中央大学 大学院 理工学研究科 数学専攻

統計数学特別講義第四

今野 良彦

大阪公立大学

2026 年 6 月 6 日

前回の講義の復習:

- P を $\mathbb{R}$ 上の確率測度
- $\mathcal{G}$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値関数の族
- $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathsf{P}$
- $\epsilon > 0$ に対して, $N_B(\epsilon, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(\mathsf{P})})$ をブラケット付きエントロピーとする. すなわち, $N := N_B(\epsilon, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(\mathsf{P})})$ としたとき, N は次の条件をみたす最小の整数とする. 関数の組 $\{(g_j^L, g_j^R)\}_{j=1}^N$ が存在して
    - すべての $j = 1, 2, \ldots, N$ に対して
    $$\|g_j^L - g_j^R\|_{L_p(\mathsf{P})} \leq \epsilon.$$
    - すべての $g \in \mathcal{G}$ に対して, ある $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ が存在して
    $$g_j^L(x) \leq g(x) \leq g_j^R(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$
    が成り立つ.
- $G(x) := \sup_{g \in \mathcal{G}} |g(x)|\ (x \in \mathbb{R})$.
- $H_B(\epsilon, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(\mathsf{P})}) := \log N_B(\epsilon, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(\mathsf{P})})$.

- 補題 6.18:

$$H_B(\epsilon, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(\mathsf{P})}) < \infty \ (\forall \epsilon > 0) \ \Rightarrow \ G \in L_1(\mathsf{P}).$$

- 定理 6.16:

$$H_B(\epsilon, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(\mathsf{P})}) < \infty \ (\forall \epsilon > 0) \ \Rightarrow \ \mathcal{G} \text{ は } \mathsf{P}\text{–GC 族}.$$

- 関数族 $\mathcal{G}$ は P–GC 族であるとは

$$\sup_{g \in \mathcal{G}} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} g(X_j) - \mathsf{E}[g(X)] \right| \xrightarrow{\text{a.s.}} 0 \qquad (n \to \infty)$$

をみたすことである.

本日の講義では, 関数族 $\mathcal{G}$ が P–GC 族であるための別の十分条件を求める.

前回の復習と本日の講義内容 (3)

- 対称化トリックと Dudley のエントロピー積分による GC 族の定理 (定理 6.20)
- 対称化トリック
- Dudley のエントロピー積分
- 定理 6.20 の証明
  - 素朴な証明
  - chaining argument を用いた証明

$\boxed{\text{定理 6.20}}$ P を $\mathbb{R}$ 上の確率測度, $\mathcal{G}$ を関数族, G をその封筒関数とする. $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathsf{P}$ に対して, $\widehat{\mathsf{P}}_n$ をこれらに基づく経験測度とする. すなわち

$$\widehat{\mathsf{P}}_n(B) = \frac{\#\{j \in \{1, 2, \ldots, n\};\ X_j \in B\}}{n} \qquad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

$G \in L_1(\mathsf{P})$ かつ, $\forall\delta > 0$ に対して

$$\frac{1}{n} H(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(\widehat{\mathsf{P}}_n)}) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \qquad (n \to \infty) \tag{1}$$

が成り立つとき, $\mathcal{G}$ は P-Glivenko-Cantelli 族である.

ただし, $\delta > 0$ に対して, $N(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(\widehat{\mathsf{P}}_n)})$ は $\mathcal{G}$ を被覆するために必要な δ 開球の個数の最小数である. また,
$H(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(\widehat{\mathsf{P}}_n)}) = log N(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(\widehat{\mathsf{P}}_n)})$ である.

定理 6.20 の証明の方針 この定理の証明の準備のための主張を述べた後に, 証明を与える. ここでは, 証明の道筋 ① と ② を解説する. ① は素朴な証明であり, ② は chaining argument を用いている.

① 素朴な証明. **Step 1**. 対称化トリックによって, 評価したい事象の確率を Rademacher 列を用いた表現で上限を与える. すなわち, 任意の $g \in \mathcal{G}$ と $\delta > 0$ に対して

$$\mathrm{Pr}\left(\left|\int g \, \mathrm{d}(\widehat{\mathrm{P}}_n - \mathrm{P})\right| > \frac{\delta}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \tag{2}$$

が成立すると

$$\mathrm{Pr}\left(\sup_{g \in \mathcal{G}} \left|g \, \mathrm{d}(\widehat{\mathrm{P}}_n - \mathrm{P})\right| > \delta\right) \leq 4\mathrm{Pr}\left(\sup_{g \in \mathcal{G}} \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j g(X_j)\right| > \frac{\delta}{4}\right) \tag{3}$$

が成立する. ただし, X_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ とは独立は $\{\epsilon_j\}_{j=1}^{n}$ は Rademacher 列である. なお, (2) は Chebyshev の不等式を用いることで簡単に確認できることを注意しておく.

定理 6.20 の証明の方針の続き **Step 2**. $\mathcal{G}$ を有限集合[1] としたとき, Hoeffding の不等式を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を条件付きにして, $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j g(X_j)$ に対して適用すると, $t > 0$ に対して

$$\Pr\left(\max_{g\in\mathcal{G}}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} g(X_j)\right| > K\sqrt{\frac{2(\log N + t)}{n}}\right) \le e^{-t} \tag{4}$$

と評価である. さらに, Chebyshev の不等式を用いて (2) が成立することが確認できる. このときから (3) と (4) を用いて

$$\Pr\left(\max_{g\in\mathcal{G}}\left|\int g\,\mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}_n - \mathsf{P})\right| > \frac{K}{4}\sqrt{\frac{2(\log N + t)}{n}}\right) \le 8\,e^{-t} \tag{5}$$

を示す. ただし, $N = \#(\mathcal{G})$ である.

[1] 関数族 $\mathcal{G}$ のとき, 任意の $\delta > 0$ に対して, 有限であるときは δ 網が存在する. この δ 網の有限個の中心に対して, ここで得られた結果を用いる.

定理 6.20 の証明の方針の続き **Step 3**. 定理 6.20 のエントロピー条件 (1) をみたす $\mathcal{G}$ に対して

$$\boldsymbol{G(x) := \sup_{g \in \mathcal{G}} |g(x)| \le K} \tag{6}$$

を仮定して, $\mathcal{G}$ が **P**-GC 族であることを証明する.
Step 4. $\mathcal{G}$ の封筒関数 $\boldsymbol{G}$ と $\boldsymbol{K > 0}$ に対して, $\boldsymbol{\mathcal{G}_K := \{g \mathbb{1}_{(-\infty, K]}(G)\}}$ と定める. すると Step 3 の議論から, $\mathcal{G}_K$ は **P**-GC 族であることがわかる. 任意の $\boldsymbol{\delta > 0}$ に対して, $\boldsymbol{G \in L_1(\mathrm{P})}$ だから, $\boldsymbol{K_0}$ をうまく取ると

$$\int_{G > K_0} G \, d\mathrm{P} < \delta$$

とでき, $\{G\mathbb{1}_{(-\infty, K]}(G)\} \bigcup \mathcal{G}_{K_0}$ も **P**-GC 族であることを利用して, (6) がなくとも $\mathcal{G}$ は **P**-GC 族であることを最後に示す.

定理 6.20 の証明の方針の続き

② **chaining argument と Dudley のエントロピー積分を用いる証明.**

Step 1. 劣 Gauss を仮定して, 最大不等式を求める.

Step 2. chaining argument を用いて, 任意の **2** の関数 $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ に対して, 劣 Gauss 性が成立するときに, **2** つの差の **sup** が Dudely 積分で上から評価できることを証明 (定理 **6.29**) する.

Step 3. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を条件付けして, $\sup_{g \in \mathcal{G}} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j g(X_j) \right|$ の期待値を Dudley のエントロピー積分を用いて上から評価する.

Step 4. Step 3 の評価を用いて, $\forall \delta > 0$ に対して

$$\frac{1}{n} H(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_2(\widehat{\mathbf{P}}_n)}) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \qquad (n \to \infty) \tag{7}$$

ならば, $\mathcal{G}$ は **P**-GC 族であることを示す.

定理 6.20 の説明 (5)

$\boxed{\text{定理 6.20 の証明の方針の続き}}$ **Step 5**. $K > 0$ と封筒関数に対して, $\mathcal{G}_K := \{g\mathbb{1}\{G \le K;\ g \in \mathcal{G}\}$ とおく. 関数族 $\mathcal{G}$ は, 定理 **??** の条件 (1) と条件 (6 をみたすとき, $\forall\delta > 0$ に対して

$$\frac{1}{n}H(\delta, \mathcal{G}_K, \|\cdot\|_{L_2(\widehat{\mathbf{P}}_n)}) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \qquad (n \to \infty)$$

であることを確認する. すると Step 4 の議論から $\mathcal{G}_K$ は **P**-GC 族であることがわかる.

Step 6. I の Step 4 と同じ議論により, 定理の証明を完成させる.

定理 6.20 の説明 (6)

$\boxed{\text{注意 6.21}}$ 以下の証明では, 定理の仮定のもと

$$\sup_{g \in \mathcal{G}} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} g(X_j) - \int g \, d\mathsf{P} \right| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \qquad (n \to \infty) \tag{8}$$

を証明する. すると (8) と逆マルチンゲールの収束定理の議論から

$$\sup_{g \in \mathcal{G}} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} g(X_j) - \int g \, d\mathsf{P} \right| \xrightarrow{\mathrm{a.s.}} 0 \qquad (n \to \infty)$$

が成立することが知られている. □

補題 6.22 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を独立な確率過程, 各過程 $X_i = \{X_{i,s}\}_{s\in\mathcal{T}}$ は中心化されている[2] とする. すなわち, $\mathbf{E}[X_{i,s}] = 0$ である. ただし, $\mathcal{T}$ は添え字集合である. $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ は Rademacher 確率変数列で, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ とは独立とする. このとき

$$\frac{1}{2}\mathbf{E}\left[\sup_{s\in\mathcal{T}}\left|\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j X_{j,s}\right|\right] \le \mathbf{E}\left[\sup_{s\in\mathcal{T}}\left|\sum_{j=1}^{n} X_{j,s}\right|\right] \le 2\mathbf{E}\left[\sup_{s\in\mathcal{T}}\left|\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j X_{j,s}\right|\right] \tag{9}$$

と

$$\mathbf{E}\left[\sup_{s\in\mathcal{T}}\sum_{j=1}^{n} X_{j,s}\right] \le 2\mathbf{E}\left[\sup_{s\in\mathcal{T}}\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j X_{j,s}\right] \tag{10}$$

が成立する.

[2] $X_{j,s} = g(X_j) - \mathbf{P}g\ (s = g,\ \mathcal{T} = \mathcal{G})$ と対応させる.

補題 6.22 の証明 ①(9) の 2 番目の不等号の証明: X'_j を X_j の独立複製とする. 各確率過程 X_j は中心化されていることに注意すると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\sup_{s\in\mathcal{T}}\left|\sum_{j=1}^{n} X_{j,s}\right|\right] &= \mathrm{E}\left[\sup_{s\in\mathcal{T}}\left|\sum_{j=1}^{n}\{X_{j,s} - \mathrm{E}[X'_{j,s}]\}\right|\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\sup_{s\in\mathcal{T}}\left|\mathrm{E}\left[\sum_{j=1}^{n}\{X_{j,s} - X'_{j,s}\}\middle| X'_j\right]\right|\right] \\
&\le \mathrm{E}\left[\sup_{s\in\mathcal{T}}\left|\sum_{j=1}^{n}\{X_{j,s} - X'_{j,s}\}\right|\right] \\
&\qquad (\because \text{Jensen の不等式と towering propaty}) \\
&= \mathrm{E}\left[\sup_{s\in\mathcal{T}}\left|\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j\{X_{j,s} - X'_{j,s}\}\right|\right] \\
&\qquad (\because X_{j,s} - X'_{j,s} \text{ の分布の対称性}) \\
&\le 2\mathrm{E}\left[\sup_{s\in\mathcal{T}}\left|\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j X_{j,s}\right|\right].
\end{aligned}
$$

対称化トリック (3)

補題 6.22 の証明　上の変形の 1 番目の不等号は関数 $x \mapsto |x|$ に対して, Jensen の不等式を適用すると

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{s\in\mathcal{T}}\left|\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n}\{X_{j,s}-X'_{j,s}\}\,\middle|\,X'_j\right]\right|\right] &\le \mathbb{E}\left[\sup_{s\in\mathcal{T}}\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=1}^{n}\{X_{j,s}-X'_{j,s}\}\right|\,\middle|\,X'_j\right]\right] \\
&\le \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sup_{s\in\mathcal{T}}\left|\sum_{j=1}^{n}\{X_{j,s}-X'_{j,s}\}\right|\,\middle|\,X'_j\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sup_{s\in\mathcal{T}}\left|\sum_{j=1}^{n}\{X_{j,s}-X'_{j,s}\}\right|\right]
\end{aligned}
$$

に注意すればよい.

対称化トリック (3)

補題 6.22 の証明 ②**(9)** の **1** 番目の不等号の証明: ① と同じように示せばよい. □

補題 6.23 $\mathcal{G}$ を関数族, P を $\mathbb{R}$ 上の確率測度, $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathsf{P}$ とする. さらに, 任意の $g \in \mathcal{G}$ とある $\delta > 0$ に対して

$$\Pr\left(\left|\int g \, \mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}_n - \mathsf{P})\right| > \frac{\delta}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \tag{2}$$

が成立する[3] とする. ただし, $\widehat{\mathsf{P}}_n$ は $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に基づく経験確率測度である. このとき

$$\Pr\left(\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\int g \, \mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}_n - \mathsf{P})\right| > \delta\right) \leq 2\Pr\left(\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\int g \, \mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}_n - \widehat{\mathsf{P}}'_n)\right| > \frac{\delta}{2}\right)$$

が成り立つ. ただし, $\widehat{\mathsf{P}}'_n$ は, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ の独立複製 $(X'_1, X'_2, \ldots, X'_n)$ に基づく経験確率測度である.

---

[3] (2) から

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \Pr\left(\left|\int g \, \mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}_n - \mathsf{P})\right| > \frac{\delta}{2}\right) = \Pr\left(\left|\int g \, \mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}_n - \mathsf{P})\right| \leq \frac{\delta}{2}\right)$$

となることに注意する.

補題 6.23 の証明 $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ とおき, $g \in \mathcal{G}$ に対して, ランダムな部分集合 $A_g \subset \mathbb{R}^n$ を

$$A_g := \left\{X; \left|\int g\,\mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}_n - \mathsf{P})\right| > \delta\right\}$$

で定める. さらに

$$A := \bigcup_{g \in \mathcal{G}} A_g$$

とする. 部分集合 A の定義から

$$X \in A \;\Leftrightarrow\; \exists g_X =: g_* \in \mathcal{G} \text{ s.t. } X \in A_{g^*}$$

である.

補題 6.23 の証明の続き　g^* は X に依存するので, $\mathcal{G}$ に値を取るランダム関数である. $\widehat{\mathsf{P}}_n$ と $\widehat{\mathsf{P}}'_n$ の独立性から

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{Pr}\left(X \in A_{g^*} \text{ かつ } \left|\int g^* \, \mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}'_n - \mathsf{P})\right| \leq \frac{\delta}{2}\right) \\
&= \mathsf{E}\left[\mathbb{1}\left\{\{X \in A_{g^*}\} \bigcap \left\{\left|\int g^* \, \mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}'_n - \mathsf{P})\right| \leq \frac{\delta}{2}\right\}\right\}\right] \\
&= \mathsf{E}_X\left[\mathbb{1}\left\{\{X \in A_{g^*}\}\mathsf{E}\left[\mathbb{1}\left\{\left|\int g^* \, \mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}'_n - \mathsf{P})\right| \leq \frac{\delta}{2}\right\}\middle| X\right]\right]\right] \\
&= \mathsf{E}_X\left[\mathbb{1}\left\{\{X \in A_{g^*}\} \underbrace{\mathsf{Pr}\left(\left|\int g^* \, \mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}'_n - \mathsf{P})\right| \geq \frac{\delta}{2}\right\} \middle| X\right)}_{\geq 1/2 \quad \because (2)}\right] \\
&\geq \frac{1}{2}\mathsf{Pr}(A_{g^*}) \\
&= \frac{1}{2}\mathsf{Pr}\left(\left|\int g^* \, \mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}_n - \mathsf{P})\right| > \delta\right) \qquad (11)
\end{aligned}
$$

となる.

補題 6.23 の証明の続き　この不等式を用いると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Pr}\left(\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\int g\,\mathrm{d}(\widehat{\mathrm{P}}_n-\mathrm{P})\right|>\delta\right) &= \mathrm{Pr}\left(X\in\bigcup_{g\in\mathcal{G}}A_g)\right) \\
&\le \mathrm{Pr}(X\in A_{g^*}) \\
&= \mathrm{Pr}\left(\left|\int g_*\,\mathrm{d}(\widehat{\mathrm{P}}_n-\mathrm{P})\right|>\delta\right) \\
&\le 2\mathrm{Pr}\left(X\in A_{g^*}\ \text{かつ}\ \left|\int g^*\,\mathrm{d}(\widehat{\mathrm{P}}'_n-\mathrm{P})\right|\le\frac{\delta}{2}\right) \qquad (\because (11)) \\
&= 2\mathrm{Pr}\left(\left\{X\in A_{g^*}\right\}\bigcap\left\{\left|\int g^*\,\mathrm{d}(\widehat{\mathrm{P}}'_n-\mathrm{P})\right|\le\frac{\delta}{2}\right\}\right) \\
&= 2\mathrm{Pr}\left(\left\{\left|\int g^*\,\mathrm{d}(\widehat{\mathrm{P}}_n-\mathrm{P})\right|>\delta\right\}\bigcap\left\{\left|\int g^*\,\mathrm{d}(\widehat{\mathrm{P}}'_n-\mathrm{P})\right|\le\frac{\delta}{2}\right\}\right) \\
&\le 2\mathrm{Pr}\left(\left|\int g^*\,\mathrm{d}(\widehat{\mathrm{P}}_n-\widehat{\mathrm{P}}'_n)\right|>\frac{\delta}{2}\right) \\
&\le 2\mathrm{Pr}\left(\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\int g\,\mathrm{d}(\widehat{\mathrm{P}}_n-\widehat{\mathrm{P}}'_n)\right|>\frac{\delta}{2}\right).
\end{aligned}
$$

補題 6.23 の証明の続き　最初の不等号は

$$X \in \bigcup_{g \in \mathcal{G}} A_g \;\Rightarrow\; X \in A_{g^*}$$

なので

$$\left\{X \in \bigcup_{g \in \mathcal{G}} A_g\right\} \subset \{X \in A_{g^*}\}$$

からわかる. また, 最後の不等号は

$$\left|\int g^* \, \mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}_n - \mathsf{P})\right| > \delta \text{ かつ } \left|\int g^* \, \mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}'_n - \mathsf{P})\right| \leq \frac{\delta}{2}$$

ならば

$$\left|\int g^* \, \mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}_n - \widehat{\mathsf{P}}'_n)\right| > \frac{\delta}{2}$$

であることがわかる.

補題 6.23 の証明の続き 実際, 三角不等式と条件から

$$\delta < \left|\int g^* \, \mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}_n - \mathsf{P})\right| \le \left|\int g^* \, \mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}_n - \widehat{\mathsf{P}}'_n)\right| + \left|\int g^* \, \mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}'_n - \mathsf{P})\right|$$
$$\le \left|\int g^* \, \mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}_n - \widehat{\mathsf{P}}'_n)\right| + \frac{\delta}{2}$$

から

$$\left|\int g^* \, \mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}_n - \widehat{\mathsf{P}}'_n)\right| \le \frac{\delta}{2}$$

がわかる. □

対称化トリック (10)

系 6.24 $\mathcal{G}$ を関数族, P を $\mathbb{R}$ 上の確率測度, $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathsf{P}$ とする. $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ を Rademacher 確率変数列で X_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) は独立とする. このとき, ある $\delta > 0$ とすべての $g \in \mathcal{G}$ に対して

$$\Pr\left(\left|\int g \, \mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}_n - \mathsf{P})\right| > \frac{\delta}{2}\right) \le \frac{1}{2} \tag{12}$$

とする. このとき

$$\Pr\left(\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\int g \, \mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}_n - \mathsf{P})\right| > \delta\right) \le 4\Pr\left(\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\epsilon g(X_j)\right| > \frac{\delta}{4}\right)$$

が成り立つ.

系 6.24 の証明 補題 **6.23** から

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\int g\,\mathrm{d}(\widehat{\mathrm{P}}_n-\mathrm{P})\right|>\delta\right)\\
&\leq 2\Pr\left(\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\int g\,\mathrm{d}(\widehat{\mathrm{P}}_n-\widehat{\mathrm{P}}'_n)\right|>\frac{\delta}{2}\right)\\
&=2\Pr\left(\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j\{g(X_j)-g(X'_j)\}\right|>\frac{\delta}{2}\right)\\
&\leq 2\left\{\Pr\left(\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j g(X_j)\right|>\frac{\delta}{4}\right)+\Pr\left(\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j g(X'_j)\right|>\frac{\delta}{4}\right)\right\}\\
&=4\Pr\left(\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\epsilon g(X_j)\right|>\frac{\delta}{4}\right)
\end{aligned}
$$

からわかる.

$\boxed{\text{系 6.24 の証明}}$ 最後の不等式は以下のような議論からわかる. U と V を実数値確率変数とする. このとき

$$|U| \leq \frac{\delta}{4} \text{ かつ } |V| \leq \frac{\delta}{4}$$

ならば

$$|U - V| \leq |U| + |V| \leq \frac{\delta}{2}$$

となる. したがって

$$|U| \leq \frac{\delta}{4} \text{ かつ } |V| \leq \frac{\delta}{4} \text{ ならば } |U - V| \leq \frac{\delta}{2}$$

となる. これの対偶をとれば

$$|U - V| > \frac{\delta}{2} \text{ ならば } |U| > \frac{\delta}{4} \text{ または } |V| > \frac{\delta}{4}.$$

なので

$$\Pr\left(|U - V| > \frac{\delta}{2}\right) \leq \Pr\left(|U| > \frac{\delta}{4}\right) + \Pr\left(|V| > \frac{\delta}{4}\right).$$

補題 6.25 関数族 $\mathcal{G}$ は有限集合とし, $\#\mathcal{G} = N > 1$ とする. ある定数 $K > 0$ が存在して

$$\max_{g \in \mathcal{G}} \|g\|_\infty \le K \tag{13}$$

と仮定する. このとき, $t > 0$ に対して

$$\Pr\left(\max_{g \in \mathcal{G}} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} g(X_j) \right| > K \sqrt{\frac{2(\log N + t)}{n}} \right) \le e^{-t} \tag{4}$$

が成り立つ. さらに, $\log N + t \ge 1$ なる $t > 0$ に対して,

$$\Pr\left(\max_{g \in \mathcal{G}} \left| \int g \, \mathrm{d}(\widehat{\mathrm{P}}_n - \mathrm{P}) \right| > \frac{K}{4} \sqrt{\frac{2(\log N + t)}{n}} \right) \le 8\, e^{-t} \tag{5}$$

が成り立つ.

補題 6.25 の証明 **(4) の証明:** $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ とは独立な Rademacher 列とする. $g \in \mathcal{G}$ と $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\left[\epsilon_j g(X_j)\right] &= \mathsf{E}[\mathsf{E}[\epsilon_j g(X_j) | X_j]] \\ &= \mathsf{E}\Big[\mathrm{Pr}(\epsilon_j = 1) \times 1 \times g(X_j) + \mathrm{Pr}(\epsilon_j = -1) \times (-1) \times g(X_j)\Big] \\ &= \mathsf{E}\left[\frac{1}{2} g(X_j) - \frac{1}{2} g(X_j)\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. また, (13) と $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ から

$$|\epsilon_j g(x)| \leq K \qquad (x \in \mathbb{R})$$

である.

補題 6.25 の証明 Hoeffding の不等式（命題 5.14）より, $s > 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j g(X_j)\right| > s \,\middle|\, X_1, X_2, \ldots, X_n\right) \\
&= \Pr\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j g(X_j) - \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j g(X_j)\right]\right| > s \,\middle|\, X_1, X_2, \ldots, X_n\right) \\
&\leq 2\exp\left\{-\frac{2n^2 s^2}{4nK^2}\right\} = 2\exp\left\{-\frac{ns^2}{2K^2}\right\}
\end{aligned}
$$

を得る. さらに, towering property から

$$
\Pr\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j g(X_j)\right| > s\right) \leq 2\exp\left\{-\frac{ns^2}{2K^2}\right\}
$$

を得る.

補題 6.25 の証明　次に, 上の不等式と union bound を用いると

$$
\begin{aligned}
\Pr\left(\max_{g\in\mathcal{G}}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j g(X_j)\right| > s\right) &= \Pr\left(\bigcup_{g\in\mathcal{G}}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j g(X_j)\right| > s\right\}\right)\\
&\le \sum_{g\in\mathcal{G}}\Pr\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j g(X_j)\right| > s\right)\\
&= 2N\exp\left\{-\frac{ns^2}{2K^2}\right\}\\
&= 2\exp\left\{-\frac{ns^2}{2K^2}+\log N\right\}
\end{aligned}
$$

を得る.

補題 6.25 の証明 ここで

$$t = \frac{ns^2}{2K^2} - \log N \Leftrightarrow s = K\sqrt{\frac{2(t + \log N)}{n}}$$

となる.

$$\mathrm{Pr}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j g(X_j)\right| > K\sqrt{\frac{2(t + \log N)}{n}}\right) \leq 2e^{-t} \qquad (t > 0)$$

を得る. よって, (4) は証明できた.
(5) の証明: (4) と系 6.24 を用いて証明する. そのために条件 (12) を確認する. まず, (13) から

$$\mathrm{Var}[g(X_1)] \leq \mathrm{E}[\{g(X_1)\}^2] \leq K^2$$

と評価できることに注意する.

$\boxed{\text{補題 6.25 の証明}}$ このとき, 各 $g \in \mathcal{G}$ と $K^2/(n\delta^2) \leq 1/2$ なる $\delta > 0$ に対して, Chebyshev の不等式（系 1.34）を用いると

$$\mathrm{Pr}\left(\left|\int g\, \mathrm{d}(\widehat{\mathrm{P}}_n - \mathrm{P})\right| > \delta\right) = \mathrm{Pr}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{g(X_j) - \mathrm{E}[g(X_j)]\right\}\right| > \delta\right)$$

$$\leq \frac{\mathrm{Var}[g(X_1)]}{n\delta^2} \leq \frac{K^2}{n\delta^2} \leq \frac{1}{2}$$

となる. よって, (12) が成立するので, $\log N + t \geq 1$ のとき, 確率の対称化定理（系 6.24）より

$$\mathrm{Pr}\left(\max_{g\in\mathcal{G}}\left|\int g\, \mathrm{d}(\widehat{\mathrm{P}}_n - \mathrm{P})\right| > K\sqrt{\frac{2(t+\log N)}{n}}\right)$$

$$\leq 4\mathrm{Pr}\left(\max_{g\in\mathcal{G}}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j g(X_j)\right| > \frac{K}{4}\sqrt{\frac{2(t+\log N)}{n}}\right) \leq 8e^{-t}$$

を得る.

補題 6.28 $X_1, X_2, \ldots, X_N$ は劣 Gauss 確率変数列 $\mathbf{sugG}(\nu)$ とする. すなわち, $\forall\lambda > 0$ に対して, $\mathbf{E}[e^{\lambda X_j}] \leq e^{\lambda^2\nu/2}$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ が成立する. このとき

$$\mathbf{E}\left[\max_{j=1,2,\ldots,N} X_j\right] \leq \sqrt{2\nu\log N}$$

が成立する.

補題 6.28 の証明 Jensen の不等式 (定理 1.37) を用いると

$$\begin{aligned}
\exp\left(\lambda\mathbf{E}\left[\max_{j=1,2,\ldots,N} X_j\right]\right) &\leq \mathbf{E}\left[\exp\left(\lambda\max_{j=1,2,\ldots,N} X_j\right)\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\max_{j=1,2,\ldots,N} \exp(\lambda X_j)\right] \\
&\leq \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\mathbf{E}[\exp(\lambda X_j)]}_{\leq e^{\lambda^2\nu/2}} \\
&\leq N\exp\left(\frac{\lambda^2\nu}{2}\right).
\end{aligned}$$

Dudley のエントロピー積分 (2)

補題 6.28 の証明　両辺の対数を取ると

$$\mathbf{E}\left[\max_{j=1,2,\dots,N} X_j\right] \leq \frac{\log N}{\lambda} + \frac{\lambda\nu}{2}$$

を得る．この式は任意の $\lambda > 0$ に対して成立するので，
$\lambda = \sqrt{2\nu^{-1}\log N}$ を代入すると

$$\mathbf{E}\left[\max_{j=1,2,\dots,N} X_j\right] \leq \sqrt{2\nu\log N}$$

がわかる． □

定理 6.29 $(\mathbb{T}, d)$ を距離空間とし, $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ を $\mathbb{T}$ を添え字集合とする確率過程で, 任意の $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$ と $\lambda > 0$ に対して

$$\log\left(\mathsf{E}[\exp\{\lambda(X_{t_1} - X_{t_2})\}]\right) \le \frac{\lambda^2 d^2(t_1, t_2)}{2} \tag{14}$$

をみたすとする. このとき, すべての $t_0 \in \mathbb{T}$ に対して

$$\mathsf{E}\left[\sup_{t\in\mathbb{T}} \left|X_t - X_{t_0}\right|\right] \le 12 \int_0^{\delta/2} \sqrt{H(\epsilon, \mathbb{T}, d)}\, d\epsilon$$

が成立する. ただし, $\delta = \sup_{t\in\mathbb{T}} d(t, t_0)$ である. とくに, $D = \sup_{t_1, t_2\in\mathbb{T}} d(t_1, t_2) < \infty$ のとき

$$\mathsf{E}\left[\sup_{t_1, t_2\in\mathbb{T}} \left|X_{t_1} - X_{t_2}\right|\right] \le 24 \int_0^{\delta/2} \sqrt{H(\epsilon, \mathbb{T}, d)}\, d\epsilon \tag{15}$$

が成立する.

定理 6.29 の証明 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $H(\epsilon, \mathbb{T}, d) < \infty$ と仮定する. そうでない場合には, 不等式は自明となる.

① $\mathbb{T}$ は高々可算集合の場合: 任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して, $\delta_j := \delta 2^{-j}$ と記す. すると, 任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して, $N_j := N(\delta_j, \mathbb{T}, d)$ は有限となる. このことより, 部分集合 $\mathbb{T}_j := \{t_1, t_2, \ldots, t_{N_j}\} \subset \mathbb{T}$ が存在して

$$\bigcup_{k=1}^{N_j} B_d(x_k, \delta_j), \qquad B_d(t_k, \delta_j) := \{t \in \mathbb{T};\ d(t, t_k) < \delta_j\}$$

とできる. 各 $j \in \mathbb{N}$ に対して, $\mathbb{T}$ から $\mathbb{T}_j$ への写像 Π_j を $t \in \mathbb{T}$ に対して, ある t_j ($\exists j \in \{1, 2, \ldots, N_j\}$) で $d(t, t_j) < \delta_j$ なるものに対応させる写像とする. x に対して,
$\#\{j \in \{1, 2, \ldots, N_j;\ d(t_j, t) < \delta_j\} \geq 2$ の場合には, そのうちのどれかを対応させればよい. ここで, $\mathbb{T}_0 = \{t_0\}$ とし, $\Pi_0(t) = t_0$ と定義する.

定理 6.29 の証明の続き **Step 1**: つぎに

$$X_t = X_{t_0} + \sum_{j=1}^{\infty} \{X_{\Pi_{j+1}(t)} - X_{\Pi_j(t)}\}$$

と書く. $\mathbb{T}$ は有限集合なので, ある大きな $j_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $X_{\Pi_{j_0}(t)} = X_t$ となっている. すなわち, 上の表現の有限和である.

Step 2: つぎに

$$\mathrm{E}\left[\sup_{t\in\mathbb{T}} \left|X_t - X_{t_0}\right|\right] \le \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{E}\left[\sup_{t\in\mathbb{T}} \left|X_{\Pi_{j+1}(t)} - X_{\Pi_j(t)}\right|\right] \tag{16}$$

である. また

$$\begin{aligned}
\#\{(\Pi_j(t), \Pi_{j+1}(t));\ t \in \mathbb{T}\} &\le N(\delta_j, \mathbb{T}, d) \times N(\delta_{j+1}, \mathbb{T}, d) \\
&\le \{N(\delta_{j+1}, \mathbb{T}, d)\}^2 \\
&= \exp\left(\log(\{N(\delta_{j+1}, \mathbb{T}, d)\}^2)\right) \\
&= \exp\left(2H(\delta_{j+1}, \mathbb{T}, d)\right) \qquad (17)
\end{aligned}$$

となることがわかる.

定理 6.29 の証明の続き　三角不等式から

$$d(\Pi_j(t),\ \Pi_{j+1}(t)) \le d(\Pi_j(t),\ t) + d(t,\ \Pi_{j+1}(t)) \le \delta_j + \delta_{j+1} \le 3\delta_{j+1} \tag{18}$$

となる. (14) と (18) から

$$\log\left(\mathbf{E}[\exp(\lambda(X_{\Pi_{j+1}(t)} - X_{\Pi_j(t)}))]\right) \le \frac{\lambda^2 d^2(\Pi_{j+1}(t),\ \Pi_j(t))}{2} \le \frac{9\lambda^2\delta_{j+1}^2}{2}$$

であるので

$$X_{\Pi_{j+1}(t)} - X_{\Pi_j(t)} \ \sim\ \mathrm{subG}(9\delta_{j+1}^2)$$

となることがわかる.

Dudley のエントロピー積分 (7)

定理 6.29 の証明の続き　よって, 補題 **6.28** と **(17)** から

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\sup_{t\in\mathbb{T}}\left|X_{\Pi_{j+1}(t)} - X_{\Pi_j(t)}\right|\right] &\le \sqrt{2\times 9\delta_{j+1}^2 \log(\#\{(\Pi_j(t),\ \Pi_{j+1}(t));\ t\in\mathbb{T}\})} \\
&\le \sqrt{18\delta_{j+1}^2 \times 2H(\delta_{j+1},\ \mathbb{T},\ d)} \\
&= 6\delta_{j+1}\sqrt{H(\delta_{j+1},\ \mathbb{T},\ d)} \qquad (19)
\end{aligned}
$$

を得る. **(16)** の右辺に **(19)** を代入すると

定理 6.29 の証明の続き

$$\mathbf{E}\left[\sup_{t\in\mathbb{T}}\left|X_t - X_{t_0}\right|\right] \leq \sum_{j=0}^{\infty} 6\delta_{j+1}\sqrt{H(\delta_{j+1}, \mathbb{T}, d)}$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} 6\delta_j\sqrt{H(\delta_j, \mathbb{T}, d)}$$
$$= 12\sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{(\delta_j - \delta_{j+1})}_{\delta_j-\delta_j/2=\delta_j/2}\sqrt{H(\delta_j, \mathbb{T}, d)}$$
$$= 12\int_0^{\delta/2}\sqrt{H(\epsilon, \mathbb{T}, d)}\,\mathrm{d}\epsilon$$

を得る.

② $\mathbb{T}$ は非可算集合の場合: $H(\epsilon, \mathbb{T}, d) < \infty$ なので, $\mathbb{T}$ は全有界である.

注意 6.30 距離空間 $(\mathbb{T}, d)$ が全有界[4] ならば, 可分となることは以下からわかる. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\varepsilon = 1/n$ とおく. すると $\mathbb{T}$ の全有界性より, 正整数 N_n と有限集合

が存在して
$$A_n = \{t_{n,1}, t_{n,2}, \ldots, t_{n,N_n}\}$$
$$\mathbb{T} \subset \bigcup_{j=1}^{N_n} B(t_{n,j}, 1/n)$$
が成り立つ. ここで
$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$
とおく. 各 A_n は有限集合であるから, A は高々可算集合である.

[4] すなわち、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、有限個の点 $t_1, t_2, \ldots, t_N \in \mathbb{T}$ が存在して
$$\mathbb{T} \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(t_i, \varepsilon), \qquad B(t_i, \varepsilon) = \{t \in \mathbb{T};\ d(t_i, t) < \varepsilon\}$$
が成り立つ.

注意 6.30 の続き　次に A が $\mathbb{T}$ において稠密であることを示す. 任意の $t \in \mathbb{T}$ と任意の $\varepsilon > 0$ をとる. 十分大きい n をとれば

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

となる. このとき A_n は $1/n$-網であるから, ある $t_{n,j} \in A_n \,(j \in \{1, 2, \ldots, N_n\})$ が存在して

$$d(t, t_{n,j}) < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

が成り立つ. したがって, 任意の $t \in \mathbb{T}$ の ϵ 近傍は A と必ず交わる. ゆえに A は $\mathbb{T}$ において稠密である. したがって $\mathbb{T}$ は可分である. □

補題 6.31 $X_1, X_2, \ldots X_n$ を i.i.d. 確率変数列とし, $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ を Rademacher 確率変数列とし, $\{X_j\}_{j=1}^n$ と $\{\epsilon_j\}_{j=1}^n$ は独立とする. このとき

$$\mathrm{E}\left[\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j g(X_j)\right|\,\middle|\, X_1, X_2, \ldots, X_n\right]$$

$$\leq \sqrt{2\pi}\frac{\sup_{g\in\mathcal{G}}\|g\|_{L_2(\widehat{\mathrm{P}}_2)}}{\sqrt{n}} + 12\int_0^{D_n}\frac{H(\epsilon, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_2(\widehat{\mathrm{P}}_n)})}{n}\,d\epsilon$$

が成立する. ただし

$$D_n := \sup_{g\in\mathcal{G}}\|g\|_{L_\infty(\widehat{\mathrm{P}}_n)}; \qquad \|g\|_{L_\infty(\widehat{\mathrm{P}}_n)} := \max_{j=1,2,\ldots,n}|g(X_j)|$$

$$\|g\|_{L_2(\widehat{\mathrm{P}}_n)} := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}g^2(X_j)$$

である.

補題 6.31 定理 6.29 を用いるために, 条件 (14) を確認する. すなわち, 過程 $\{\sum_{j=1}^n \epsilon_j g(X_j)\}_{g\in\mathcal{G}}$ の増分が劣 Gauss であることを示せばよい. そのために, 任意の $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ を取る. $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$Y_j := \frac{\epsilon_j}{n}\{g_1(X_j) - g_2(X_j)\}$$

とおく. このとき, $X := X_1, X_2, \ldots, X_n$ を与えたとき

$$\mathbf{E}[Y_j | X] = 0, \qquad Y_j \in \Bigg[\underbrace{-\frac{|g_1(X_j) - g_2(X_j)|}{n}}_{a}, \underbrace{\frac{|g_1(X_j) - g_2(X_j)|}{n}}_{=b}\Bigg]$$

となるので, 補題 5.13 から, 任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\mathbf{E}\left[\exp(\lambda Y_j) \middle| X\right] \le \exp\left(\frac{\lambda^2\{g_1(X_j) - g_2(X_j)\}^2}{2n^2}\right)$$

となる.

補題 6.31 の証明 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ は独立な確率変数列なので

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda Y_j}{n}\right)\middle| X\right] &= \mathsf{E}\left[\prod_{j=1}^{n}\exp\left(\frac{\lambda Y_j}{n}\right)\middle| X\right] \\
&= \prod_{j=1}^{n}\mathsf{E}\left[\exp\left(\frac{\lambda Y_j}{n}\right)\middle| X\right] \\
&\le \prod_{j=1}^{n}\exp\left(\frac{\lambda^2\{g_1(X_j)-g_2(X_j)\}^2}{2n^2}\right) \\
&= \exp\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda^2\{g_1(X_j)-g_2(X_j)\}^2}{2n^2}\right) \\
&= \exp\left(\frac{\lambda^2\{\|g_1-g_2\|_{L_2(\widehat{\mathsf{P}}_n)}/\sqrt{n}\}^2}{2}\right)
\end{aligned}
$$

となる.

補題 6.31 の証明の続き　よって, $d(g_1, g_2) = \|g_1 - g_2\|_{L_2(\widehat{\mathsf{P}}_n)} / \sqrt{n}$ として, (14) が成立することが示せた. Dudley のエントロピー上限 (補題 6.29) を適用するために, $g_0 \in \mathcal{G}$ を取る. すると

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left[\sup_{g \in \mathcal{G}} \left| n^{-1} \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j \{g(X_j) - g_0(X_j)\} \right| X\right] \\
&\leq 12 \int_0^{\delta_n/2} \sqrt{H(\epsilon, \mathcal{G}, n^{-1/2}\|\cdot\|_{L_2(\widehat{\mathsf{P}}_n)})}\, d\epsilon \\
&= 12 \int_0^{\delta_n/2} \sqrt{H(\sqrt{n}\epsilon, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_2(\widehat{\mathsf{P}}_n)})}\, d\epsilon \\
&= 12 \int_0^{\sqrt{n}\delta_n/2} \sqrt{\frac{H(\epsilon', \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_2(\widehat{\mathsf{P}}_n)})}{n}}\, d\epsilon' \\
&\quad (\epsilon' = \sqrt{n}\epsilon \text{ と変換}) \\
&= 12 \int_0^{D_n} \sqrt{\frac{H(\epsilon, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_2(\widehat{\mathsf{P}}_n)})}{n}}\, d\epsilon
\end{aligned} \tag{20}
$$

を得る.

補題 6.31 の証明の続き ただし, $\delta_n = n^{-1/2} \sup_{g\in\mathcal{G}} \|g - g_0\|_{L_2(\widehat{\mathsf{P}})}$ と $D_n := \sup_{g\in\mathcal{G}} \|g - g_0\|_{L_2(\widehat{\mathsf{P}})}$ である. しかし, $\sum_{j=1}^n \epsilon_j g_0(X_j)$ に対して, Hoeffding の不等式を用いると

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left[\left|n^{-1}\sum_{j=1}^n \epsilon_j g_0(X_j)\right| \,\middle|\, X\right] \\
&\quad = \int_0^\infty \mathsf{Pr}\left(\left|n^{-1}\sum_{j=1}^n \epsilon_j g_0(X_j)\right| > t \,\middle|\, X\right) \mathrm{d}t && (\because\ 命題\ 1.32) \\
&\quad \le \int_0^\infty 2\exp\left(-\frac{2n^2t^2}{4\sum_{j=1}^n \{g_0(X_j)\}^2}\right)\mathrm{d}t && (\because\ 命題\ 5.14) \\
&\quad = \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{n^2t^2}{2\sum_{j=1}^n \{g_0(X_j)\}^2}\right)\mathrm{d}t \\
&\quad = \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2\{\|g_0\|_{L_2(\widehat{\mathsf{P}})}/n\}^2}\right)\mathrm{d}t \\
&\quad = \sqrt{2\pi}\,\frac{\|g_0\|_{L_2(\widehat{\mathsf{P}}_n)}}{4\sqrt{n}} \le \sqrt{2\pi}\,\frac{\sup_{g\in\mathcal{G}}\|g\|_{L_2(\widehat{\mathsf{P}})}}{\sqrt{n}}. && (21)
\end{aligned}
$$

補題 6.31 の証明の続き (20) と (21) から

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left[\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j g(X_j)\right|\,\middle|\, X\right]\\
&\le \mathsf{E}\left[\sup_{g\in\mathcal{G}}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j g_0(X_j)\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j\{g(X_j)-g_0(X_j)\}\right|\right\}\,\middle|\, X\right]\\
&\le \mathsf{E}\left[\left|n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j g_0(X_j)\right|\,\middle|\, X\right] + \mathsf{E}\left[\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j\{g(X_j)-g_0(X_j)\}\right|\,\middle|\, X\right]\\
&\le \sqrt{2\pi}\,\frac{\sup_{g\in\mathcal{G}}\|g\|_{L_2(\widehat{\mathsf{P}})}}{\sqrt{n}} + 12\int_0^{D_n}\sqrt{\frac{H(\epsilon,\mathcal{G},\|\cdot\|_{L_2(\widehat{\mathsf{P}}_n)})}{n}}\,d\epsilon
\end{aligned}
$$

を得る. よって, 補題は示された. □

補題 6.32 ある定数 $K > 0$ に対して, $\sup_{g \in \mathcal{G}} \|g\|_\infty < K$ と仮定する.
任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\frac{1}{n} H(\epsilon, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_2(\widehat{\mathsf{P}}_n)}) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \qquad (n \to \infty) \tag{7}$$

ならば, $\mathcal{G}$ は P-GC 族である.

補題 6.32 の証明

$$\sup_{g \in \mathcal{G}} \left| \widehat{\mathsf{P}}_n g - \mathsf{P} g \right| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \qquad (n \to \infty)$$

を示すために

$$\mathsf{E}\left[\sup_{g \in \mathcal{G}} \left| \widehat{\mathsf{P}}_n g - \mathsf{P} g \right| \right] \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

を示せばよい.

補題 6.32 の証明の続き　補題 **6.22** の対称化トリックと補題 **6.31** から

$$\mathbf{E}\left[\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\widehat{\mathbf{P}}_n g - \mathbf{P}g\right|\right] \leq \mathbf{E}\left[\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j g(X_j)\right|\right]$$

$$= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j g(X_j)\right|\,\middle|\, X\right]\right]$$

$$\leq 2\sqrt{2\pi}\frac{K}{\sqrt{n}} + 24\int_0^K \sqrt{\frac{H(\epsilon, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_2(\widehat{\mathbf{P}}_n)})}{n}}\,\mathrm{d}\epsilon$$

となる. 命題 **6.7(1)(2)** から

$$H(\epsilon, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_2(\widehat{\mathbf{P}}_n)}) \leq H_B(\epsilon, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_2(\widehat{\mathbf{P}}_n)}) \leq H\left(\frac{\epsilon}{2}, \mathcal{G}\right) \leq \left(\frac{2K}{\epsilon}\right)^n$$

となる.

補題 6.32 の証明の続き　すると

$$\left| \int_0^K \left\{ \sqrt{\frac{H(\epsilon, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_2(\widehat{\mathrm{P}}_n)})}{n}} \right\}^2 d\epsilon \right| \le \left| \int_0^K \frac{\log\left(\frac{2K}{\epsilon}\right)^n}{n} d\epsilon \right| = \left| \int_0^K \log(2K/\epsilon)\, d\epsilon \right| < \infty$$

なので, 命題 **2.7(1)** から $\left\{ \sqrt{\frac{H(\epsilon, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_2(\widehat{\mathrm{P}}_n)})}{n}} \right\}_{n=1}^{\infty}$ は一様可積分であることがわかる. したがって, **(7)** と定理 **2.9(4)** から

$$\int_0^K \sqrt{\frac{H(\epsilon, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_2(\widehat{\mathrm{P}}_n)})}{n}}\, d\epsilon \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

がわかる.

補題 6.32 の証明の続き　以上から

$$\mathbf{E}\left[\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\widehat{\mathbf{P}}_n g - \mathbf{P}g\right|\right] \le 2\sqrt{2\pi}\frac{K}{\sqrt{n}} + 24\int_0^K \sqrt{\frac{H(\epsilon,\mathcal{G},\|\cdot\|_{L_2(\widehat{\mathbf{P}}_n)})}{n}}\,d\epsilon \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

が証明できた. よって, $\mathcal{G}$ は $\mathbf{P}$-GC 族であることがわかった. □

$\boxed{\text{定理 6.20 の証明}}$ 証明は 2 つの段階 I と II で行う.

I. $\underline{\sup_{g\in\mathcal{G}}|g(x)| \le K \text{ を仮定して, 定理 6.20 を証明}}$: $\delta > 0$,
$N = N(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(\widehat{\mathbb{P}}_n)})$ とし, $g_1, g_2, \ldots, g_N$ を関数族 $\mathcal{G}$ の δ 被覆数とする.
$g \in \mathcal{G}$ を任意に取る. すると, ある $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ に対して

$$\widehat{\mathbb{P}}_n|g_j - g| := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|g_j(X_k) - g(x)\right| < \delta \tag{22}$$

とできる. このことから

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k g(X_k)\right| &\le \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k g_j(X_k)\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k\{g(X_k) - g_j(X_k)\}\right| \\
&\le \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k g_j(X_k)\right| + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|g(X_k) - g_j(X_k)\right|}_{<\delta \quad \because (22)} \\
&\le \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k g_j(X_k)\right| + \delta.
\end{aligned}$$

定理 6.20 の証明の続き　したがって

$$\sup_{g \in \mathcal{G}} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k g(X_k) \right| \leq \max_{j=1,2,\ldots,N} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k g_j(X_k) \right| + \delta \tag{23}$$

を得る. $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ とする. Hoeffding の不等式（補題 5.13）より, $t > 0$ に対して,

$$\Pr\left(\max_{j=1,2,\ldots,N} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k g_j(X_k) \right| > K \sqrt{\frac{2(t + \log N)}{n}} \middle| X \right) \leq 2e^{-t} \tag{24}$$

となる. (23) と (24) を合わせると

$$\Pr\left(\sup_{g \in \mathcal{G}} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k g(X_k) \right| > \delta + K \sqrt{\frac{2(t + \log N)}{n}} \middle| X \right)$$
$$\leq \Pr\left(\max_{j=1,2,\ldots,N} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k g_j(X_k) \right| > K \sqrt{\frac{2(t + \log N)}{n}} \middle| X \right) \leq 2e^{-t}.$$

定理 6.20 の証明の続き 条件付き期待値の性質 (towering property) を (25) に適用すると

$$\Pr\left(\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k g(X_k)\right| > 2\delta + K\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)$$

$$\le 2e^{-t} + \Pr\left(K\sqrt{\frac{2H_1(\delta,\mathcal{G},\|\cdot\|_{L_1(\widehat{\mathrm{P}}_n)})}{n}} > \delta\right) \tag{26}$$

となる. これは以下の議論からわかる.

$$A := \left\{K\sqrt{\frac{2H(\delta,\mathcal{G},\|\cdot\|_{L_1(\widehat{\mathrm{P}}_n)})}{n}} > \delta\right\}$$

とおくと

$$A^c \text{ が起きると } \Rightarrow K\sqrt{\frac{2\log N}{n}} \le \delta$$

となる.

定理 6.20 の証明の続き

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k g(X_k)\right| > 2\delta + K\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)\\
&\le \Pr\left(\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k g(X_k)\right| > 2\delta + K\sqrt{\frac{2t}{n}} \text{ かつ } A^c\right)\\
&\quad + \Pr\left(\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k g(X_k)\right| > 2\delta + K\sqrt{\frac{2t}{n}} \text{ かつ } A\right)\\
&\le \Pr\left(\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k g(X_k)\right| > \delta + K\sqrt{\frac{2\log N}{n}} + K\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)\\
&\quad + \Pr\left(K\sqrt{\frac{2H_1(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(\widehat{\mathrm{P}}_n)})}{n}} > \delta\right) =: (*)
\end{aligned}
$$

$$
\left(\because A^c \Rightarrow K\sqrt{\frac{2\log N}{n}} \le \delta \Rightarrow 2\delta + K\sqrt{\frac{2t}{n}} \ge \delta + K\sqrt{\frac{2\log N}{n}} + K\sqrt{\frac{2t}{n}}\right)
$$

定理 6.20 の証明の続き

$$
\begin{aligned}
(*) &\leq \mathrm{Pr}\left(\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k g(X_k)\right| > \delta + K\sqrt{\frac{2(t+\log N)}{n}}\right) \\
&\quad + \mathrm{Pr}\left(K\sqrt{\frac{2H_1(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(\widehat{\mathrm{P}}_n)})}{n}} > \delta\right) \\
&\quad (\because\ \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}\ (a, b \geq 0)) \\
&= \mathrm{E}\left[\mathrm{Pr}\left(\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k g(X_k)\right| > \delta + K\sqrt{\frac{2(t+\log N)}{n}}\right)\middle| X\right] \\
&\quad + \mathrm{Pr}\left(K\sqrt{\frac{2H_1(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(\widehat{\mathrm{P}}_n)})}{n}} > \delta\right) \\
&\leq 2e^{-t} + \mathrm{Pr}\left(K\sqrt{\frac{2H_1(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(\widehat{\mathrm{P}}_n)})}{n}} > \delta\right) \qquad (\because\ (26))
\end{aligned}
$$

からわかる. よって, (26) が確認できた.

定理 6.20 の証明の続き 次に, 系 6.24 を (26) に適用するために, 以下の (12) が成立するための条件を求める.

$$\sup_{g \in \mathcal{G}} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g(X_k) - \int g \, d\mathsf{P} \right| \leq 2K$$

に注意して, Chebyshev の不等式 (系 1.34) を用いると

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Pr}\left(\sup_{g \in \mathcal{G}} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g(X_k) - \int g \, d\mathsf{P} \right| > \frac{\delta}{2} \right) \\
&\quad \leq \frac{4}{\delta^2} \mathsf{E}\left[\sup_{g \in \mathcal{G}} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g(X_k) - \int g \, d\mathsf{P} \right|^2 \right] \leq \frac{8K^2}{n\delta^2} \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

より

$$n \geq \frac{16K^2}{\delta^2}$$

が (12) が成立するための十分条件となることがわかる.

定理 6.20 の証明の続き　よって, 系 6.24 と (26) を用いれば

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{Pr}\left(\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_k) - \int g\,d\mathsf{P}\right| > 8\delta + 4K\sqrt{\frac{2t}{n}}\right) \\
&\quad\leq 4\mathsf{Pr}\left(\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k g(X_k)\right| > 2\delta + K\sqrt{\frac{2t}{n}}\right) \\
&\quad\leq 8e^{-t} + 4\mathsf{Pr}\left(K\sqrt{\frac{2H_1(\delta,\mathcal{G},\|\cdot\|_{L_1(\widehat{\mathsf{P}}_n)})}{n}} > \delta\right)
\end{aligned}
$$

を得る. $\epsilon > 0$ に対して

$$
8e^{-t} \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ かつ } 4\mathsf{Pr}\left(K\sqrt{\frac{2H_1(\delta,\mathcal{G},\|\cdot\|_{L_1(\widehat{\mathsf{P}}_n)})}{n}} > \delta\right) \leq \frac{\epsilon}{2}
$$

になるように t と n を取る.

定理 6.20 の証明の続き さらに

$$4K\sqrt{\frac{2t}{n}} \leq 2\delta$$

になるように n を大きく取り直せば, (12) が成立する. 以上のことから

$$\Pr\left(\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_j) - \int g\,\mathrm{dP}\right| > 10\delta\right) \leq \epsilon$$

となる. したがって

$$\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_j) - \int g\,\mathrm{dP}\right| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \qquad (n\to\infty)$$

がわかる.

定理 6.20 の証明の続き

II. $\underline{\sup_{g\in\mathcal{G}}|g(x)|\leq K}$ なしで定理 6.20 を証明: $\mathcal{G}$ と $\mathcal{G}_K$ の違いを評価をするために, すべての $g\in\mathcal{G}$ と任意の $K>0$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} g(X_j) - \int_{\mathbb{R}} g \, \mathrm{dP}\right| \\
&\quad\leq \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} g(X_j)\mathbb{1}\{G(X_j)\leq K\} - \int_{\mathbb{R}} g\,\mathbb{1}\{G\leq K\}\,\mathrm{dP}\right| \\
&\qquad + \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} g(X_j)\mathbb{1}\{G(X_j)> K\} - \int_{\mathbb{R}} g\,\mathbb{1}\{G> K\}\,\mathrm{dP}\right| \\
&\quad =: E_1 + E_2
\end{aligned}$$

となることに注意する.

定理 6.20 の証明の続き 上の不等式の最右辺の E_1 は, $\mathcal{G}_K$ は P-GC 族なので

$$E_1 \leq \sup_{g \in \mathcal{G}_K} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} g(X_j) - \int g \, d\mathsf{P} \right| \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \qquad (n \to \infty)$$

となる. 評価できる. 一方,

$$\begin{aligned} E_2 &\leq \sup_{g \in \mathcal{G}} |(\widehat{\mathsf{P}}_n - \mathsf{P}) g \mathbb{1}\{G > K\}| \\ &= \sup_{g \in \mathcal{G}} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} g(X_j) \mathbb{1}\{G(X_j) > K\} - \int_{\mathbb{R}} g \mathbb{1}\{G > K\} \, d\mathsf{P} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} G(X_j) \mathbb{1}\{G(X_j) > K\} - \int_{\mathbb{R}} G \mathbb{1}\{G > K\} \, d\mathsf{P} \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{R}} G \mathbb{1}\{G > K\} \, d\mathsf{P} \end{aligned}$$

である.

定理 6.20 の証明の続き　任意の K に対して, 大数の法則より

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} G(X_j)\mathbb{1}\{G(X_j) > K\} - \int_{\mathbb{R}} G\mathbb{1}\{G > K\}\,\mathrm{dP} \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \qquad (n \to \infty)$$

となる. また, $G \in L_1(\mathrm{P})$ なので

$$\lim_{K\to\infty} \int_{\mathbb{R}} G\mathbb{1}\{G > K\}\,\mathrm{dP} = 0$$

である. 以上から

$$E_2 \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \qquad (n \to \infty)$$

がわかる. よって

$$\|\widehat{\mathrm{P}}_n - \mathrm{P}\|_{\mathcal{G}} \le \|\widehat{\mathrm{P}}_n - \mathrm{P}\|_{\mathcal{G}_K} + \sup_{g\in\mathcal{G}} |(\widehat{\mathrm{P}}_n - \mathrm{P})g\mathbb{1}\{G > K\}| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \quad (n \to \infty)$$

がわかる. □

定理 6.20 の証明 2 つの段階 I と II を踏んで, 定理は証明される.

I. 定理 6.20 の仮定 (1) のもとでも $\mathcal{G}_K$ は P-GC 族であること を示そう. そのために, $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ に対して, $h_1 := g_1 \mathbb{1}\{G \leq K\}$ と $h_2 := g_2 \mathbb{1}\{G \leq K\}$ と記す. すると $h_1, h_2 \in \mathcal{G}_K$ であることに注意する. しかし

$$\int (h_1 - h_2)^2 \, d\widehat{\mathrm{P}}_n = \int_{G \leq K} (g_1 - g_2)^2 \, d\widehat{\mathrm{P}}_n \leq 2K \int |g_1 - g_2| \, d\widehat{\mathrm{P}}_n$$

となる. 命題 6.7(3) に注意すると

$$H(2K\epsilon, \mathcal{G}_K \, \| \cdot \|_{L_2(\widehat{\mathrm{P}}_n)}) \leq H(\epsilon, \mathcal{G}, \| \cdot \|_{L_1(\widehat{\mathrm{P}}_n)})$$

がわかる.

定理 6.20 の証明の続き　よって

$$\frac{1}{n}H(\epsilon, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(\widehat{\mathrm{P}}_n)}) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \qquad (n \to \infty)$$

ならば

$$\frac{1}{n}H(\epsilon, \mathcal{G}_K, \|\cdot\|_{L_2(\widehat{\mathrm{P}}_n)}) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \qquad (n \to \infty)$$

がわかる. 以上のことから補題 **??** が適用できるので, $\mathcal{G}_K$ は **P**-GC 族であることがわかる.

II. $\mathcal{G}$ が **P**-GC 族であることの証明: $G \in L_1(\mathrm{P})$ なので, 任意の $\delta > 0$ に対して, ある $K_0 > 0$ が存在して

$$\int_{G > K_0} G \, d\mathrm{P} \leq \delta$$

とできる.

$\boxed{\text{定理 6.20 の証明の続き}}$ 前の段階の議論から, 関数族 $\{G\mathbb{1}\{G \geq K_0\}\} \bigcup \mathcal{G}_{K_0}$ は P-GC 族なので, 十分大きな n に対して

$$\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\int_{G\leq K_0} g\,\mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}_n - \mathsf{P})\right| \leq \delta \quad \text{a.s.} \qquad \text{かつ} \qquad \int_{G>K_0} G\,\mathrm{d}\widehat{\mathsf{P}}_n \leq 2\delta \quad \text{a.s.}$$

とできる. 以上のことから

$$\begin{aligned}
&\sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\int g\,\mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}_n - \mathsf{P})\right| \\
&\quad\leq \sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\int_{G\leq K_0} g\,\mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}_n - \mathsf{P})\right| + \sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\int_{G>K_0} g\,\mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}_n - \mathsf{P})\right| \\
&\quad\leq \sup_{g\in\mathcal{G}}\left|\int_{G\leq K_0} g\,\mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}_n - \mathsf{P})\right| + \int_{G>K_0} G\,\mathrm{d}\widehat{\mathsf{P}}_n + \int_{G>K_0} G\,\mathrm{d}\mathsf{P} \\
&\quad\leq 4\delta \quad \text{a.s.}
\end{aligned}$$

がわかる. よって, 定理 6.20 は証明できた. $\square$

例 6.33 $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ とし,

$$\mathcal{G} := \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ 0 \le g(x) \le 1 \text{ で } g \text{ は非減少関数 }\}$$

とする. $N(\cdot, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_\infty(\widehat{\mathrm{P}}_n)})$ を半ノルム

$$\max_{1 \le j \le n} |g(X_j)|$$

により誘導される擬距離に関する被覆数とする. $\delta > 0$ とする. 関数 $g \in \mathcal{G}$ を

$$\tilde{g} = \left\lceil \frac{g(x)}{\delta} \right\rceil \qquad (x \in \mathbb{R})$$

とおく. ただし, $a \ge 0$ に対して, $\lceil a \rceil := \min\{b \in \mathbb{N};\ b \ge a\}$ である. すると $\tilde{g}$ は多くとも $m \le 1 + 1/\delta$ の飛躍点（$X_1, X_2, \ldots, X_n$ のいずれかの点）をもつ. したがって, $\tilde{g}$ を $n-1$ の 0 と m の 1 の列で表現できる. そのような列の個数は

$$\binom{m+n-1}{m}$$

となる.

例 **6.33** の続き　したがって

$$N(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_\infty(\widehat{\mathsf{P}}_n)}) \leq \binom{m+n-1}{m}$$

となる．　これより

$$\begin{aligned} H(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(\widehat{\mathsf{P}}_n)}) &\leq \log N_\infty(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_\infty(\widehat{\mathsf{P}}_n)}) \\ &\leq m\log(m+n-1) \\ &\leq \left(1+\frac{1}{\delta}\right)\log\left(n+\frac{1}{\delta}\right) \end{aligned}$$

となるので

$$\frac{1}{n}H(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(\widehat{\mathsf{P}}_n)}) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \qquad (n \to \infty)$$

がわかる．この主張と定理 **6.20** より，$\mathcal{G}$ は GC 族である．
さらに，$\mathcal{F} := \{\mathbb{1}_{(\infty,x]};\ x \in \mathbb{R}\}$ に対して，
$-\mathcal{F}+1 := \{-g+1;\ g \in \mathcal{F}\}$ とおくと $-\mathcal{F}+1 \subset \mathcal{G}$ となる．

例 6.33 の続き さらに

$$\widehat{\mathsf{F}}_n(x) = \int \mathbb{1}_{(-\infty, x]}\, \mathrm{d}\widehat{\mathsf{P}}_n, \qquad \mathsf{F}_n(x) = \int \mathbb{1}_{(-\infty, x]}\, \mathrm{d}\mathsf{P}$$

となることに注意する. すると

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\widehat{\mathsf{F}}_n(x) - \mathsf{F}\right| &= \sup_{g\in\mathcal{F}} \left|\int g\, \mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}_n - \mathsf{P})\right| \\
&= \sup_{g\in-\mathcal{F}+1} \left|\int g\, \mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}_n - \mathsf{P})\right| \\
&\leq \sup_{g\in\mathcal{G}} \left|\int g\, \mathrm{d}(\widehat{\mathsf{P}}_n - \mathsf{P})\right| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \qquad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

となる. したがって, Grevenko-Cantelli の定理

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\widehat{\mathsf{F}}(x) - \mathsf{F}\right| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \qquad (n \to \infty)$$

がわかる.

本日の講義内容 (1)

- 対称化トリックと Dudley のエントロピー積分による GC 族の定理 (定理 6.20)
- 対称化トリック
- Dudley のエントロピー積分
- 定理 6.20 の証明
  - 素朴な証明
  - chaining argument を用いた証明