

Copula modeling to intra-class covariance structures *

今野 良彦 (KONNO Yoshihiko) †

大阪公立大学

*

2026 共同研究集会「コピュラ理論の新展開」(2026 年 6 月 24 日-25 日)

統計数理研究所/会議室 2 (2 階)

本研究は JSPS 科研費 (課題番号 24KK0059) の助成を受けたものである.

†

email: konno@fc.jwu.ac.jp

homepage: <https://mcm-www.jwu.ac.jp/konno/english.html>

❶ Intra-class covariance structure の説明

❶ 別名

- intraclass correlation structure.
- Exchangeable correlation model.
- Exchangeable covariance model.

❷ その拡張

- Permutation-symmetry covariance model
- Blocked compound symmetric covariance structure.

❷ Intra-class covariance structure の Copula-modelling.

- Durante and Semip (2016): PRINCIPLES OF COPULA THEORY, CRC Press.
- Hoff, Niu, and Wellner (2014): Bernoulli **20** 604–622.

Intra-class Covariance Structures(1)

- Intra-class Covariance Structure ($d \geq 3$):
多変量正規分布モデル: $N_d(\mathbf{0}_d, \Sigma)$. ここで

$$\begin{aligned}\Sigma &= \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \cdots & \rho & 1 \end{pmatrix} \\ &= \sigma^2 \left((1 - \rho) \mathbf{I}_d + \rho \mathbf{1}_d \mathbf{1}_d^\top \right).\end{aligned}$$

- $-\frac{1}{d-1} < \rho < 1$ と $\sigma > 0$ は未知.
- $\mathbf{1}_d = (1, 1, \dots, 1)^\top$, $\mathbf{I}_d$ は d 次の単位行列である.

多変量正規分布モデルにおける Intra-class Covariance Structures に対する 2 つのアプローチ:

- Linear covariance decompositions
(Anderson (1970), Jennrich *et al.* (1986), Jensen (1988)).
- Invariance induced by group actions (Andersson (1975), Graczyk *et al.* (2022)).

【理論の背景】 Euclidean Jordan 代数 (Faraut and Karányi (1994)) を用いて, 正值対称行列全体の成す空間を典型的な例にもつ対称錐を 統一的に記述できること.

置換群に関して不変な分散共分散行列の構造 (2)

- $V = \{1, 2, \dots, d\}$ を有限集合とする.
- $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)^\top \sim N_d(\mathbf{0}_d, \Sigma)$ とする.
- $\mathfrak{S}_d$ を V 上の対称群[‡] とする.
- $\Gamma \subset \mathfrak{S}_d$ を部分群.
- 中心化された多変量正規分布が Γ の作用に関して不変であるとは

$$\mathbf{G}\Sigma\mathbf{G}^\top = \Sigma \quad (\forall \mathbf{G} \in \Gamma)$$

をみたす[§] ときをいう.

[‡]

$\{1, 2, \dots, d\}$ 上のすべての置換からなる群.

[§]

V 上の置換と置換行列を同一視している.

置換群に関して不変な分散共分散行列の構造 (3)

- 交換可能性から 分散共分散行列 Σ とその逆行列 (精度行列) Σ^{-1} の両方に線型性が生じる.
- a doubly autoparallel family (Ohara *et al.* (2024)) とも呼ばれている.
- $\Gamma = \mathfrak{S}_d$ のとき, intra-class covariance structures.

Intra-class Covariance Structures(2)

実際

$$\begin{aligned}\frac{\Sigma}{\sigma^2} &= (1 - \rho)I_d + \rho \mathbf{1}_d \mathbf{1}_d^\top \\ &= (1 - \rho) \underbrace{\left(I_d - \frac{1}{d} \mathbf{1}_d \mathbf{1}_d^\top \right)}_{\text{射影行列}} + \{1 + (d - 1)\rho\} \underbrace{\left(\frac{1}{d} \mathbf{1}_d \mathbf{1}_d^\top \right)}_{\text{射影行列}}.\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Sigma}{\sigma^2} \right)^{-1} &= (1 - \rho)^{-1} \left(I_d - \frac{1}{d} \mathbf{1}_d \mathbf{1}_d^\top \right) \\ &\quad + \{1 + (d - 1)\rho\}^{-1} \left(\frac{1}{d} \mathbf{1}_d \mathbf{1}_d^\top \right).\end{aligned}$$

Intra-class Covariance Structures(3)

さらに, $d \times d$ の既知 $\mathbb{I}$ の直交行列 $\parallel$

$$\mathbf{O}^T = \left(\mathbf{1}_d, \underbrace{*, \dots, *}_{(d-1) \text{ 列}} \right)$$

により Σ を対角化できる.

$\mathbb{I}$

ρ と σ に依存しない行列.

$\parallel$

Helmert 行列とすればよい. たとえば, $d = 4$ のとき

$$\sqrt{4} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{4} & 1/\sqrt{4} & 1/\sqrt{4} & 1/\sqrt{4} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & -1/\sqrt{12} \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\frac{\mathbf{O}\Sigma\mathbf{O}^{\top}}{\sigma^2} = \text{diag}(1 + (d - 1)\rho, \underbrace{1 - \rho, \dots, 1 - \rho}_{(d - 1) \text{ 回}}).$$

ただし, $\text{diag}(\cdot)$ は $\mathbb{R}^d$ の成分を対角成分にもつ $d \times d$ の対角行列.

Copula modelling for intra-class covariance structures (1)

$N_d(\mathbf{0}_d, \Sigma_d)$ の copula density を求める. ただし

$$\begin{aligned}\Sigma &= (1 - \rho)I_d + \rho \mathbf{1}_d \mathbf{1}_d^\top \quad \left(-\frac{1}{d-1} < \rho < 1 \right) \\ &= (1 - \rho) \left(I_d - \frac{1}{d} \mathbf{1}_d \mathbf{1}_d^\top \right) + \{1 + (d-1)\rho\} \left(\frac{1}{d} \mathbf{1}_d \mathbf{1}_d^\top \right)\end{aligned}$$

である. そのために, 以下の記号を準備する.

- $\Phi_d(\cdot | \rho)$ と $\varphi_d(\cdot | \rho)$ を $N_d(\mathbf{0}_d, \Sigma_d)$ の c.d.f. と p.d.f. とする.
- $\Phi(\cdot)$ と $\varphi(\cdot)$ を $N(0, 1)$ の c.d.f. と p.d.f. とする.
- $\Phi^{(-1)}(u) = \begin{cases} \inf\{x \in \mathbb{R}; \Phi(x) \geq u\} & (0 < u \leq 1) \\ \inf\{x \in \mathbb{R}; \Phi(x) > 0\} & (u = 0) \end{cases}$.

Copula modelling for intra-class covariance sturctures (2)

Sklar の定理から

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_d) &= \Phi_d(\Phi^{(-1)}(u_1), \dots, \Phi^{(-1)}(u_d) | \rho) \\ &= \int_{-\infty}^{\Phi^{(-1)}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{(-1)}(u_2) - \rho_{1, \bullet} s_1} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{(-1)}(u_d) - \rho_{d-1, \bullet} \sum_{j=1}^{d-1} s_j} \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{s_1^2}{2}\right\} \prod_{k=2}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{k, \bullet}}} \exp\left\{-\frac{s_k^2}{2\sigma_{k, \bullet}}\right\} \\ &\quad \times ds_1 \dots ds_d. \end{aligned}$$

ただし, $k = 2, \dots, d$ に対して

$$\rho_{k-1, \bullet} = \frac{\rho}{1 + (k-2)\rho}, \quad \sigma_{k, \bullet} = 1 - \frac{k-1}{1 + (k-2)\rho} \rho^2.$$

Copula modelling for intra-class covariance sturctures (3)

$$\begin{aligned}
 c(u_1, \dots, u_d | \rho) &:= \frac{\partial^d}{\partial u_1 \cdots \partial u_d} \Phi_d(\Phi^{(-1)}(u_1), \dots, \Phi^{(-1)}(u_d) | \rho) \\
 &= \frac{\varphi_d(\Phi^{(-1)}(u_1), \dots, \Phi^{(-1)}(u_d) | \rho)}{\prod_{k=1}^d \varphi(\Phi^{(-1)}(u_k))} \\
 &= \text{const} \exp \left\{ \frac{2\rho}{(1-\rho)\{1+(d-1)\rho\}} \sum_{k < \ell} \Phi^{(-1)}(u_k) \Phi^{(-1)}(u_\ell) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(d-1)\rho^2}{(1-\rho)\{1+(d-1)\rho\}} \sum_{k=1}^d \{\Phi^{(-1)}(u_k)\}^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

ただし, $\text{const} = \frac{1}{\sqrt{(1-\rho)^{d-1} \{1+(d-1)\rho\}}}.$

- ❶ Intra-class structures covariance matrix の特徴を説明.
- ❷ Intra-class structures covariance の copula を具体的に記述.