

第B章 補遺

節 B.1 では大数の強法則の証明を述べる. 節 B.2 では大数の強法則の証明を述べる. 節 B.3 では Dynkin の補題の証明を述べる. 節 B.4 では Dynkin の補題の応用例をいくつか述べる. 節 B.5 では絶対連続関数の性質をまとめた. 節 B.6 では凸関数の性質をまとめた. 節 B.7 では Radon–Nikodym により条件付期待値を導入する. 節 B.8 では Radon–Nikodym の定理により条件付き期待値を導入する. 節 B.9 では Radon–Nikodym の定理により Neyman–Fisher の因子分解定理の証明を述べる. 節 B.10 では Dini の定理の証明を述べる.

B.1 大数の強法則の証明

B.1.1 証明のための準備の補題

大数の強法則を証明するための Borel–Cantelli の補題を述べる.

補題 B.1 (Borel–Cantelli の補題). $\sum_{n=1}^{\infty} \Pr(E_n) < \infty$ なる任意の事象列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\Pr\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\right) = \Pr(E_n, \text{i.o.}) = 0$$

となる.

Proof. $G_k := \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$, $G := \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ とおく. すると $G_k \supset G_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$) で $G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ である. 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} \Pr(G) &\leq \Pr(G_k) \quad (\because \text{補題 1.7(4)}) \\ &\leq \sum_{n=k}^{\infty} \Pr(E_n). \quad (\because \text{補題 1.7(7)}) \end{aligned}$$

となる. $\sum_{n=1}^{\infty} \Pr(E_n) < \infty$ なので, $\sum_{n=k}^{\infty} \Pr(E_n) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ となるので, $\Pr(G_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ である. ここで, 補題 1.7(6) を用いると

$$\Pr(G) = \Pr\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Pr(G_k) = 0$$

がわかる. □

補題 B.2 (Borel-Cantelli の逆). $\sum_{n=1}^{\infty} \Pr(E_n) = \infty$ なる任意の独立な事象列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$\Pr\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\right) = \Pr(E_n, \text{i.o.}) = 1$$

となる.

Proof. $p_n := \Pr(E_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく. 独立性から

$$\Pr\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} E_n^c\right) = \prod_{n=k}^{\infty} (1 - p_n) \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

となる. これは, $r \geq k$ に対して

$$\Pr\left(\bigcap_{n=k}^r E_n^c\right) = \prod_{n=k}^r (1 - p_n)$$

となる. 実際

$$\Pr\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} E_n^c\right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \Pr\left(\bigcap_{n=k}^r E_n^c\right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{n=k}^r (1 - p_n) = \prod_{n=k}^{\infty} (1 - p_n)$$

がわかる. つぎに, $1 - x \leq e^{-x}$ ($x \geq 0$) に注意すると, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$0 \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{n=k}^r (1 - p_n) \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \prod_{n=k}^r e^{-p_n} = \lim_{r \rightarrow \infty} e^{-\sum_{n=k}^r p_n} = e^{-\sum_{n=k}^{\infty} p_n} = 0$$

となる. よって

$$\Pr\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} E_n^c\right) = 0 \tag{B.1}$$

がわかる. しかし

$$(\limsup E_n)^c = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\right)^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n^c$$

であることと補題 1.7(5) に注意すると

$$\begin{aligned} \Pr\left((\limsup E_n)^c\right) &= \Pr\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n^c\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Pr\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} E_n^c\right) \\ &= 0 \quad (\because \text{B.1}) \end{aligned}$$

が示せた.

つぎに, 大数法則を示すための補題をふたつ述べる.

補題 B.3. $n \in \mathbb{N}$ に対して $Y_n = X_n \mathbb{1}\{|X_n| \leq n\}$ とする. このとき

$$S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

$$T_n := Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

とすると

$$\frac{T_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu(n \rightarrow \infty) \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu(n \rightarrow \infty)$$

が成立する.

Proof. Y_n の定義と系 2.9 から

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Pr(X_n \neq Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(|X_n| > n) \leq \int_0^{\infty} \Pr(|X_1| > t) dt = \mathbb{E}[|X_1|] < \infty$$

となる. よって Borel-Cantelli の第 1 の補題 (補題 B.1) から

$$\Pr\left(X_n \neq Y_n, \text{ i.o.}\right) = 0$$

がわかる. すると $\omega \in \Omega$ に対して有限個の n に対して $X_n \neq Y_n$ なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n(\omega) - T_n(\omega)|}{n} = 0$$

となる. よって定理の主張は証明された. $\square$

補題 B.4. 定理 4.19 と補題 B.3 の仮定のもと

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Var}(Y_n)}{n^2} \leq 4\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$$

が成立する.

Proof. 系 2.9 を用いて, $Y_n = X_n \mathbb{1}\{|X_n| \leq n\}$ と $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は i.i.d. 確率変数列であること思い出すと

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y_n] &\leq \mathbb{E}[Y_n^2] = \int_0^{\infty} 2t \Pr(|Y_n| > t) dt = \int_0^n 2t \Pr(|Y_n| > t) dt \\ &= \int_0^n 2t \Pr(|X_n| > t) dt = \int_0^n 2t \Pr(|X_1| > t) dt \\ &= \int_0^{\infty} \mathbb{1}\{t < n\} 2t \Pr(|X_1| > t) dt \end{aligned}$$

となる. よって, Tonelli の定理より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{\infty} \mathbb{1}\{t < n\} 2t \Pr(|X_1| > t) dt$$

$$= \int_0^\infty \left\{ \sum_{n=1}^\infty \frac{\mathbb{1}\{t < n\}}{n^2} \right\} 2t \Pr(|X_1| > t) dt$$

となる. 最後の等号は, 各項が非負なので, Fubini の定理を用いることで和と積分の記号の交換が保証されることがわかる. よって後は $\forall t \geq 0$ に対して

$$2t \sum_{n>t} \frac{1}{n^2} \leq 4 \quad (\text{B.2})$$

を示せばよい. $m \geq 2$ ($m \in \mathbb{N}$) に対して

$$\sum_{n \geq m} \frac{1}{n^2} \leq \int_{m-1}^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{m-1}$$

となる. $t \geq 1$ のとき, (B.2) の和は $n = [t] + 1 \geq 2$ で始まるので

$$2t \sum_{n>t} \frac{1}{n^2} \leq \frac{2t}{[t]} \leq 4 \quad (\text{B.3})$$

となる¹. $0 \leq t \leq 1$ の場合

$$2t \sum_{n>t} \frac{1}{n^2} \leq 2 \left(1 + \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2} \right) \leq 4 \quad (\text{B.4})$$

となる. よって (B.3), (B.4) から (B.2) がわかる. $\square$

B.1.2 大数の強法則 (定理 4.19) の証明

$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$X_n^+ := \max\{X_n, 0\}, \quad X_n^- := \max\{-X_n, 0\}$$

とおくと X_n^+ と X_n^- は定理 4.19 の仮定をみたし, $X_n = X_n^+ - X_n^-$ である. したがって一般性を失うことなく $X_n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$) と仮定してよい.

$\alpha > 1$ をとり

$$k(n) = [\alpha^n]$$

と定める. $\forall \epsilon > 0$ を取る. Chebyshev の不等式から

$$\sum_{n=1}^\infty \Pr\left(|T_{k(n)} - \mathbb{E}[T_{k(n)}]| > \epsilon k(n)\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{\text{Var}[T_{k(n)}]}{\{k(n)\}^2}$$

¹なぜならば

$$\frac{t}{[t]} \leq 2 \quad (t \geq 1)$$

であることからわかる.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\{k(n)\}^2} \sum_{m=1}^{k(n)} \text{Var}[Y_m] \\
&= \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{m=1}^{\infty} \text{Var}[Y_m] \sum_{n: k(n) \geq m} \frac{1}{\{k(n)\}^2}
\end{aligned} \tag{B.5}$$

を得る. 最後の等号は, すべての項が非負なので Fubini の定理を用いて和の順番を交換した. $n \geq 1$ に対して, $k(n) = [\alpha^n]$ とおく. このとき, 十分大きな n に対して, $[\alpha^n] \geq \frac{\alpha^n}{2}$ となるので

$$\sum_{n: \alpha^n \geq m} \frac{1}{[\alpha^n]^2} \leq 4 \sum_{n: \alpha^n \geq m} \frac{1}{\alpha^{2n}} \leq \frac{4}{(1 - \alpha^{-2})m^2} \tag{B.6}$$

となる. (B.5) と (B.6) を合わせると

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \Pr\left(|T_{k(n)} - \mathbb{E}[T_{k(n)}]| > \epsilon k(n)\right) &\leq \frac{4}{(1 - \alpha^{-2})\epsilon^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[Y_m^2]}{m^2} \\
&< \infty \quad (\because \text{補題 B.4})
\end{aligned}$$

となる. ϵ は任意だったので

$$\frac{T_{k(n)} - \mathbb{E}[T_{k(n)}]}{k(n)} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を得る. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は i.i.d. 確率変数列で $Y_n = X_n \mathbb{1}\{|X_n| \leq n\}$ であったことを思い出す. $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ のとき, すると $Y_n - X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$ ($n \rightarrow \infty$) となる²ので, 有界収束定理から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n + (Y_n - X_n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\mathbb{E}[X_n]}_{=\mathbb{E}[X_1]} + \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_n - X_n] = \mathbb{E}[X_1]$$

²実際, $X_n \neq Y_n$ と $|X_n| > n$ は同値である. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は i.i.d. 確率変数列なので

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Pr(|X_n| > n) = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(|X_1| > n)$$

である. $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$ と系 2.9 から

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Pr(|X_1| > n) < \infty$$

となる. したがって, Borel–Cantelli の補題から

$$\Pr(|X_n| > n \text{ i.o.}) = 0$$

となる. したがって, $X_n - Y_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$ ($n \rightarrow \infty$) がわかる.

である. よって

$$\frac{E[T_{k(n)}]}{k(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[X_1]$$

を得る. これより

$$\frac{T_{k(n)}}{k(n)} \xrightarrow{\text{a.s.}} E[X_1] \quad (n \rightarrow \infty)$$

がわかる. $Y_n \geq 0 (\forall n \in \mathbb{N})$ なので, $k(n) \leq m < k(n+1) (m \in \mathbb{N})$ に対して

$$\frac{T_{k(n)}}{k(n+1)} \leq \frac{T_m}{m} \leq \frac{T_{k(n+1)}}{k(n)}$$

である. $k(n) = [\alpha^n]$ だったので,

$$\frac{k(n+1)}{k(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$$

である. よって

$$\frac{1}{\alpha} E[X_1] \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{T_m}{m} \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{T_m}{m} \leq \alpha E[X_1]$$

となる. $\alpha > 1$ は任意だったので

$$\frac{T_m}{m} \xrightarrow{\text{a.s.}} E[X_1] \quad (m \rightarrow \infty)$$

がわかる. □

B.2 中心極限定理の証明

まず $E[X_1^3] < \infty$ を仮定して証明をする.

$$Y_j = \frac{X_j - \mu}{\sigma}, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

とおくと $E[Y_1] = 0, E[Y_1^2] = 1, E[|Y_1|^3] < \infty$ となることに注意する. $Z_1, Z_2, \dots, Z_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, 1)$ とし

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n Y_j, \quad S = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n Z_j \sim N(0, 1)$$

とおく.

$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\Pr(S_n \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Pr(S \leq x) \quad (\text{B.7})$$

を示せばよい. ここで

$$g(y) = \mathbb{1}_{(-\infty, x]}(y) \quad (y \in \mathbb{R})$$

とおくと (B.7) を

$$\mathbb{E}[g(S_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[g(S)] \quad (\text{B.8})$$

と書きかえることができる. さらに $\forall \delta > 0$ に対して関数 $g_{\delta, x} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ を以下のような性質をもつ関数とする.

- $g_{\delta, x}(y) = 1 \ (y \leq x).$
- $g_{\delta, x}(y) = 0 \ (y \geq x + \delta).$
- $g_{\delta, x}$ は有界な 3 次の導関数をもつ. 3 次の導関数の絶対値の上界を C と書くことにする.

さらに $g_{\delta, x-\delta}(y) = g_{\delta, x}(y + \delta)$ と定める. すると

$$g_{\delta, x-\delta}(y) \leq g(y) \leq g_{\delta, x}(y), \quad (y \in \mathbb{R})$$

となる. このことから $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} \Pr(S_n \leq x) &\leq \mathbb{E}[g_{\delta, x}(S_n)] \\ &= \mathbb{E}[g_{\delta, x}(S_n)] - \mathbb{E}[g_{\delta, x}(S)] + \mathbb{E}[g_{\delta, x}(S)] \\ &\leq \Pr(S \leq x + \delta) + |\mathbb{E}[g_{\delta, x}(S_n)] - \mathbb{E}[g_{\delta, x}(S)]| \end{aligned}$$

を得る. 同様に

$$\Pr(S_n \leq x) \geq \Pr(S \leq x - \delta) - |\mathbb{E}[g_{\delta, x-\delta}(S_n)] - \mathbb{E}[g_{\delta, x-\delta}(S)]|$$

を得る. これらの不等式を合わせると

$$\begin{aligned} &\Pr(S \leq x + \delta) + |\mathbb{E}[g_{\delta, x}(S_n)] - \mathbb{E}[g_{\delta, x}(S)]| \\ &\geq \Pr(S_n \leq x) \\ &\geq \Pr(S \leq x - \delta) - |\mathbb{E}[g_{\delta, x-\delta}(S_n)] - \mathbb{E}[g_{\delta, x-\delta}(S)]| \end{aligned}$$

となる. δ を 0 に近づけると $\Pr(S \leq x \pm \delta)$ は $\Pr(S \leq x)$ に近づく. したがって

$$\mathbb{E}[g_{\delta, x}(S_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[g_{\delta, x}(S)] \quad \text{と} \quad \mathbb{E}[g_{\delta, x-\delta}(S_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[g_{\delta, x-\delta}(S)] \quad (\text{B.9})$$

を示せばよい. よって $h: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ を有界な 3 次の導関数をもつ関数として (B.9) を示す.

$1 \leq m \leq n+1$ に対して

$$T_m = \frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \cdots + Y_{m-1} + Z_m + \cdots + Z_n)$$

とおく. さらに, $T_1 = S_n$ と $T_{n+1} = S$ とする. このとき

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[h(S_n)] - \mathbb{E}[h(S)]| &= \left| \sum_{m=1}^n \{\mathbb{E}[h(T_m)] - \mathbb{E}[h(T_{m+1})]\} \right| \\ &\leq \sum_{m=1}^n |\mathbb{E}[h(T_m) - h(T_{m+1})]| \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

と書きかえる. 次に $m = 1, 2, \dots, n$ に対して

$$U_m = \frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \cdots + Y_{m-1} + Z_{m+1} + \cdots + Z_n)$$

とおくと

$$T_m = U_m + \frac{1}{\sqrt{n}}Z_m, \quad T_{m+1} = U_m + \frac{1}{\sqrt{n}}Y_m$$

となる. Taylor 展開を用いると

$$\begin{aligned} h(T_m) - h(U_m) &= (T_m - U_m) \dot{h}(U_m) + \frac{1}{2}(T_m - U_m)^2 \ddot{h}(U_m) \\ &\quad + \frac{1}{6}(T_m - U_m)^3 \dddot{h}(U_m^*), \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} h(T_{m+1}) - h(U_m) &= (T_{m+1} - U_m) \dot{h}(U_m) + \frac{1}{2}(T_{m+1} - U_m)^2 \frac{1}{2} \dot{h}(U_m) + \ddot{h}(U_m) \\ &\quad + \frac{1}{6}(T_{m+1} - U_m)^3 \dddot{h}(U_m^{**}), \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

を得る. ただし $\dot{h}, \ddot{h}, \dddot{h}$ は h の 1 次, 2 次, 3 次の導関数で, U_m^*, U_m^{**} は T_m と U_m の間と T_{m+1} と U_m の間の数である. U_m は Y_m と Z_m の両方とも独立であるので

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\dot{h}(U_m)Z_m] &= \mathbb{E}[\dot{h}(U_m)Y_m] = 0, \\ \mathbb{E}[\ddot{h}(U_m)Z_m^2] &= \mathbb{E}[\ddot{h}(U_m)] = \mathbb{E}[\ddot{h}(U_m)Y_m^2], \\ |\mathbb{E}[\dddot{h}(U_m^*)]| &\leq C, \quad |\mathbb{E}[\dddot{h}(U_m^{**})]| \leq C \end{aligned}$$

となる. 上の期待値と (B.11) と (B.12) を合わせると

$$\left| \mathbb{E}[h(T_m) - h(T_{m+1})] \right| = \left| \mathbb{E}[(h(T_m) - h(U_m)) - (h(T_{m+1}) - h(U_m))] \right|$$

$$\leq \left| \frac{C}{6n^{3/2}} \mathbb{E}[|Z_m|^3 + |Y_m|^3] \right|$$

を得る. この式を (B.10) に代入すると

$$\left| \mathbb{E}[h(S_n)] - \mathbb{E}[h(S)] \right| \leq \frac{C}{6\sqrt{n}} \mathbb{E}[|Z_1|^3 + |Y_1|^3] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

を得る. よって Y_1 が有界な 3 次の積率をもつとき

$$S_n \rightsquigarrow S \sim \mathbf{N}(0, 1) \quad (n \rightarrow \infty)$$

が示せた.

最後に $\mathbb{E}[Y_1^3] < \infty$ の仮定を除くための議論を行う. そのために任意の $\epsilon > 0$ とし, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\ddot{h}(y)| \leq C'$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\ddot{h}(y)| \leq C$ をみたす定数 C をとる. $m = 1, 2, \dots, n$ に対して, $|Y_m| \leq \epsilon\sqrt{n}$ のとき

$$\begin{aligned} & \left| h(T_m) - h(U_m) - \frac{\dot{h}(U_m)Y_m}{\sqrt{n}} - \frac{\ddot{h}(U_m)Y_m^2}{2n} \right| \mathbb{1}\{|Y_m| \leq \epsilon\sqrt{n}\} \\ & \leq C \left| \frac{\ddot{h}(U_m^*)Y_m^3}{6n^{3/2}} \right| \mathbb{1}\{|Y_m| \leq \epsilon\sqrt{n}\} \\ & \leq \frac{C\epsilon}{6n} Y_m^2 \mathbb{1}\{|Y_m| \leq \epsilon\sqrt{n}\} \end{aligned}$$

となる. 一方 $|Y_m| > \epsilon\sqrt{n}$ のとき

$$\begin{aligned} & \left| h(T_m) - h(U_m) - \frac{\dot{h}(U_m)Y_m}{\sqrt{n}} - \frac{\ddot{h}(U_m)Y_m^2}{2n} \right| \mathbb{1}\{|Y_m| > \epsilon\sqrt{n}\} \\ & \leq \left\{ \left| h(T_m) - h(U_m) - \frac{\dot{h}(U_m)Y_m}{\sqrt{n}} \right| + \left| \frac{\ddot{h}(U_m)Y_m^2}{2n} \right| \right\} \mathbb{1}\{|Y_m| > \epsilon\sqrt{n}\} \\ & \leq \left\{ \left| \frac{\ddot{h}(U_m^{***})Y_m^2}{2n} \right| + \left| \frac{\ddot{h}(U_m)Y_m^2}{2n} \right| \right\} \mathbb{1}\{|Y_m| > \epsilon\sqrt{n}\} \\ & \leq \frac{C''Y_m^2}{n} \mathbb{1}\{|Y_m| > \epsilon\sqrt{n}\} \end{aligned}$$

となる. ただし U_m^{***} は T_m と U_m の間にあるものである. これらの不等式を合わせると

$$\left| h(T_m) - h(U_m) - \frac{\dot{h}(U_m)Y_m}{\sqrt{n}} - \frac{\ddot{h}(U_m)Y_m^2}{2n} \right|$$

$$\leq \frac{C\epsilon}{6n} Y_m^2 \mathbb{1}\{|Y_m| \leq \epsilon\sqrt{n}\} + \frac{C'Y_m^2}{n} \mathbb{1}\{|Y_m| > \epsilon\sqrt{n}\}$$

となる. この式と (B.12) を合わせると

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[h(S_n)] - \mathbb{E}[h(S)]| &\leq \frac{C}{\sqrt{n}} \mathbb{E}[Z_1^3] + \frac{C}{6} \mathbb{E}[Y_1^2 \mathbb{1}\{|Y_1| \leq \epsilon\sqrt{n}\}] \\ &\quad + C' \mathbb{E}[Y_1^2 \mathbb{1}\{|Y_1| > \epsilon\sqrt{n}\}] \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{n}} \mathbb{E}[Z_1^3] + \frac{C\epsilon}{6} + \frac{C'}{6} \mathbb{E}[Y_1^2 \mathbb{1}\{|Y_1| > \epsilon\sqrt{n}\}] \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{C'}{6} \epsilon \end{aligned}$$

を得る. 上の式で $\epsilon \rightarrow 0$ とすれば

$$\mathbb{E}[h(S_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[h(S)]$$

が証明できた. □

B.3 Dynkin 族の議論

定義 B.5. Ω を空でない集合とし, $\mathcal{L}$ と $\mathcal{P}$ を Ω の部分集合族とする.

(1) 集合族 $\mathcal{P}$ が π システム であるとは

$$A, B \in \mathcal{P} \implies A \cap B \in \mathcal{P}$$

が成立するときをいう.

(2) 集合族 $\mathcal{L}$ が λ システム であるとは, つぎの条件 (i) ~ (iii) が成り立つときをいう.

(i) $\Omega \in \mathcal{L}$.

(ii) $A, B \in \mathcal{L}$ かつ $A \subset B \implies B \setminus A \in \mathcal{L}$.

(iii) $A_j \in \mathcal{L}$ かつ $A_j \subset A_{j+1}$ ($j = 1, 2, \dots$) $\implies \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{L}$.

次に述べる命題は λ システムであるための同値条件である.

命題 B.6. 空でない集合 Ω の部分集合族 $\mathcal{L}$ が λ システムであるために必要十分条件は次の条件 (i) ~ (iii) をすべてみたすことである.

(i)' $\Omega \in \mathcal{L}$.

(ii)' $A \in \mathcal{L} \implies A^c \in \mathcal{L}$.

(iii)' $A_j \in \mathcal{L}$ ($j = 1, 2, \dots$) かつ $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$) $\implies \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{L}$.

Proof. ① ($\Rightarrow$) の証明: 定義 B.5(2) の (i) $\sim$ (iii) を仮定して, (ii)' と (iii)' を確認すればよい.

①a) (ii)' の確認: $A \in \mathcal{L}$ のとき, $A \subset \Omega$ かつ $\Omega \in \mathcal{L}$ なので, 定義 B.5(ii) から

$$A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{L}$$

となる.

①b) (iii)' の確認: まず, $A, B \in \mathcal{L}$ かつ $A \cap B = \emptyset$ のとき

$$A \cup B \in \mathcal{L} \quad (\text{B.13})$$

を示す.

仮定と (ii)' から $A^c \in \mathcal{L}$ かつ $B \subset A^c$ である. なぜならば, $\forall \omega \in B$ のとき, $A \cap B = \emptyset$ なので, $\omega \notin A$ となる. よって $\omega \in A^c$ がわかるので, $B \subset A^c$ が示せた.

このことと (ii) から $A^c \setminus B \in \mathcal{L}$ となる. さらに

$$A^c \cap B^c = A^c \setminus B \in \mathcal{L} \quad (\text{B.14})$$

となることと (ii)' より

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{L}$$

がわかる. よって

$$A, B \in \mathcal{L} \implies A \cup B \in \mathcal{L} \quad (\text{B.15})$$

がわかる.

$A_j \in \mathcal{L} (j = 1, 2, \dots)$ と $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ とする. このとき

$$B_n := \bigcup_{j=1}^n A_j \quad (n \in \mathbb{N})$$

とおく. (B.15) より $B_n \in \mathcal{L}$ となる. さらに, B_n の定め方から

$$B_n \subset B_{n+1}$$

となる. よって定義 B.5(iii) から

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{L}$$

がわかる. よって (i)' $\sim$ (iii)' が確認できた.

($\Leftarrow$): ② (ii) の確認: 命題 B.6(i)' $\sim$ (iii)' を仮定して, 定義 B.5(2) の (ii) と (iii) を確認すればよい.

②a (ii) の確認: $A, B \in \mathcal{L}$ かつ $A \subset B$ とする. すると (ii)' から $A^c, B^c \in \mathcal{L}$ となる. さらに $A \subset B$ から $A \cap B^c = \emptyset$ となる. よって (iii)' から $A \cup B^c \in \mathcal{L}$ となる. 再度, (ii)' を用いると

$$B \setminus A = B \cap A^c = (A \cup B^c)^c \in \mathcal{L}$$

がわかる.

②b (iii) の確認: $A_n \in \mathcal{L}$ かつ $A_n \subset A_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) とする. ここで

$$B_1 := A_1, \quad B_n := A_{n+1} \setminus A_n \quad (n \geq 2)$$

とおくと (ii) から $B_n \in \mathcal{L}$ となる. さらに B_n の定め方から

$$B_n \cap B_m = \emptyset \quad (m \neq n)$$

となる. よって (iii)' から

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{L}$$

がわかる. 以上から (i) $\sim$ (iii) が確認できた. $\square$

命題 B.7. Ω を空でない集合とし, $\mathcal{C}$ を Ω の部分集合族とする. 部分集合族 $\mathcal{C}$ が π システムかつ λ システムならば, $\mathcal{C}$ は σ 集合族となる.

Proof. ① $\mathcal{C}$ は体であることの証明: そのために, ①a $\Omega \in \mathcal{C}$ ①b $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$, ①c $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{C}$ を示せばよい.

①a $\Omega \in \mathcal{C}$ の証明: $\mathcal{C}$ は λ システムなので, 命題 B.6(ii)' から $\Omega \in \mathcal{C}$ である.

①b $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$ の証明: $A \in \mathcal{C}$ とする. ①a から $\Omega \in \mathcal{C}$ であり, $A \subset \Omega$ である. よって, $\mathcal{C}$ は λ システムであるので, 定義 B.5(2) の (ii) から

$$A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{C}$$

となる.

①c $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{C}$ の証明: ①b から $A^c, B^c \in \mathcal{C}$ である. さらに, $\mathcal{C}$ は π システムなので, $A \cap B^c, A^c \cap B, A \cap B \in \mathcal{C}$ であり, 互いに排反である. よって, 命題 B.6 の (iii)' から

$$A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B) \in \mathcal{C}$$

がわかる.

①a) ~ ①c) より, $\mathcal{C}$ は体であることが確認できた.

② $A_j \in \mathcal{C} (j = 1, 2, \dots) \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{C}$ の証明: $A_j \in \mathcal{C} (j = 1, 2, \dots)$ とする. $\mathcal{C}$ は体なので

$$B_n := \bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathcal{C} \quad (n \in \mathbb{N})$$

となる. さらに B_n の定め方から $B_n \subset B_{n+1} (n = 1, 2, \dots)$ となる. よって, $\mathcal{C}$ は λ システムなので, 定義 B.5(2) の (iii) から

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{C}$$

がわかる. 以上から $\mathcal{C}$ は σ 集合族であることがわかる. $\square$

命題 B.8. Ω を空でない集合とする. Ω の部分集合族 $\mathcal{P}$ を π システムとし, $\mathcal{L}[\mathcal{P}]$ を $\mathcal{P}$ を含む最小の λ システムとする. このとき, $\mathcal{L}[\mathcal{P}]$ は π システムとなる.

Proof. $A \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$ と $C \in \mathcal{P}$ に対して

$$\mathcal{G}_A := \{B \in \sigma[\mathcal{P}]; A \cap B \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]\}, \quad \mathcal{G}_C := \{B \in \sigma[\mathcal{P}]; C \cap B \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]\},$$

とそれぞれ定める. ただし, $\sigma[\mathcal{P}]$ を $\mathcal{P}$ を含む最小の σ 加法族とする. このとき, 以下の主張を順に証明していく. $\mathcal{G}_A$ に関する以下の主張を

- ① $A \in \mathcal{L}[\mathcal{P}] \Rightarrow \mathcal{G}_A$ は λ システム,
- ② $C \in \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{L}[\mathcal{P}] \subset \mathcal{G}_C$
- ③ $C \in \mathcal{P}$ かつ $A \in \mathcal{L}[\mathcal{P}] \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$
- ④ $A \in \mathcal{L}[\mathcal{P}] \Rightarrow \mathcal{L}[\mathcal{P}] \subset \mathcal{G}_A$

を順に証明していき

- ⑤ $\mathcal{L}[\mathcal{P}]$ は π システム,

を示す.

① $A \in \mathcal{L}[\mathcal{P}] \Rightarrow \mathcal{G}_A$ は λ システム の証明: $A \in \mathcal{P}[\mathcal{P}]$ とする. $\mathcal{G}_A$ は λ システムであることを示すために, 命題 B.6 の条件 (i)' $\Omega \in \mathcal{G}_A$, (ii)' $B \in \mathcal{G}_A \Rightarrow B^c \in \mathcal{G}_A$ (iii)' $B_j \in \mathcal{G}_A (j = 1, 2, \dots)$ かつ $B_i \cap B_j = \emptyset (i \neq j) \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{G}_A$, を順に確認していく.

①a) $\Omega \in \mathcal{G}_A$ の確認: $A \cap \Omega = A \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$ なので, $\mathcal{G}_A$ の定義から $\Omega \in \mathcal{G}_A$ がわかる.

①b) $B \in \mathcal{G}_A \Rightarrow B^c \in \mathcal{G}_A$ の確認: $B \in \mathcal{G}_A$ とする. このとき

$$B^c \cap A = A \setminus (A \cap B)$$

に注意する. $B \in \mathcal{G}_A$ なので, $\mathcal{G}_A$ の定義から

$$A \cap B \in \mathcal{L}[\mathcal{P}] \quad (\text{B.16})$$

である. 仮定と (B.16) から $A, A \cap B \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$ かつ $A \cap B \subset A$ である. $\mathcal{L}[\mathcal{P}]$ は λ システムなので, 定義 B.5(2) の (ii) から

$$B^c \cap A = A \setminus (A \cap B) \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$$

となる. よって $A \cap B^c \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$ がわかる. したがって, $\mathcal{G}_A$ の定義から $B^c \in \mathcal{G}_A$ となる.

①c) $B_j \in \mathcal{G}_A (j = 1, 2, \dots)$ かつ $B_i \cap B_j = \emptyset (i \neq j) \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{G}_A$ の確認:

まず, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ は互いに排反な列で $B_n \in \mathcal{G}_A (n = 1, 2, \dots)$ とする. このとき, $\{A \cap B_n\}_{n=1}^{\infty}$ は互いに排反な列であることに注意する. さらに, $A \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$ かつ $B_n \in \mathcal{G}_A$ なので, B.16 から $A \cap B_n \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$ となる. $\{A \cap B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}[\mathcal{P}]$ であり, $\mathcal{L}[\mathcal{P}]$ は λ システムである. すると, 分配法則と命題 B.6(iii)' から

$$A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A \cap B_j) \in \mathcal{L}[\mathcal{P}] \quad (\text{B.17})$$

となることがわかる. ここで, $\mathcal{G}_A$ の定義から, $B_j \in \mathcal{G}_A (j = 1, 2, \dots)$ から $B_j \in \sigma[\mathcal{P}]$ であるので, $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \sigma[\mathcal{P}]$ である. よって, $\mathcal{G}_A$ の定義と (B.17) から

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{G}_A$$

がわかる.

よって ①a) ~ ①c) から $\mathcal{G}_A$ は λ システムであることがわかる. $\square$

② $C \in \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{L}[\mathcal{P}] \subset \mathcal{G}_C$ の証明: $C \in \mathcal{P} \subset \mathcal{L}[\mathcal{P}]$ を取る. いま, $B \in \mathcal{P} \subset \sigma[\mathcal{P}]$ をとる. 命題の仮定から $\mathcal{P}$ は π システムであることを思い出す. よって, 定義 B.5(1) から

$$C \cap B \in \mathcal{P} \subset \mathcal{L}[\mathcal{P}]$$

となる. $\mathcal{G}_C$ の定義を思い出すと $B \in \mathcal{G}_C$ である. よって, $B \in \mathcal{P} \Rightarrow B \in \mathcal{G}_C$ が示せたので, $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_C$ である. 一方, ① の主張から $\mathcal{G}_C$ は λ システムであるので, $\mathcal{G}_C$ は λ システムで $\mathcal{P}$ を含む λ システムとなる. ここで, $\mathcal{L}[\mathcal{P}]$ は $\mathcal{P}$ を含む最小の λ システムであることを思い出すと

$$\mathcal{G}_C \supset \mathcal{L}[\mathcal{P}]$$

がわかる.

③ $C \in \mathcal{P}$ かつ $A \in \mathcal{L}[\mathcal{P}] \Rightarrow A \cap C \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$ の証明: ② の主張から

$$A \in \mathcal{L}[\mathcal{P}] \subset \mathcal{G}_C \subset \sigma[\mathcal{P}]$$

となる. よって, $\mathcal{G}_C$ の定義から

$$A \cap C \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$$

がわかる.

④ $A \in \mathcal{L}[\mathcal{P}] \Rightarrow \mathcal{L}[\mathcal{P}] \subset \mathcal{G}_A$ の証明: $C \in \mathcal{P} \subset \sigma[\mathcal{P}]$ と $A \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$ を取る.

③ の主張から

$$A \cap C = C \cap A \in \mathcal{L}[\mathcal{P}] \quad (\text{B.18})$$

となる. よって, $A \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$ で (B.18) であることに注意して, $\mathcal{G}_A$ の定義を思い出すと $C \in \mathcal{G}_A$ となる. 以上から

$$C \in \mathcal{P} \Rightarrow C \in \mathcal{G}_A$$

がわかる. すなわち, $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_A$ である. さらに, ① の主張から $\mathcal{G}_A$ は λ システムである. 以上から, $\mathcal{G}_A$ は $\mathcal{P}$ を含む λ システムであることがわかる. よって, $\mathcal{L}[\mathcal{P}]$ は $\mathcal{P}$ を含む最小の λ システムなので

$$\mathcal{L}[\mathcal{P}] \subset \mathcal{G}_A$$

がわかる. □

⑤ $\mathcal{L}[\mathcal{P}]$ は π システム: $A, B \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$ とする. ④ の主張から, $B \in \mathcal{L}[\mathcal{P}] \subset \mathcal{G}_A \subset \sigma[\mathcal{P}]$ である. $\mathcal{G}_A$ の定義から

$$A \cap B \in \mathcal{L}[\mathcal{P}]$$

となり, $\mathcal{L}[\mathcal{P}]$ は π システムであることがわかる. □

定理 B.9. Ω を空でない集合とする. Ω の部分集合族 $\mathcal{P}$ を π システムとし, $\mathcal{L}$ を λ システムかつ $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ とする. このとき

$$\sigma[\mathcal{P}] \subset \mathcal{L} \quad (\text{B.19})$$

が成立する.

Proof. 命題 B.8 から $\mathcal{L}[\mathcal{P}]$ は π システムである. よって命題 B.7 より $\mathcal{L}[\mathcal{P}]$ は $\mathcal{P}$ を含む σ 加法族である. よって $\sigma[\mathcal{P}]$ は $\mathcal{P}$ を含む最小の σ 加法族だから

$$\mathcal{L}[\mathcal{P}] \supset \sigma[\mathcal{P}] \quad (\text{B.20})$$

となる. さらに, 定理の仮定から, $\mathcal{L}$ は $\mathcal{P}$ を含む λ システムである. 一方, $\mathcal{L}[\mathcal{P}]$ は $\mathcal{P}$ を含む最小の λ システムから

$$\mathcal{L} \supset \mathcal{L}[\mathcal{P}] \quad (\text{B.21})$$

となる. (B.20) と (B.21) を合わせると

$$\mathcal{L} \supset \sigma[\mathcal{P}]$$

がわかる. □

B.4 Dynkin の定理の応用例

B.4.1 その 1

補題 B.10. P_1 と P_2 を標本空間 $(\mathbb{X}, \mathcal{B})$ 上の確率測度とする. 集合族

$$\mathcal{L} := \{B \in \mathcal{B}; P_1(B) = P_2(B)\} \quad (\text{B.22})$$

は λ システムである.

Proof. 命題 B.6 の条件 (i)' $\sim$ (iii)' を順に確認していく.

(i)' $P_1(\mathbb{X}) = P_2(\mathbb{X})$ なので, $\mathbb{X} \in \mathcal{L}$ がわかる.

(ii)' $A \in \mathcal{L}$ とする. すなわち

$$P_1(A) = P_2(A)$$

である. よって

$$P_1(A^c) = 1 - P_1(A) = 1 - P_2(A) = P_2(A^c)$$

であるので, $A^c \in \mathcal{L}$ がわかる.

(iii)' $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ は $\mathcal{L}$ の互いに排反な列とする. このとき, $\mathcal{L}$ の定義 (B.22) から

$$P_1(A_j) = P_2(A_j) \quad (j = 1, 2, \dots)$$

となる. よって

$$P_1\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P_1(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P_2(A_j) = P_2\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)$$

となるので

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{L}$$

がわかる. □

補題 B.11. P_1 と P_2 は標本空間 $(\mathbb{X}, \mathcal{B})$ 上の確率測度とする. $\mathcal{P}$ は π システムで, $\sigma[\mathcal{P}] = \mathcal{B}$ とする. このとき

$$\forall A \in \mathcal{P} \implies P_1(A) = P_2(A) \quad (\text{B.23})$$

ならば

$$\forall B \in \mathcal{B} \implies P_1(B) = P_2(B) \quad (\text{B.24})$$

が成り立つ.

Proof. 補題 B.10 から

$$\mathcal{L} := \{A \in \mathcal{B}; P_1(A) = P_2(A)\}$$

は λ システムである. しかし, (B.23) から $\mathcal{L} \supset \mathcal{P}$ である. よって, 定理 B.9 と定理の仮定³ から

$$\mathcal{L} \supset \sigma[\mathcal{P}] = \mathcal{B}$$

となる. よって, (B.23) ならば, (B.24) がわかる. □

命題 B.12. $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ とし, P_1 と P_2 を $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度とし, 対応する分布関数を F_1 と F_2 が等しいとする. すなわち

$$F_1(x) = P_1((-\infty, x]) = F_2(x) = P_2((-\infty, x])$$

である. このとき

$$P_1(B) = P_2(B) \quad (\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

が成り立つ.

³ $\sigma[\mathcal{P}] = \mathcal{B}$ のこと.

Proof.

$$\mathcal{P} := \{(-\infty, x]; x \in \mathbb{R}\}$$

とおく. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$(-\infty, x] \cap (-\infty, y] = (-\infty, x \wedge y] \in \mathcal{P}$$

となる. ここで $x \wedge y$ は x と y の大きくない方である. 以上から $\mathcal{P}$ は π システムである. さらに

$$F_1(x) = F_2(x) \ (\forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow P_1(A) = P_2(A) \ (\forall A \in \mathcal{P}) \quad (\text{B.25})$$

である. いま

$$\mathcal{L} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); P_1(B) = P_2(B)\}$$

とする. すると, $\mathcal{L}$ の定義から $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ である. 一方, 補題 B.10 から, $\mathcal{L}$ は λ システムである. さらに, $\sigma[\mathcal{P}] = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であること⁴と (B.25) に注意をして, 補題 B.11 を用いると

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow P_1(B) = P_2(B)$$

となる. したがって, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}$ となる. 一方, $\mathcal{L}$ の定義から

$$\mathcal{L} \supset \sigma[\mathcal{P}]$$

となる. よって, $\mathcal{L} = \sigma[\mathcal{P}] = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ となることがわかる. 以上から

$$P_1(A) = P_2(A) \quad (\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

がわかる. □

B.4.2 その2

$(\mathbb{X}, \mathcal{B})$ と $(\mathbb{Y}, \mathcal{C})$ を可測空間とし, μ を可測空間 $(\mathbb{X}, \mathcal{B})$ 上の σ 有限測度とする. $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ 可測の非負値関数 $f: \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, 写像

$$y \mapsto \int_{\mathbb{X}} f(x, y) d\mu(x) \quad (\text{B.26})$$

は $\mathcal{C}$ 可測であることを Dynkin の補題と標準機械を用いて示そう. 標準機械を用いるためには, 任意の $L \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ に対して

$$y \mapsto \int_{\mathbb{X}} \mathbf{1}_L(x, y) d\mu(x)$$

が $\mathcal{C}$ 可測であることを示そう. そのために, 準備の補題から証明していく.

⁴この主張は定理 B.17 から直ちにわかる.

補題 B.13. $(\mathbb{X}, \mathcal{B})$ と $(\mathbb{Y}, \mathcal{C})$ を可測空間とし, μ を $(\mathbb{X}, \mathcal{B})$ 上の有限測度とする. このとき,

$$\mathcal{L}_\mu := \left\{ L \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}; y \mapsto \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_L(x, y) d\mu(x) \text{ は } \mathcal{C} \text{ 可測} \right\}$$

は λ システムである.

Proof. λ システムの定義の (i) ~ (iii) を確認する.

① (i) の確認: $\mathbb{X} \times \mathbb{Y} \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ であり,

$$y \mapsto \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{\mathbb{X} \times \mathbb{Y}}(x, y) d\mu(x) = \mu(\mathbb{X})$$

は定数関数であるから $\mathcal{C}$ 可測である. したがって,

$$\mathbb{X} \times \mathbb{Y} \in \mathcal{L}_\mu$$

がわかる.

② (ii) の確認: $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_\mu$ かつ $L_1 \subset L_2$ とする. このとき

$$\mathbb{1}_{L_2 \setminus L_1}(x, y) = \mathbb{1}_{L_2}(x, y) - \mathbb{1}_{L_1}(x, y)$$

であるから

$$\int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{L_2 \setminus L_1}(x, y) d\mu(x) = \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{L_2}(x, y) d\mu(x) - \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{L_1}(x, y) d\mu(x)$$

となる. ここで $\mu(\mathbb{X}) < \infty$ であるから, 右辺の二つの積分はいずれも有限である. また, $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_\mu$ なので, 右辺は二つの $\mathcal{C}$ 可測関数の差である. したがって,

$$y \mapsto \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{L_2 \setminus L_1}(x, y) d\mu(x)$$

は $\mathcal{C}$ 可測である. よって,

$$L_2 \setminus L_1 \in \mathcal{L}_\mu$$

が示せた.

③ (iii) の確認: $L_n \in \mathcal{L}_\mu$ ($n = 1, 2, \dots$) かつ

$$L_1 \subset L_2 \subset \dots$$

とし

$$L := \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$$

とおく. このとき

$$\mathbb{1}_{L_n}(x, y) \nearrow \mathbb{1}_L(x, y) \quad ((x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}).$$

したがって, 単調収束定理により, 各 $y \in \mathbb{Y}$ に対して

$$\int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{L_n}(x, y) d\mu(x) \nearrow \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_L(x, y) d\mu(x)$$

となる.

各 n に対して左辺は y の $\mathcal{C}$ 可測関数であるから, その各点収束極限

$$y \mapsto \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_L(x, y) d\mu(x)$$

も $\mathcal{C}$ 可測である. したがって

$$L \in \mathcal{L}_{\mu}$$

である. 以上から, $\mathcal{L}_{\mu}$ は λ システムである. □

命題 B.14. μ を $(\mathbb{X}, \mathcal{B})$ 上の有限測度とする. このとき, 任意の $L \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ に対して

$$y \mapsto \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_L(x, y) d\mu(x)$$

は $\mathcal{C}$ 可測である.

Proof.

$$\mathcal{P} := \{B \times C; B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}\}$$

とおく. $\mathcal{P}$ は π システムであり

$$\sigma[\mathcal{P}] = \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$$

である. また, $B \in \mathcal{B}$ および $C \in \mathcal{C}$ に対して

$$\int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{B \times C}(x, y) d\mu(x) = \mu(B) \mathbb{1}_C(y)$$

である. 右辺は y の $\mathcal{C}$ 可測関数であるから

$$y \mapsto \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_{B \times C}(x, y) d\mu(x)$$

は $\mathcal{C}$ 可測となる. よって

$$B \times C \in \mathcal{L}_\mu$$

である. したがって

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{L}_\mu$$

がわかる. 補題 B.13 から $\mathcal{L}_\mu$ は λ システムである. よって, Dynkin の π - λ 定理 (定理 B.9) から

$$\mathcal{B} \otimes \mathcal{C} = \sigma[\mathcal{P}] \subset \mathcal{L}_\mu$$

である. 一方, $\mathcal{L}_\mu$ の定義から

$$\mathcal{L}_\mu \subset \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$$

であるので

$$\mathcal{L}_\mu = \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$$

となる. □

命題 B.15. μ を $(\mathbb{X}, \mathcal{B})$ 上の σ 有限測度とする. このとき, 任意の $L \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ に対して

$$y \mapsto \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_L(x, y) \, d\mu(x)$$

は $\mathcal{C}$ 可測である.

Proof. μ は σ 有限であるから, $X_n \in \mathcal{B}$ ($n = 1, 2, \dots$) で

$$X_1 \subset X_2 \subset \dots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = \mathbb{X}, \quad \mu(X_n) < \infty$$

を満たすものをとることができる. 各 n に対して

$$\mu_n(B) := \mu(B \cap X_n) \quad (B \in \mathcal{B})$$

とおく. このとき μ_n は有限測度である. したがって, 命題 B.14 から

$$\begin{aligned} g_n(y) &:= \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_L(x, y) \, d\mu_n(x) \\ &= \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_L(x, y) \mathbb{1}_{X_n}(x) \, d\mu(x) \end{aligned}$$

は $\mathcal{C}$ 可測である. 一方,

$$\mathbb{1}_L(x, y)\mathbb{1}_{X_n}(x) \nearrow \mathbb{1}_L(x, y)$$

であるから, 単調収束定理により

$$g_n(y) \nearrow \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_L(x, y) d\mu(x)$$

となる. 任意の $r \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} & \left\{ y \in \mathbb{Y}; \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_L(x, y) d\mu(x) > r \right\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ y \in \mathbb{Y}; \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_L(x, y) d\mu_n(x) > r \right\} \in \mathcal{C} \end{aligned}$$

となる. したがって

$$y \mapsto \int_{\mathbb{X}} \mathbb{1}_L(x, y) d\mu(x)$$

は $\mathcal{C}$ 可測関数列の各点収束極限であるから, $\mathcal{C}$ 可測である. $\square$

命題 B.16. μ を $(\mathbb{X}, \mathcal{C})$ 上の σ 有限な測度とする. このとき, $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ 上の非負値可測関数 f に対して

$$y \mapsto \int_{\mathbb{X}} f(x, y) d\mu(x)$$

が $\mathcal{C}$ 可測である.

Proof. 標準機械を用いて示そう. そのために, 以下の手続きを踏む.

- ① 指示関数 $\mathbb{1}_A$ に対してある性質を証明する.
- ② 有限個の互いに排反な $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A} \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ と異なる $a_1, a_2, \dots, a_n$ に対して単関数 $\sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}$ に対して ① で示した性質を確認する.
- ③ 非負単関数の極限として非負の確率変数を定義し, ② で示した性質を非負値確率変数に対して証明する.

すなわち, 命題 B.15 から出発して, ① ~ ③ の議論を実行することにより, 写像 $y \mapsto \int_{\mathbb{X}} f(x, y) d\mu(x)$ は $\mathcal{C}$ 可測であることがわかる. $\square$

B.4.3 $\mathbb{R}$ の位相についての注意

定理 B.17. 空でない開集合 $U \subset \mathbb{R}$ は高々可算個の互いに排反な開区間の和として表される. すなわち, 互いに排反な開区間 $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ があって

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$$

と書ける.

Proof. U は開集合なので, 各 $x \in U$ に対して $y > x$ なる $y \in \mathbb{R}$ が存在して,

$$(x, y) \subset U$$

とできる. このとき

$$a := \inf\{z; (z, x) \subset U\}, \quad b := \sup\{y; (x, y) \subset U\}$$

と定める. a と b は x に依存することに注意する. このとき

$$x \in (a, b) \quad \text{かつ} \quad I_x = (a, b) \text{ は開区間}$$

である. これらを踏まえて, 次の主張を示していく.

$$(i) \quad U = \bigcup \{I_x; x \in U\}.$$

$$(ii) \quad \forall x, y \in U \text{ に対して}$$

$$I_x \neq I_y \implies I_x \cap I_y = \emptyset$$

である. すなわち, 同一の連結区間に属する異なる x, y に対して, $I_x = I_y$ となる.

$$(iii) \quad \#\{I_x; x \in U\} \leq \aleph_0. \text{ ただし } I_x = I_y \text{ なるものを除いてである.}$$

まず, 次のことを注意する. $x \in U$ に対して, $I_x = (a, b)$ とすると $I_x \subset U$ かつ $a, b \notin U$ である. なぜならば $w \in (a, b)$ とすると $y > w$ なる $y \in \mathbb{R}$ が存在して, $(x, y) \subset U$ となる. よって $w \in U$ である. いま $b \in U$ と仮定するとある $\epsilon > 0$ が存在して

$$(b - \epsilon, b + \epsilon) \subset U$$

とできる. ϵ を十分小さくすると

$$\left(x, b - \frac{\epsilon}{2}\right) \subset U$$

となる. 結局

$$(x, b + \epsilon) \subset U$$

となり, b の定義と矛盾する. よって $b \notin U$ が示せた.

(i) 各 $x \in U$ に対して, $x \in I_x \subset U$ なので

$$\bigcup_{x \in U} I_x \subset U$$

となる. 逆は明らかなので

$$\bigcup_{x \in U} I_x = U$$

がわかる.

(ii) $x, y \in U$ とし, $I_x = (a, b)$ と $I_y = (c, d)$ と定める. $I_x \cap I_y \neq \emptyset$ と仮定する. このとき $a < d$ かつ $c < b$ となる. $c \notin U$ なので $c \in (a, b)$ である. $c < b$ なので

$$c \leq a \tag{B.27}$$

である. $a \notin U$ なので

$$a \notin (c, d)$$

である. よって $a < d$ なので

$$a \leq c \tag{B.28}$$

がわかる. (B.27) と (B.28) から

$$a = c$$

がわかる. 同様に

$$b = d \tag{B.29}$$

を示すことができる. よって

$$I_x \cap I_y \neq \emptyset \implies I_x = I_y$$

がわかる. これの対偶を取ると

$$I_x \neq I_y \implies I_x \cap I_y = \emptyset$$

がわかる.

(iii) 各 $I_x (x \in U)$ に対して

$$q_x \in I_x \cap \mathbb{Q}$$

を取る. $I_x \neq I_y$ ならば $I_x \cap I_y = \emptyset$ なので

$$q_x \neq q_y$$

がわかる. よって $\#(\mathbb{Q}) \leq \aleph_0$ なので, (iii) がわかる. $\square$

B.5 絶対連続関数

可測空間 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の測度 μ と Lebesgue 測度 m を考える. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ および $r > 0$ に対し, 中心 $\mathbf{x}$, 半径 r の開球を

$$B(\mathbf{x}; r) := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d; |\mathbf{v} - \mathbf{x}|_{2,d} < r\}$$

で定める. いま

$$G(\mathbf{x}) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(\mathbf{x}; r))}{m(B(\mathbf{x}; r))} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d)$$

とする. ただし, 右辺の極限が存在した場合に, $\mathbf{x}$ における G の値を定義する.

定義 B.18. (1) 可測関数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ は 局所可積分(loc) であるとは, すべての有界 Borel 集合 $K \subset \mathbb{R}^d$ に対して

$$\int_K f(\mathbf{x}) dm(\mathbf{x}) < \infty$$

が成り立つときをいう. $\mathbb{R}^d$ 上の局所可積分関数全体の集合を L^1_{loc} と記す.

(2) $f \in L^1_{\text{loc}}$ とする. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ と $r > 1$ に対して

$$A_r f(\mathbf{x}) = \frac{1}{m(B(\mathbf{x}; r))} \int_{B(\mathbf{x}; r)} f(\mathbf{v}) dm(\mathbf{v})$$

と定める.

補題 B.19. $f \in L^1_{\text{loc}}$ とし, $r > 0$ と $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ とする. このとき, $A_r f(\mathbf{x})$ は r と $\mathbf{x}$ に関して連続である.

Proof.

証明は加筆予定 (2026/05/29).

□

定理 B.20. $f \in L^1_{\text{loc}}$ とする. このとき, ほとんど至るところの $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ において

$$\lim_{r \rightarrow 0} A_r f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

が成立⁵する.

Proof.

⁵すなわち, $m_d\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d; \lim_{n \rightarrow \infty} A_n f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{x})\} = 0$ のことである. ただし, m_d は $\mathbb{R}^d$ 上の Lebesgue 測度である.

証明は加筆予定 (2026/05/29).

□

定義 B.21. (1) $f \in L^1_{\text{loc}}$ の Lebesgue 集合 L_f を

$$L_f := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d; \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mathbf{m}(B(\mathbf{x}; r))} \int_{B(\mathbf{x}; r)} |f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{m}(\mathbf{v}) = 0 \right\}$$

で定義する.

(2) $r > 0$ で添え字づけられた $\mathbb{R}^d$ の Borel 集合族 $\{E_r\}_{r>0}$ は $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ にうまく縮む とは次の条件 (2a) と (2b) をみたすときをいう.

(2a) 各 r に対して, $E_r \subset B(\mathbf{x}; r)$.

(2b) ある定数 $\alpha > 0$ (r とは無関係に取れる) が存在して, $\mathbf{m}(E_r) > \alpha \mathbf{m}(B(\mathbf{x}; r))$ となる.

定理 B.22. $f \in L^1_{\text{loc}}$ と $\mathbf{x} \in L_f$ とする. 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ にうまく縮む Borel 部分集合族 $\{E_r\}_{r>0}$ に対して

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mathbf{m}(E_r)} \int_{E_r} |f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{m}(\mathbf{v}) = 0$$

となる.

Proof.

証明は加筆予定 (2026/05/29).

□

定義 B.23. (1) 関数 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$T_F(x) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})|; n \in \mathbb{N}, -\infty < x_0 < \cdots < x_n = x \right\}$$

と定める. T_F を関数 F の 全変動 という.

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} T_F(x) < \infty$ のとき, F は 有界変動 という. 有界変動関数全体の集合を BV と記す.

(3) BV の部分集合 NBV を

$$NBV := \{F \in BV; F \text{ は右連続で } F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0\}$$

で定める.

注意 B.24. (1) $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が有界かつ非減少ならば, $F \in BV$ である.
 (2) $F, G \in BV$ のとき, $aF + bG \in BV$ である. ただし, $a, b \in \mathbb{R}$ である.
 (3) F は $\mathbb{R}$ 上で微分可能で, $\dot{F}$ は有界のとき, $-\infty < a < b < \infty$ に対して, $F \in BV([a, b])$ である. $\square$

補題 B.25. (1) $F \in BV$ とする. このとき, $T_F + F$ と $T_F - F$ は非減少関数である.
 (2) $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ とする. このとき

$F \in BV \Leftrightarrow F$ は 2 つの非減少関数の差として表現できる.

(3) $F \in BV$ のとき, F の右極限と左極限は存在する.
 (4) $F \in BV$ とする. このとき, F の不連続点は高々可算個である.
 (5) $F \in BV$ とし, $G(x) = F(x+) (x \in \mathbb{R})$ とする. このとき, $\dot{F}$ と G はほとんど至るところで存在し, $\dot{F} = \dot{G}$ (a.e.) である.
 (6) $F \in BV$ とする. このとき, $T_F(-\infty) = 0$ となる. さらに, F が右連続ならば, T_F も右連続である.

Proof.

証明は加筆予定 (2026/05/29).

$\square$

定理 B.26. NBV を定義 B.23(3) で定めた関数族とする. このとき, 以下のことが成立する.

(1) μ を $\mathbb{R}$ 上の Borel 測度とし, $F(x) = \mu((-\infty, x]) (x \in \mathbb{R})$ が有限であるとする. このとき, $F \in NBV$ となる.
 (2) $F \in NBV$ のとき, $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue-Stieltjes 測度 μ_F が一意的に存在して, $F(x) = \mu_F((-\infty, x]) (x \in \mathbb{R})$ となる.

Proof.

証明は加筆予定 (2026/05/29).

$\square$

命題 B.27. NBV を定義 B.23(4) で定めた関数族とする. $F \in NBV$ に対し, μ_F を定理 B.26(2) で定めた $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue-Stieltjes 測度とする. このとき, $\dot{F} \in L^1(\mathfrak{m})$ である. ただし, $\dot{F}$ は F の右連続に修正された導

関数⁶である. さらに $\mu_F \ll m$ ⁷ ならば,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \dot{F}(t) \, dm(t)$$

となる.

Proof.

証明は加筆予定 (2026/05/29).

□

定義 B.28. 関数 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は閉区間 $[a, b]$ 上で 絶対連続 であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ と任意の互いに素な有限個の開区間 $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^N$ ($N \in \mathbb{N}$) で, $a \leq a_j < b_j \leq b$ ($j = 1, \dots, N$) をみたすものに対して

$$\sum_{k=1}^N (b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^N |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon$$

となるときをいう.

命題 B.29. $F \in NBV$ とする. このとき

$$F \text{ は絶対連続} \Leftrightarrow \mu_F \ll m$$

である.

Proof.

証明は加筆予定 (2026/05/29).

□

系 B.30. (1) $f \in L^1(m)$ とし, 関数 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dm(t)$$

で定める. このとき, $F \in NBV$ で, F は絶対連続である.

(2) $F \in NBV$ で, さらに F は絶対連続ならば, $\dot{F} \in L^1(m)$ となる. さらに, $F(x) = \int_{-\infty}^x \dot{F}(t) \, dt$ となる.

⁶補題 B.25(5) のようにして, 右連続に修正したもの.

⁷任意の Borel 部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して

$$m(A) = 0 \Rightarrow \mu_F(A) = 0$$

が成立することである.

Proof.

証明は加筆予定 (2026/05/29).

□

B.6 凸関数の性質

凸関数はおおくとも 2 つの単調増加関数の差として表現できるので、補題 B.25(2) から BV となる。よって、前節の結果と微分可能であれば、導関数は非負であることからこの節の主定理の定理 B.36 の主張は用意に想像できる。この定理から凸関数の基本的な性質を証明することができる。しかし、煩雑ではあるが、初等的な議論により凸関数の基本的な性質を証明する。

定義 B.31. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする。関数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ が $x, y \in [a, b]$, $0 \leq \lambda \leq 1$ に対して

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

をみたすとき、関数 f は 凸関数 であるという。とくに $x \neq y$, $0 < \lambda < 1$ のとき

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

が成立する場合は、関数 f は 狭義凸関数 であるという。

注意 B.32. $-f$ が凸関数(狭義凸関数)のとき、関数 f は 凹関数(狭義凹関数)であるという。 □

定理 B.33. 区間 $[a, b]$ 上の凸関数は开区間 (a, b) 上の各点で連続である。

Proof. まず, $\forall x \in [a, b]$ は

$$x = \lambda a + (1 - \lambda)b \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

と表せるから、凸関数の定義より

$$f(x) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) \leq \max\{f(a), f(b)\} =: K \quad (\text{B.30})$$

となること⁸に注意する。よって、凸関数 f は上に有界である。 $\forall x_0 \in (a, b)$ とし、 $f(x)$ は $x = x_0$ で連続であることを示すために関数 g を

$$g(t) := f(x_0 + t) - f(x_0) \quad (a - x_0 < t < b - x_0)$$

⁸ K は負であってもよい。

と定める⁹. このとき $g(t)$ は $(a - x_0, b - x_0) \ni \{0\}$ 上で凸関数であり, $g(0) = 0$ であることに注意する. いま $\forall \epsilon > 0$ に対して正数 ϵ' を

$$0 < \epsilon' < \min \left\{ \frac{\epsilon}{K + |f(x_0)| + 1}, 1 \right\} \quad (\text{B.31})$$

をみたすように選ぶ. さらに正数 ρ と δ を

$$0 < \rho < \min\{x_0 - a, b - x_0\}, \quad 0 < \delta < \rho\epsilon' \quad (\text{B.32})$$

をみたすように定める. (B.31) より $0 < \epsilon' \leq 1$ である. したがって

$$|t| < \delta \Rightarrow |t| < \rho$$

となる. したがって $|t| < \delta$ に対して, $g(t)$ は定義されている. しかも

$$|t| < \delta \Rightarrow \left| \frac{t}{\epsilon'} \right| < \rho \Rightarrow x_0 + \frac{t}{\epsilon'} \in (a, b)$$

となること¹⁰がわかる. よって, (B.30) から

$$\begin{aligned} g\left(\pm \frac{t}{\epsilon'}\right) &= f\left(x_0 \pm \frac{t}{\epsilon'}\right) - f(x_0) \leq \left| f\left(x_0 \pm \frac{t}{\epsilon'}\right) \right| + |f(x_0)| \\ &\leq K + |f(x_0)| =: K_1 \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

を得る. ((B.31) から

$$K_1\epsilon' \leq \epsilon \quad (\text{B.34})$$

となっていることに注意せよ. ところで

$$t = (1 - \epsilon') \times 0 + \epsilon' \left(\frac{t}{\epsilon'} \right)$$

と表されることと (B.33) と (B.34) から

$$g(t) \leq (1 - \epsilon') \underbrace{g(0)}_{=0} + \epsilon' g\left(\frac{t}{\epsilon'}\right) = \epsilon' g\left(\frac{t}{\epsilon'}\right) \leq \epsilon' K_1 < \epsilon \quad (\text{B.35})$$

となることに注意をする. 他方

$$0 = \frac{\epsilon'}{1 + \epsilon'} \left(-\frac{t}{\epsilon'} \right) + \frac{1}{1 + \epsilon'} \cdot t$$

⁹ $x_0 \in (a, b)$ だったので, $x_0 - a > 0$ かつ $b - x_0 > 0$ である. よって, $\min\{x_0 - a, b - x_0\} > 0$ となることに注意せよ.

¹⁰ $\left| \frac{t}{\epsilon'} \right| < \rho$ と (B.32) から $-x_0 + a < -\rho < \frac{t}{\epsilon'} < \rho < b - x_0$ となるので $a < \frac{t}{\epsilon'} + x_0 < b$ がわかる.

と表されるので, (B.33) と (B.34) から

$$\begin{aligned} 0 \leq g(0) &\leq \frac{\epsilon'}{1+\epsilon'} g\left(-\frac{t}{\epsilon'}\right) + \frac{1}{1+\epsilon'} g(t) \leq \frac{\epsilon' K_1}{1+\epsilon'} + \frac{1}{1+\epsilon'} g(t) \\ &< \frac{\epsilon}{1+\epsilon'} + \frac{1}{1+\epsilon'} g(t) \end{aligned}$$

となり

$$-\epsilon < g(t) \tag{B.36}$$

を得る. よって (B.35) と (B.36) より

$$|t| < \delta \Rightarrow |g(t)| < \epsilon$$

である. $t = x - x_0$ と $g(t)$ の定義より

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

となり, $f(x)$ は点 x_0 で連続となる. □

定理 B.34. 関数 f が区間 $[a, b]$ 上で凸のとき, 开区間 (a, b) の各点 x で右微分係数 $\dot{f}_+(x)$ が存在し, 関数

$$\dot{f}_+ : (a, b) \ni x \mapsto \dot{f}_+(x) \in \mathbb{R}$$

は単調増加である.

同様に左微分係数 $\dot{f}_-(x)$ が存在し, 関数

$$\dot{f}_- : (a, b) \ni x \mapsto \dot{f}_-(x) \in \mathbb{R}$$

も単調増加である. さらに各点 $x \in (a, b)$ において

$$\dot{f}_-(x) \leq \dot{f}_+(x)$$

が成立する.

Proof. 任意の $x \in (a, b)$ に対して実数 η と ξ を

$$0 < \eta < \min\{x - a, b - x\}, \quad 0 < \xi < \eta$$

をみたすように選ぶ. このとき

$$0 < \frac{\xi}{\eta} < 1, \quad x + \xi = \frac{\xi}{\eta}(x + \eta) + \left(1 - \frac{\xi}{\eta}\right)x$$

と書けることに注意する. 関数 f は凸であることから

$$f(x + \xi) \leq \frac{\xi}{\eta} f(x + \eta) + \left(1 - \frac{\xi}{\eta}\right) f(x) = \frac{\xi}{\eta} \{f(x + \eta) - f(x)\} + f(x)$$

となる. つまり $0 < \xi < \eta$ のとき

$$\frac{f(x + \xi) - f(x)}{\xi} \leq \frac{f(x + \eta) - f(x)}{\eta}$$

となり, $\xi \searrow 0$ とすれば

$$\dot{f}_+(x) \leq \frac{f(x + \eta) - f(x)}{\eta} \quad (\text{B.37})$$

がわかる. 同様に

$$x - \xi = \frac{\xi}{\eta}(x - \eta) + \left(1 - \frac{\xi}{\eta}\right)x$$

と表せるから

$$f(x - \xi) \leq \frac{\xi}{\eta} f(x - \eta) + \left(1 - \frac{\xi}{\eta}\right) f(x) = \frac{\xi}{\eta} \{f(x - \eta) - f(x)\} + f(x)$$

である. したがって $0 < \xi < \eta$ のとき

$$\frac{f(x) - f(x - \eta)}{\eta} \leq \frac{f(x) - f(x - \xi)}{\xi}$$

となり, $\xi \searrow 0$ とすれば

$$\dot{f}_-(x) \geq \frac{f(x) - f(x - \eta)}{\eta} \quad (\text{B.38})$$

を得る. さらに

$$f(x) = f\left(\frac{(x + \xi) + (x - \xi)}{2}\right) \leq \frac{f(x + \xi) + f(x - \xi)}{2}$$

となり

$$f(x) - f(x - \xi) \leq f(x + \xi) - f(x)$$

である. だから

$$\frac{f(x) - f(x - \xi)}{\xi} \leq \frac{f(x + \xi) - f(x)}{\xi}$$

がわかる. ここで, $\xi \searrow 0$ とすると

$$\dot{f}_-(x) \leq \dot{f}_+(x) \quad (\text{B.39})$$

がわかる. したがって, (B.37) – (B.39) を考慮すれば

$$\frac{f(x) - f(x - \eta)}{\eta} \leq \dot{f}_-(x) \leq \dot{f}_+(x) \leq \frac{f(x + \eta) - f(x)}{\eta} \quad (\text{B.40})$$

がわかる. よって $\dot{f}_-(x)$ と $\dot{f}_+(x)$ は有界であることがわかる.

次に, 単調性を示す. そのために $a < x_1 < x_2 < b$ とする. (B.40) の

$$f_-(x) \leq f_+(x) \leq \frac{f(x + \eta) - f(x)}{\eta}$$

において, $x = x_1, x + \eta = x_2$ とおくと

$$f_-(x_1) \leq f_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

を得る. 同様に (B.40) の

$$\frac{f(x) - f(x - \eta)}{\eta} \leq f_-(x) \leq f_+(x)$$

において, $x = x_2, x - \eta = x_1$ とおくと

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f_-(x_2) \leq f_+(x_2)$$

を得る. これらの式を合わせると

$$\dot{f}_-(x_1) \leq \dot{f}_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \dot{f}_-(x_2) \leq \dot{f}_+(x_2) \quad (\text{B.41})$$

となる. よって

$$\dot{f}_-(x_1) \leq \dot{f}_-(x_2), \quad \dot{f}_+(x_1) \leq \dot{f}_+(x_2)$$

が得られる. □

系 B.35. 関数 F は (a, b) 上で凸のとき, 任意の s, s', t, t' で $s \leq s' < t'$ かつ $s < t \leq t'$ なるものに対して

$$\frac{F(t) - F(s)}{t - s} \leq \frac{F(t') - F(s')}{t' - s'}$$

となる.

Proof. 定理 B.34 から直ちにわかる. □

定理 B.36. 関数 F は (a, b) 上で凸のとき, 関数 F は (a, b) のすべてのコンパクト部分区間において絶対連続で, $\dot{F}$ は非減少 (存在する場合) である.

Proof. $[c, d] \subset (a, b)$ をコンパクト区間¹¹ とする. 定理 B.34 から, ある $M > 0$ が存在して, 任意の $x, y \in [c, d]$ かつ $x < y$ に対して

$$-M \leq \frac{F(y) - F(x)}{y - x} \leq M$$

となる. したがって

$$|F(y) - F(x)| \leq M|y - x|$$

となる. よって, F は $[c, d]$ 上で Lipschitz 連続である. したがって, F は絶対連続である. よって, ほとんど至るところで $\dot{F}$ が存在して

$$F(y) - F(x) = \int_x^y \dot{F}(t) \, d\mathbf{m}(t)$$

と書ける. さらに, 定理 B.34 から $\dot{F}$ は非減少であることがわかる. $\square$

定理 B.37. 関数 F は (a, b) 上で凸とする. このとき, $t_0 \in (a, b)$ に対して, ある $\beta \in \mathbb{R}$ が存在して, $F(t) - F(t_0) \geq \beta(t - t_0)$ ($t \in (a, b)$) となる.

Proof. 定理 B.34 から, $t_0 \in (a, b)$ において, 右微分 $\dot{F}_-(t_0)$ と左微分 $\dot{F}_+(t_0)$ が存在して, $\dot{F}_-(t_0) \leq \dot{F}_+(t_0)$ となる. ここで, $\beta \in [\dot{F}_-(t_0), \dot{F}_+(t_0)]$ をとる. すると

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} \leq \beta \quad (t \in (a, b), t \neq t_0)$$

となる. よって

$$F(t) \geq F(t_0) + \beta(t - t_0) \quad (t \in (a, b))$$

がわかる. $\square$

定理 B.38 (Jensen の不等式). $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ とする. 測度空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$ 上の測度 μ は $\mu(\mathbb{X}) = 1$ とする. $g: \mathbb{X} \rightarrow (a, b)$ は $\int_{\mathbb{X}} |g(x)| \, d\mu(x) < \infty$ とし, 関数 F は (a, b) 上で凸とする. このとき

$$F\left(\int_{\mathbb{X}} g(x) \, d\mu(x)\right) \leq \int_{\mathbb{X}} F \circ g(x) \, d\mu(x)$$

となる.

¹¹すなわち, 有界区間である.

Proof. $m = \int_{\mathbb{X}} g(x) d\mu(x)$ とおく. すると m において, ある $\beta \in \mathbb{R}$ が存在して

$$F(t) \geq F(m) + \beta(t - m) \quad (t \in (a, b))$$

となる. $t = g(x)$ として, 積分をすると

$$\int_{\mathbb{X}} F \circ g(x) d\mu(x) \geq \int_{\mathbb{X}} \{F(m) + \beta(g(x) - m)\} d\mu(x) = F(m)$$

となる. よって, 定理は証明された. $\square$

B.7 Radon-Nikodym の定理と条件付き期待値の議論

$(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ を確率空間とし, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ も σ 加法族とする. X は $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上の確率変数で $E[|X|] < \infty$ とする.

定義 B.39. $\mathcal{F}$ を与えたときの X の条件付き期待値を次の条件をみたす任意の確率変数 Y とする.

(i) Y は $\mathcal{F}$ 可測.

(ii) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$\int_A X(\omega) d\Pr(\omega) = \int_A Y(\omega) d\Pr(\omega).$$

まず条件付き期待値の存在と一意性を確認する.

補題 B.40. Y を定義 B.39 の条件 (i)(ii) をみたすとき Y は可積である.

Proof. $A := \{\omega \in \Omega; Y(\omega) > 0\}$ とおくと, $A, A^c \in \mathcal{F}$ となる. (ii) を用いると

$$\begin{aligned} \int_A Y(\omega) d\Pr(\omega) &= \int_A X(\omega) d\Pr(\omega) \leq \int_A |X(\omega)| d\Pr(\omega), \\ \int_{A^c} (-Y(\omega)) d\Pr(\omega) &= \int_{A^c} (-X(\omega)) d\Pr(\omega) \leq \int_{A^c} |X(\omega)| d\Pr(\omega). \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \int |Y(\omega)| d\Pr(\omega) &= \int_A Y(\omega) d\Pr(\omega) + \int_{A^c} (-Y(\omega)) d\Pr(\omega) \\ &\leq \int_A |X(\omega)| d\Pr(\omega) + \int_{A^c} |X(\omega)| d\Pr(\omega) \\ &= \int |X(\omega)| d\Pr(\omega) \end{aligned}$$

からわかる. $\square$

補題 B.41. Y は $\Pr$ a.s. に一意である.

Proof. Y' も定義 B.39 の条件 (i)(ii) をみたすとする. すると (ii) より

$$\int_A Y(\omega) d\Pr(\omega) = \int_A X(\omega) d\Pr(\omega) = \int_A Y'(\omega) d\Pr(\omega) \quad (\forall A \in \mathcal{F}).$$

$\epsilon > 0$ を取り, $A := \{\omega \in \Omega; Y(\omega) - Y'(\omega) \geq \epsilon\}$ とする. $A \in \mathcal{F}$ であることから (ii) から

$$\begin{aligned} 0 &= \int_A X(\omega) d\Pr(\omega) - \int_A X(\omega) d\Pr(\omega) \\ &= \int_A Y(\omega) d\Pr(\omega) - \int_A Y'(\omega) d\Pr(\omega) \\ &= \int_A \{Y(\omega) - Y'(\omega)\} d\Pr(\omega) \\ &\geq \epsilon \int_A d\Pr(\omega) = \epsilon \Pr(A) \end{aligned}$$

となり, $\Pr(A) = 0$ がわかる.

$$\left\{ \omega \in \Omega; Y(\omega) - Y'(\omega) > 0 \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \omega \in \Omega; Y(\omega) - Y'(\omega) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

と表現できることとすべての $\epsilon > 0$ に対して $\Pr(A) = 0$ なので

$$\begin{aligned} \Pr\left(\left\{ \omega \in \Omega; Y(\omega) - Y'(\omega) > 0 \right\}\right) &= \Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \omega \in \Omega; Y(\omega) - Y'(\omega) \geq \frac{1}{n} \right\}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left(\left\{ \omega \in \Omega; Y(\omega) - Y'(\omega) \geq \frac{1}{n} \right\}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

がわかる. よって

$$\Pr(\omega \in \Omega; Y(\omega) \leq Y'(\omega)) = 1$$

となる. 次に $A := \{\omega \in \Omega; Y'(\omega) - Y(\omega) \geq \epsilon\}$ として, 同じ議論を行えば

$$\Pr(\omega \in \Omega; Y(\omega) \geq Y'(\omega)) = 1.$$

よって

$$\Pr(\omega \in \Omega; Y(\omega) = Y'(\omega)) = 1$$

となる. □

定義 B.42. 定義 B.39 で定めた Y を

$$Y(\omega) = E[X|\mathcal{F}](\omega)$$

と記すことにする.

補題 B.43. $E[X|\mathcal{F}](\omega)$ は存在する.

Proof. $\mu = \text{Pr}$ と書くことにする. まず $X \geq 0$ とする. $\mathcal{F}$ 上の測度 ν を

$$\nu(A) = \int_A X(\omega) d\mu(\omega) \quad (A \in \mathcal{F})$$

と定める. 単調収束定理を用いると ν は $\mathcal{F}$ 上の測度となる. さらに $\nu \ll \mu$ である. よって Radon-Nikodym の定理より, $\mathcal{F}$ 可測関数 $\frac{d\nu}{d\mu}$ が存在し

$$\begin{aligned} \int_A E[X|\mathcal{F}](\omega) d\mu(\omega) &= \int_A X(\omega) d\text{Pr}(\omega) = \nu(A) \\ &= \int_A \frac{d\nu}{d\mu}(\omega) d\mu(\omega) \quad (A \in \mathcal{F}) \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

となる. $A = \Omega$ とすると $\frac{d\nu}{d\mu} \geq 0$ は可積分となる. Radon-Nikodym の一意性から

$$E[X|\mathcal{F}](\omega) = \frac{d\nu}{d\mu}(\omega)$$

となる.

一般の場合については

$$\begin{aligned} X(\omega) &= X^+(\omega) - X^-(\omega), \\ X^+(\omega) &= \max\{X(\omega), 0\}, \quad X^-(\omega) = \max\{-X(\omega), 0\} \end{aligned}$$

とする. $Y_1(\omega) = E[X^+|\mathcal{F}](\omega)$ と $Y_2(\omega) = E[X^-|\mathcal{F}](\omega)$ とおくと $Y_1 - Y_2$ は $\mathcal{F}$ 可測である. さらに $\forall A \in \mathcal{F}$ に対して

$$\begin{aligned} \int_A X(\omega) d\text{Pr}(\omega) &= \int_A X^+(\omega) d\text{Pr}(\omega) - \int_A X^-(\omega) d\text{Pr}(\omega) \\ &= \int_A Y_1(\omega) d\text{Pr}(\omega) - \int_A Y_2(\omega) d\text{Pr}(\omega) \quad (\because (\text{B.42})) \\ &= \int_A \{Y_1(\omega) - Y_2(\omega)\} d\text{Pr}(\omega) \\ &= \int_A (Y_1 - Y_2)(\omega) d\text{Pr}(\omega) \end{aligned}$$

となる. よって $(Y_1 - Y_2)(\omega) = E[X|\mathcal{F}](\omega)$ がわかる. $\square$

注意 B.44. 以下の記法を導入する.

(1) $A \in \mathcal{A}$ に対して

$$\Pr(A|\mathcal{F})(\omega) := E[\mathbb{1}_A|\mathcal{F}](\omega)$$

と定める.

(2) $A, B \in \mathcal{A}$ かつ $\Pr(B) > 0$ に対して

$$\Pr(A|B) := \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

と定める.

(3) X と Y を $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上の確率変数としたとき

$$E[X|Y](\omega) := E[X|\sigma(Y)](\omega)$$

とする. ただし $\sigma(Y)$ は Y によって生成された σ 加法族である. すなわち

$$\sigma(Y) := \sigma\left[\{\omega \in \Omega; Y(\omega) \leq r \ (\forall r \in \mathbb{R})\}\right]$$

である.

(4) X と Y を $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上の連続型確率変数とする. さらに (X, Y) は同時 p.d.f. $p(x, y)$ を持つとする. 議論を簡単にするために $\forall y \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int p(x, y) dx > 0$$

とする.

いま関数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で $E[|g(X)|] < \infty$ なるものとする. このとき

$$E[g(X)|Y](\omega) = h(Y(\omega)), \quad h(y) = \frac{\int g(x)p(x, y) dx}{\int p(x, y) dx}$$

となる. これを示すために $A \in \sigma(Y)$ を取る. このときある $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ が存在して

$$A := \{\omega \in \Omega; Y(\omega) \in B\}$$

と書ける. したがって Fubini の定理から

$$\begin{aligned} E[h(Y)\mathbb{1}_A] &= E[h(Y)\mathbb{1}_B(Y)] \quad (\because Y \in B \Leftrightarrow \omega \in A) \\ &= \int_B \int h(y)p(x, y) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_B \int \left\{ \frac{\int g(x)p(x, y) dx}{\int p(x, y) dx} \right\} p(x, y) dx dy \quad (\because h \text{ の定義を代入}) \\
&= \int_B \left\{ \int \frac{\int g(x)p(x, y) dx}{\int p(x, y) dx} p(x, y) dx \right\} dy \quad (\because \text{Fubini の定理}) \\
&= \int_B \frac{\int g(x)p(x, y) dx}{\int p(x, y) dx} \left\{ \int p(x, y) dx \right\} dy \\
&= \int_B \int g(x)p(x, y) dx dy \\
&= E[g(X)\mathbb{1}_A] \quad (\because Y \in B \Leftrightarrow \omega \in A)
\end{aligned}$$

となる. よって

$$\int_A h(Y(\omega)) d\Pr(\omega) = \int_A g(X(\omega)) d\Pr(\omega)$$

なので

$$E[g(X)|\mathcal{F}](\omega) = h(Y(\omega)) \quad (\Pr \text{ a.s.})$$

がわかる. □

B.8 条件付き期待値の性質

定理 B.45. $X, Y, \{X_n\}_{n=1}^\infty$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上の確率変数列とする.

(1) $E[|X|] < \infty$ かつ $E[|Y|] < \infty$ とする. このとき $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$E[aX + bY|\mathcal{F}](\omega) = aE[X|\mathcal{F}](\omega) + bE[Y|\mathcal{F}](\omega) \quad (\Pr \text{ a.s.})$$

と成り立つ.

(2) さらに $X \leq Y$ のとき

$$E[X|\mathcal{F}](\omega) \leq E[Y|\mathcal{F}](\omega) \quad (\Pr \text{ a.s.})$$

が成り立つ.

(3) $X_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) かつ $X_n \uparrow X$ ($n \rightarrow \infty$) で $E[X] < \infty$ のとき

$$E[X_n|\mathcal{F}](\omega) \uparrow E[X|\mathcal{F}](\omega) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (\Pr \text{ a.s.})$$

が成り立つ.

Proof. (1) あきらかに $aE[X|\mathcal{F}] + bE[Y|\mathcal{F}]$ は $\mathcal{F}$ 可測である. $\forall A \in \mathcal{F}$ に対して

$$\int_A \{aE[X|\mathcal{F}](\omega) + bE[Y|\mathcal{F}](\omega)\} d\Pr(\omega)$$

$$\begin{aligned}
&= a \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}](\omega) d\Pr(\omega) + b \int_A \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}](\omega) d\Pr(\omega) \\
&= a \int_A X(\omega) d\Pr(\omega) + b \int_A Y(\omega) d\Pr(\omega) \\
&= \int_A (aX + bY)(\omega) d\Pr(\omega)
\end{aligned}$$

を得る.

(2) 条件付き期待値の定義より $\forall A \in \mathcal{F}$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}](\omega) d\Pr(\omega) &= \int_A X(\omega) d\Pr(\omega) \leq \int_A Y(\omega) d\Pr(\omega) \\
&= \int_A \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}](\omega) d\Pr(\omega)
\end{aligned}$$

を得る. $\forall \epsilon > 0$ に対して

$$A := \{\omega \in \Omega; \mathbb{E}[X|\mathcal{F}](\omega) - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}](\omega) \geq \epsilon\}$$

とおくと $\Pr(A) = 0$ となる. ϵ は任意だったので

$$\begin{aligned}
&\left\{ \omega \in \Omega; \mathbb{E}[X|\mathcal{F}](\omega) > \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}](\omega) \right\} \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \omega \in \Omega; \mathbb{E}[X|\mathcal{F}](\omega) - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}](\omega) \geq \frac{1}{n} \right\}
\end{aligned}$$

となる. よって

$$\begin{aligned}
&\Pr\left(\left\{ \omega \in \Omega; \mathbb{E}[X|\mathcal{F}](\omega) > \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}](\omega) \right\}\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left(\left\{ \omega \in \Omega; \mathbb{E}[X|\mathcal{F}](\omega) - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}](\omega) \geq \frac{1}{n} \right\}\right) = 0
\end{aligned}$$

となるから

$$\Pr\left(\omega \in \Omega; \mathbb{E}[X|\mathcal{F}](\omega) \leq \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}](\omega)\right) = 1$$

となる.

(3) $Y_n := X - X_n$ ($n \in \mathbb{N}$) とおくと $\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}] \downarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を示せばよい. $Y_n \downarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) なので (2) の結果から

$$Z_n(\omega) := \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}](\omega)$$

はほとんど確実に単調減少列なので

$$Z_{\infty}(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}](\omega)$$

はほとんど確実に存在する. $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$\int_A Z_n(\omega) d\Pr(\omega) = \int_A Y_n(\omega) d\Pr(\omega)$$

である. $n \rightarrow \infty$ のとき $Y_n(\omega) \downarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) なので, 単調収束定理から

$$\int_A Z_\infty(\omega) d\Pr(\omega) = 0 \quad (\forall A \in \mathcal{F})$$

となる. よって, $A \in \mathcal{F}$ かつ $Z_\infty \geq 0$ なので, $Z_\infty \equiv 0$ (Pr a.s.) となる. $\square$

定理 B.46. $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{A}$ とする. このとき

(1) $E[E[X|\mathcal{F}_1]|\mathcal{F}_2](\omega) = E[X|\mathcal{F}_1](\omega)$ (Pr a.s.) となる.

(2) $E[E[X|\mathcal{F}_2]|\mathcal{F}_1](\omega) = E[X|\mathcal{F}_1](\omega)$ (Pr a.s.) となる.

Proof. (1) $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ なので, $E[X|\mathcal{F}_1]$ は $\mathcal{F}_2$ 可測でもある. よって $A \in \mathcal{F}_2$ に対して

$$\int_A E[X|\mathcal{F}_1](\omega) d\Pr(\omega) = \int_A E[E[X|\mathcal{F}_1]|\mathcal{F}_2](\omega) d\Pr(\omega)$$

がわかる.

(2) $E[X|\mathcal{F}_1]$ は $\mathcal{F}_1$ 可測である. $A \in \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ に対して

$$\begin{aligned} \int_A E[X|\mathcal{F}_1](\omega) d\Pr(\omega) &= \int_A X(\omega) d\Pr(\omega) \quad (\because A \in \mathcal{F}_1) \\ &= \int_A E[X|\mathcal{F}_2](\omega) d\Pr(\omega) \quad (\because A \in \mathcal{F}_2) \\ &= \int_A \left\{ E[E[X|\mathcal{F}_2]|\mathcal{F}_1](\omega) \right\} d\Pr(\omega) \quad (\because A \in \mathcal{F}_1) \end{aligned}$$

より

$$E[X|\mathcal{F}_1](\omega) = E[E[X|\mathcal{F}_2]|\mathcal{F}_1](\omega)$$

がわかる.

定理 B.47. X は $\mathcal{F}$ 可測とし, $E[|X|] < \infty$ かつ $E[|XY|] < \infty$ とする. このとき

$$E[XY|\mathcal{F}](\omega) = X(\omega)E[Y|\mathcal{F}](\omega) \quad (\text{B.43})$$

が成立する.

Proof. $X(\omega) = \mathbb{1}_B(\omega)$ ($\forall B \in \mathcal{F}$) のとき (B.43) が成り立つことを示す.
 $\forall A \in \mathcal{F}$ に対して

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{1}_B(\omega) \mathbb{E}[Y | \mathcal{F}](\omega) d\Pr(\omega) &= \int_{A \cap B} \mathbb{E}[Y | \mathcal{F}](\omega) d\Pr(\omega) \\ &= \int_{A \cap B} Y(\omega) d\Pr(\omega) \\ &= \int_A \mathbb{1}_B(\omega) Y(\omega) d\Pr(\omega) \end{aligned}$$

となる. よって $X(\omega) = \mathbb{1}_B(\omega)$ のとき (B.43) は 成立する.

次に $X, Y \geq 0$ とし, X_n は非負値の階段関数とし, $X_n \uparrow X$ ($n \rightarrow \infty$) とする. 条件付き単調収束定理 (定理 ??(3)) を用いて

$$\begin{aligned} \int_A X(\omega) \mathbb{E}[Y | \mathcal{F}](\omega) d\Pr(\omega) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A X_n(\omega) \mathbb{E}[Y | \mathcal{F}](\omega) d\Pr(\omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \mathbb{E}[X_n Y | \mathcal{F}](\omega) d\Pr(\omega) \quad (\because (1) \text{ の結果 }) \\ &= \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n Y | \mathcal{F}](\omega) d\Pr(\omega) \quad (\because \text{単調収束定理}) \\ &= \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X Y | \mathcal{F}](\omega) d\Pr(\omega) \quad (\because \text{定理 B.45(3)}) \end{aligned}$$

がわかり, $X, Y \geq 0$ のとき (B.43) は成立する.

最後に一般の X, Y に対して

$$\begin{aligned} X^+ &= \max\{X, 0\}, & X^- &= \max\{-X, 0\}, \\ Y^+ &= \max\{Y, 0\}, & Y^- &= \max\{-Y, 0\} \end{aligned}$$

として, 上の結果を用いればよい. □

B.9 Neyman-Fisher の因子分解定理の証明

Radon-Nikodym の定理から導かれることを用いて Fisher-Neyman の因子分解定理の測度論的な証明を与える.

この節 B.9 の校正ははもう一度やり直すこと. (2026/09/15).

補題 B.48. μ を可測空間 $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ 上の σ 有限測度とし, $\mathcal{N}$ を $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ 上の測度の集合で, $\forall \nu \in \mathcal{N}$ に対して, $\nu \ll \mu$ をみたしているとする. このとき非負の数値列 $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ で $c_n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$) かつ $\sum_{n=1}^\infty c_n = 1$ なるものと $\{\nu_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{N}$ が存在して $\forall \nu \in \mathcal{N}$ に対して $\nu \ll \sum_{n=1}^\infty c_n \nu_n$ となる.

Proof. $\mathcal{N}$ が可算集合ならば定理の主張は自明であるので, $\mathcal{N}$ は非可算とする.

μ は有限測度の場合は

$$\lambda = \mu$$

とおく. μ が有限測度でない場合には $\mathbb{X}$ の可算個の部分集合 $\{\mathbb{X}_n\}_{n=1}^{\infty}$ をうまくとると

$$\mathbb{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{X}_n; \quad 0 < \mu(\mathbb{X}_n) = d_n < \infty$$

とできる. $\forall B \in \mathcal{A}$ に対して

$$\lambda(B) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(B \cap \mathbb{X}_n)}{2^n d_n}$$

とおく. いずれの場合でも λ は有限測度で $\nu \ll \lambda (\forall \nu \in \mathcal{N})$ となる¹². ここで

$$\mathcal{Q} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \nu_n; \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1, c_n \in \mathbb{R}, \text{ かつ } \{\nu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{N} \right\}$$

とする. 明らかに

$$\beta \in \mathcal{Q} \Rightarrow \beta \ll \lambda$$

である.

つぎに

$$\mathcal{D} := \left\{ C \in \mathcal{A}; \exists Q \in \mathcal{Q} \text{ s.t. } \lambda \left(\left\{ x \in C; \frac{dQ}{d\lambda}(x) = 0 \right\} \right) = 0 \text{ かつ } Q(C) > 0 \right\}$$

とする. まず $\mathcal{D} \neq \emptyset$ を確認する. そのために $\nu \in \mathcal{N}$ で $\nu \neq 0$ なるものを取り

$$C := \left\{ x \in \mathbb{X}; \frac{d\nu}{d\lambda}(x) > 0 \right\}$$

とする. $Q = \nu$ としたとき

$$\left\{ x \in C; \frac{d\nu}{d\lambda}(x) = 0 \right\} = \emptyset$$

¹² $\lambda(A) = 0$ なる $A \in \mathcal{A}$ をとる. すると $\mu(A \cap \mathbb{X}_n) = 0 (\forall n \in \mathbb{N})$ となる. したがって

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap \mathbb{X}_n) = 0$$

となる. $\nu \ll \mu$ から $\nu(A) = 0$ となる. よって $\lambda \ll \mu$ がわかる.

となり

$$Q(C) = \nu(C) = \mu(\mathbb{X}) > 0$$

となる. よって $C \in \mathcal{D}$ となる. λ は有限測度なので

$$\sup_{C \in \mathcal{D}} \lambda(C) =: c < \infty$$

となる. よって $\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ かつ $C_1 \subset C_2 \subset \cdots$ をうまくとると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(C_n) = c$$

とできる. ここで

$$C_0 := \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

とおき, $Q_n \in \mathcal{Q}$ ($n \in \mathbb{N}$) で

$$Q_n(C_n) > 0 \text{ かつ } \lambda\left(\left\{x \in C_n; \frac{dQ_n}{d\lambda}(x) = 0\right\}\right) = 0$$

なるもの¹³を取る. さらに

$$Q_0 := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n}{2^n} \in \mathcal{Q} \quad \left(\because \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1\right)$$

とおく. すると

$$\frac{dQ_0}{d\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{dQ_n}{d\lambda}$$

かつ

$$\left\{x \in C_0; \frac{dQ_0}{d\lambda}(x) = 0\right\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in C_n; \frac{dQ_n}{d\lambda}(x) = 0\right\}$$

となる. このことより

$$\lambda\left(\left\{x \in C_0; \frac{dQ_0}{d\lambda}(x) = 0\right\}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\left\{x \in C_n; \frac{dQ_n}{d\lambda}(x) = 0\right\}\right)$$

となるで, $C_0 \in \mathcal{D}$ がわかる. さらに

$$\lambda(C_0) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(C_n) = c$$

¹³ $C_n \in \mathcal{D}$ なのでこのような $Q_n \in \mathcal{Q}$ が取れる.

がわかる.

あとは $Q_0 \in \mathcal{Q}$ なので $\forall \nu \in \mathcal{N}$ に対して $\nu \ll Q_0$ を示せばよい. そのために $A \in \mathcal{A}$ で $Q_0(A) = 0$ なるものと $\forall \nu \in \mathcal{N}$ を取る. $x \in C_0$ に対して

$$Q_0(A \cap C_0) \leq Q_0(A) = 0 \text{ かつ } \frac{dQ_0}{d\lambda}(x) > 0 (\forall x \in C_0)$$

となる¹⁴ ので

$$\lambda(A \cap C_0) = 0 \Rightarrow \nu(A \cap C_0) = 0 \quad (\because \nu \ll \lambda)$$

となる. ここで

$$C := \left\{ x \in \mathbb{X}; \frac{d\nu}{d\lambda}(x) > 0 \right\}$$

とおく. すると

$$x \in C^c \Rightarrow \frac{d\nu}{d\lambda}(x) = 0$$

なので

$$\nu(A \cap C_0^c \cap C^c) \leq \int_{C^c} \frac{d\nu}{d\lambda}(x) d\lambda(x) = 0$$

となる. さらに $D := A \cap C_0^c \cap C$ とおくと $D \cap C_0 = \emptyset$ となる. $\lambda(D) > 0$ のとき

$$\lambda(C_0 \cap D) > \lambda(D)$$

であり

$$Q_0\left(\left\{x \in D; \frac{dQ_0}{d\lambda}(x) = 0\right\}\right) = 0$$

となる¹⁵ となるので, $D \in \mathcal{D}$ となる. 明らかに $C_0 \cup D \in \mathcal{D}$ であり

$$\lambda(C_0 \cup D) > \lambda(C_0) = c$$

¹⁴ $x \in C_0$ のときある $n \in \mathbb{N}$ があって $x \in C_n$ となる. すると

$$\lambda\left(\left\{x \in C_n; \frac{dQ_n}{d\lambda}(x) = 0\right\}\right) = 0$$

なので

$$\frac{dQ_0}{d\lambda}(x) > 0$$

となる.

¹⁵

$$Q_0 \in \mathcal{Q} \Rightarrow Q_0 \ll \lambda$$

であることからわかる.

となるので, c の定義¹⁶ と矛盾する. しがたって

$$\lambda(D) = 0 \text{ かつ } \nu(D) = 0$$

となる. このことより

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \nu(A \cap C_0) + \nu(A \cap C_0^c) \\ &= \nu(A \cap C_0) + \nu(A \cap C_0^c \cap C^c) + \nu(A \cap C_0^c \cap C) \\ &= \nu(A \cap C_0) + \nu(A \cap C_0^c \cap C^c) + \nu(D) = 0 \end{aligned}$$

がわかる. よって定理が証明された. $\square$

定理 B.49. ν を可測空間 $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ 上の σ 有限測度とし,

$$\mathcal{P} = \{P; P \text{ は } (\mathbb{X}, \mathcal{A}) \text{ 上の確率分布で, } P \ll \nu\}$$

を統計的モデルとする. X を母集団分布 $P \in \mathcal{P}$ からの標本とし, $T(X)$ を統計量とする. このとき $T(X)$ は $\mathcal{P}$ に対する十分統計量であるための必要十分条件は, $(\mathbb{X}, \mathcal{A})$ 上の可測関数 h (これは $P \in \mathcal{P}$ に依存しない) と T の値域上の可測関数 g_P (これは $P \in \mathcal{P}$ に依存する) が存在して

$$\frac{dP}{d\nu}(x) = g_P(T(x))h(x), \quad P - a.s. \quad (\text{B.44})$$

と書けることである.

Proof. ① $(\Rightarrow)$ の証明: T は $\mathcal{P}$ に対する十分統計量とする. 補題 B.48 から, $\{P_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{P}$ と数列 $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ ($\sum_{n=1}^\infty c_n = 1$) をうまく取れば

$$P \ll Q = \sum_{n=1}^\infty c_n P_n$$

とできる. ここで $\frac{dQ}{d\nu}$ は $P \in \mathcal{P}$ に依存しないことに注意する. $E[\cdot]$ と $E[\cdot|T]$ を P に関する期待値と条件付き期待値とし, $E_Q[\cdot]$, $E_{P_n}[\cdot]$ と $E_Q[\cdot|T]$, $E_{P_n}[\cdot|T]$ を Q , P_n それぞれにに関する期待値と条件付き期待値とする. T は十分統計量であるので T を与えたときの X の条件付き分布は $P \in \mathcal{P}$ に依存しないので

$$E[\mathbb{1}_A(X)|T] = E_{P_n}[\mathbb{1}_A(X)|T] \quad (\forall A \in \mathcal{A}) \quad (\text{B.45})$$

が成立することに注意する. $\forall A \in \mathcal{A}$ と $B \in \sigma(T)$ に対して

$$Q(A \cap B) = \sum_{n=1}^\infty c_n P_n(A \cap B) = \sum_{n=1}^\infty c_n E_{P_n}[\mathbb{1}_{A \cap B}(X)]$$

¹⁶ $c = \sup_{C \in \mathcal{D}} \lambda(C)$ である.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{E}_{P_n} [\mathbf{E}_{P_n} [\mathbf{1}_{A \cap B}(X) | T]] \quad (\because \text{条件付き期待値の性質}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{E}_{P_n} [\mathbf{E}_{P_n} [\mathbf{1}_A(X) \mathbf{1}_B(X) | T]] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{E}_{P_n} [\mathbf{1}_B(X) \mathbf{E}_{P_n} [\mathbf{1}_A(X) | T]] \quad (\because \mathbf{1}_B(X) \text{ は } \sigma(T) \text{ 可測}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{E}_{P_n} [\mathbf{1}_B(X) \mathbf{E}[\mathbf{1}_A(X) | T]] \quad (\because \text{(B.45)}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_B \left\{ \mathbf{E}[\mathbf{1}_A(X) | T](x) \right\} dP_n \\
&= \int_B \left\{ \mathbf{E}[\mathbf{1}_A(X) | T](x) \right\} \sum_{n=1}^{\infty} c_n dP_n \quad (\because \text{有界収束定理}) \\
&= \int_B \left\{ \mathbf{E}[\mathbf{1}_A(X) | T](x) \right\} dQ(x)
\end{aligned}$$

となる. 一方

$$Q(A \cap B) = \int_B \mathbf{1}_A(x) dQ(x) = \int_B \left\{ \mathbf{E}_Q[\mathbf{1}_A(X) | T](x) \right\} dQ(x)$$

となるので

$$\mathbf{E}[\mathbf{1}_A(X) | T](x) = \mathbf{E}_Q[\mathbf{1}_A(X) | T](x), \quad Q - a.s.$$

を得る. いま

$$\frac{dP}{dQ}(x) =: g_P(T(x))$$

とおくと $\forall A \in \mathcal{A}$ に対して

$$\begin{aligned}
P(A) &= \mathbf{E}[\mathbf{1}_A(X)] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[\mathbf{1}_A(X) | T]] = \int \left\{ \mathbf{E}[\mathbf{1}_A(X) | T](x) \right\} dP(x) \\
&= \int \left\{ \mathbf{E}_Q[\mathbf{1}_A(X) | T](x) \frac{dP}{dQ}(x) \right\} dQ(x) \\
&= \int \left\{ \mathbf{E}_Q[\mathbf{1}_A(X) | T](x) g_P(T(x)) \right\} dQ(x) \\
&= \int \left\{ \mathbf{E}_Q[\mathbf{1}_A(X) g_P(T(X)) | T](x) \right\} dQ(x) \\
&\quad (\because g_P(T(x)) \text{ は } \sigma(T) \text{ 可測}) \\
&= \mathbf{E}_Q[\mathbf{1}_A(X) g_P(T(X))] \quad (\because \text{条件付き期待値の定義}) \\
&= \int \left\{ \mathbf{1}_A(x) g_P(T(x)) \right\} dQ(x)
\end{aligned}$$

$$= \int_A \left\{ g_{\mathcal{P}}(T(x)) \frac{dQ}{d\nu}(x) \right\} d\nu(x)$$

となる. よって

$$h = \frac{dQ}{d\nu}$$

ととればよいことがわかる.

② ($\Leftarrow$) の証明: (B.44) が成り立つとする. T が $\mathcal{P}$ に対する十分統計量であることを示すために

$$\begin{aligned} P(A|T) &= E_Q[\mathbb{1}_A(X)|T] \quad P - a.s. \\ \Leftrightarrow \int_B \left\{ P(A|T)(x) \right\} dP(x) &= \int_B \left\{ E_Q[\mathbb{1}_A(X)|T](x) \right\} dP(x) \quad (B.46) \\ &\quad (\forall B \in \sigma(T)) \end{aligned}$$

を示せばよい. Radon-Nikodym の微分の性質と (B.44) から

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dQ}(x) &= \frac{dP}{d\nu}(x) \bigg/ \frac{dQ}{d\nu}(x) = \frac{dP}{d\nu}(x) \bigg/ \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{dP_n}{d\nu}(x) \\ &= g_{\mathcal{P}}(T(x)) h(x) \bigg/ \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_{\mathcal{P}_n}(T(x)) h(x) \\ &= g_{\mathcal{P}}(T(x)) \bigg/ \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_{\mathcal{P}_n}(T(x)) \end{aligned}$$

となることに注意する. このことより $\frac{dP}{dQ}(x)$ は $\sigma(T)$ 可測であることがわかる. $\forall B \in \sigma(T)$ に対して

$$\begin{aligned} \int_B \left\{ E_Q[\mathbb{1}_A(X)|T](x) \right\} dP(x) &= \int_B \left\{ E_Q[\mathbb{1}_A(X)|T](x) \right\} dQ(x) \\ &= \int_B \left\{ E_Q \left[\mathbb{1}_A(X) \frac{dP}{dQ}(X) \middle| T \right](x) \right\} dQ(x) \\ &= \int_B \left\{ \mathbb{1}_A(x) \frac{dP}{dQ}(x) \right\} dQ(x) \\ &\quad (\text{条件付き期待値の定義}) \\ &= \int_B \mathbb{1}_A(x) dP(x) = \int_B \left\{ E[\mathbb{1}_A|T](x) \right\} dP(x) \\ &= \int_A \left\{ P(A|T)(x) \right\} dP(x) \end{aligned}$$

となる. よって (B.46) が示されたので, T は $\mathcal{P}$ に対する十分統計量となることがわかる. $\square$

B.10 Dini の定理