1

確率分布と確率変数

·····1.1·····

確率測度

定義 1.1　標本空間 S の部分集合の集まりでつぎをみたすものを σ 集合体といい，$\mathcal{B}$ と記す．

(i) $\emptyset \in \mathcal{B}$
(ii) $A \in \mathcal{B}$ ならば $A^c \in \mathcal{B}$
(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}$ ならば $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}$

定義 1.2　空でない標本空間 S とその σ 集合体 $\mathcal{B}$ があって，$\mathcal{B}$ 上の実数値集合関数 P がつぎをみたすとき，P を S 上の確率測度（または単に確率）という．

(i) すべての $A \in \mathcal{B}$ に対して，$P(A) \geq 0$
(ii) $P(S) = 1$
(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}, A_i \cap A_j = \emptyset\,(i \neq j)$ ならば $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

$(S, \mathcal{B}, P)$ を確率空間とよぶ．

<u>確率の基本性質</u>

(i) $P(\emptyset) = 0$
(ii) すべての $A \in \mathcal{B}$ に対して $P(A) \leq 1$
(iii) すべての $A \in \mathcal{B}$ に対して $P(A^c) = 1 - P(A)$
(iv) すべての $A, B \in \mathcal{B}$ に対して $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$
(v) すべての $A, B \in \mathcal{B}$ に対して $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
(vi) $A \subset B$ ならば $P(A) \leq P(B)$
(vii) $C_1, C_2, \ldots \in \mathcal{B}, C_i \cap C_j\,(i \neq j), S = \cup_{i=1}^{\infty} C_i$ のとき，$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap C_i)$
(viii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}$ に対して $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$
(ix) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}, A_i \subset A_{i+1}\,(i = 1, 2, \ldots)$ ならば

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$$

(x) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}, A_i \supset A_{i+1}\,(i = 1, 2, \ldots)$ ならば

$$P(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$$

定義 1.3　S 上のボレル集合族とは，S の開集合の族を含む最小の σ 集合体である．これを $\mathcal{B}(S)$ と記す．

·····1.2·····

確率変数と累積分布関数

定義 1.4　確率空間 $(S, \mathcal{B}, P)$ 上において，写像 $X : S \to \mathbb{R}$ が任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$X^{-1}((-\infty, x]) = \{s \in S : X(s) \in (-\infty, x]\} \in \mathcal{B}$$

をみたすならば，X は（実）確率変数という．

定義 1.5　確率空間 $(S, \mathcal{B}, P)$ 上の確率変数 X について

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(s \in S : X(s) \in (-\infty, x]), \qquad x \in \mathbb{R}$$

によって定義される $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 F_X を確率変数 X の累積分布関数という．

分布関数の性質

(i) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ かつ $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$
(ii) $F_X(x)$ は x の非減少関数
(iii) $F_X(x)$ は右連続関数 ：すなわち，すべての x_0 に対して $\lim_{x\downarrow x_0} F_X(x) = F(x_0)$

定義 1.6　確率空間 $(S, \mathcal{B}, P)$ 上のふたつの確率変数 X, Y が同一分布に従うとは，すべての $\mathbb{R}$ 上の任意のボレル集合 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して $P(X \in A) = P(Y \in B)$ が成り立つことである．

定理 1.1　つぎのふたつは同値である．

(i) 確率変数 X, Y が同一分布に従う
(ii) すべての $x \in \mathbb{R}$ に対し，$F_X(x) = F_Y(x)$

定義 1.7　確率変数 X が連続型であるとは，X の分布関数 $F_X(x)$ が x の連続関数であることである．確率変数 X が離散型であるとは，X の分布関数 $F_X(x)$ が x の階段関数であることである．

定義 1.8　確率空間 $(S, \mathcal{B}, P)$ 上の離散型確率変数 X の確率関数を

$$f_X(x) = P(X = x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

定義 1.9　確率空間 $(S, \mathcal{B}, P)$ 上の連続型確率変数 X の確率密度関数 $f_X(x)$ は

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

をみたすものである．

定義 1.10　確率変数 X についてある実数 m が

$$\mathbb{P}(X \leq m) \geq \frac{1}{2} \qquad \text{および} \qquad \mathbb{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$$

をみたすならば，m を X の中央値 (median) という．

確率関数と確率密度関数の性質

(i) ${}^{\forall}x \in \mathbb{R}$ に対し $f_X(x) \geq 0$
(ii) $\sum_x f_X(x) = 1$ (離散型) または $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ (連続型)

……1.3……

期待値

定義 1.11　　X を確率変数とし，g を実数値関数とする．このとき，$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|f_X(x)\,dx<\infty$($X$ が連続型) もしくは $\sum_x|g(x)|f_X(x)<\infty$($X$ が離散型) が満たされるとき，$g(X)$ の期待値は存在するといい，$g(X)$ の期待値を

$$\mathbb{E}[g(X)]=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f_X(x)\,dx & X\text{ が連続型}\\ \sum_x g(x)f_X(x) & X\text{ が離散型}\end{cases}$$

で定義する．

<u>期待値の基本的な性質</u>

(i) $\mathbb{E}[ag_1(X)+a_2g_2(X)]=a_1\mathbb{E}[g_1(X)]+a_2\mathbb{E}[g_2(X)]$．ただし，$a_1$, a_2 は定数.

(ii) すべての x に対し，$g(x)\geq 0$ ならば，$\mathbb{E}[g(X)]\geq 0$

(iii) すべての x に対し，$g_1(x)\geq g_2(x)$ ならば，$\mathbb{E}[g_1(X)]\geq\mathbb{E}[g_2(X)]$

(iv) すべての x に対し，$a_1\leq g(x)\leq a_2$ ならば，$a_1\leq\mathbb{E}[g(X)]\leq a_2$.