したがって，$\mathbb{VAR}_{\boldsymbol{\eta}}[T]$ は正定値でなるなる．よって，(iii) ⇒ (i) は示された．

<u>(i) ⇒ (iii)</u>　(iii) が成立しないと仮定する．ある $\boldsymbol{\eta}$ において，ある $\boldsymbol{a}$ と c が存在して，

$$0 = \boldsymbol{a}'\mathbb{VAR}_{\boldsymbol{\eta}}[\boldsymbol{T}]\boldsymbol{a} = \mathbb{VAR}_{\boldsymbol{\eta}}[\boldsymbol{a}'\boldsymbol{T}]$$

となり，

$$\mathbb{P}_{\boldsymbol{\eta}}[\boldsymbol{a}'\boldsymbol{T} = c] = 1$$

[1] 証明は不完全：(i) ⇔ (iii)，(i) ⇒ (ii)，(iii) ⇒ (iv) と (iii) ⇒ (v)　のみ示した．

となり，(i) $\Rightarrow$ (iii) は示せた．
<u>(i) $\Rightarrow$ (ii)</u>　まず，$k=1$ の場合に示す．(ii) が成立しないと仮定するとある $\eta_1 \neq \eta_2$ が存在し，$\mathbb{P}_{\eta_1} = \mathbb{P}_{\eta_2}$ をみたす．これは

$$\exp\{\eta_1 T(\boldsymbol{x}) - A(\eta_1)\}S(\boldsymbol{x}) = \exp\{\eta_2 T(\boldsymbol{x}) - A(\eta_2)\}S(\boldsymbol{x})$$

となり，両辺に対数をとれば，

$$(\eta_1 - \eta_2)T(\boldsymbol{x}) = A(\eta_2) - A(\eta_1)$$

となり，$1, T(\boldsymbol{x})$ は 1 次独立でなくなる．つぎに，$k>1$ の場合を考える．同様に，(ii) が成立しないと仮定するとある．このとき，$\boldsymbol{\eta}_1 \neq \boldsymbol{\eta}_2$ が存在し，$\mathbb{P}_{\boldsymbol{\eta}_1} = \mathbb{P}_{\boldsymbol{\eta}_2}$ をみたす．

$$\mathcal{Q} = \{P_{\boldsymbol{\eta}_1 + c(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1)} : \boldsymbol{\eta}_1 + c(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1) \in \mathcal{E}\}$$

とおくと $\mathcal{Q}$ は $(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1)'\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}$ で生成される 1 母数指数分布族になる．$c_1 = 1$ と $c_2 = 0$ のとき，ふたつの分布は一致するので，$k=1$ の議論を用いることができる．よって，$(c_1 - c_2)(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1)'\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ は定数となり，$1, T_1(\boldsymbol{x}), T_2(\boldsymbol{x}), \ldots, T_k(\boldsymbol{x})$ は 1 次独立でなくなる．
<u>(iii) $\Rightarrow$ (iv) と (v)</u>　系 2.1 より $\ddot{A}(\boldsymbol{\eta})$ は正定値となる．したがって，$\dot{A}(\boldsymbol{\eta})$ は狭義単調増加となり，(iv) が示せた．
<u>(iv) $\Rightarrow$ (iii)</u> □