# $3 \times n$バージョン公式

日本女子大学理学部数物科学科

ぽっちゃま

$3\times n$バージョン一覧表でまとめたように，$3\times n$バージョンの表の個数を$a_n$とすると，
$n=2,3,4,5$のとき，$a_n$の値は次のようになった．

| | | | |
|---|---|---|---|
| $3\times 2$バージョン | $\Longrightarrow$ | 0コ | ：$a_2=0$ |
| $3\times 3$バージョン | $\Longrightarrow$ | 4コ | ：$a_3=4$ |
| $3\times 4$バージョン | $\Longrightarrow$ | 22コ | ：$a_4=22$ |
| $3\times 5$バージョン | $\Longrightarrow$ | 88コ | ：$a_5=88$ |

このまとめから，$a_n$に関する次の漸化式を得た．

$$a_{n+1}=3a_n+2(2^n-2^{n-2}-1) \qquad (n\geq 2)$$

$n=2,3,4,5$のときを調べた結果，$3\times(n+1)$バージョンの表は，次の 2 つに分類できる．

1.

○　○　□

$3\times n$バージョンの表の右側に□，□，□のいずれかを加えたもの．

○　□　○

よって，1．を満たす表は，$3a_n$コある．

2.

次を満たすものとその上下を入れ替えたもの．

i. 1行は，1列目から$n$列目までは○，$(n+1)$列目は□．
ii. 2行は，1列目は○，2列目から$(n+1)$列目まですべて□．
iii. 3行は，
  a）1列目から$n$列目まで○か□，$(n+1)$列目は○．
  b）1列目と2列目が□○とはならない．
  c）すべて○とはならない．

iii. a）を満たす表は，$2^n$コ．
iii. b）を満たす表は，3列目から$n$列目まで○と□をどのようにおいていいので，　$2^{n-2}$コ．
iii. c）を満たす表は，1コ．

よって，2．を満たす表は，$2(2^n-2^{n-2}-1)$コある．

1．と 2．を足して，

$$a_{n+1}=3a_n+2(2^n-2^{n-2}-1)$$

が成り立つ．

$a_{n+1} = 3a_n + 2(2^n - 2^{n-2} - 1)$の漸化式を解く.

$$a_{n+1} = 3a_n + 2(2^n - 2^{n-2} - 1)$$
$$\underline{-)\ a_n = 3a_{n-1} + 2(2^{n-1} - 2^{n-3} - 1)}$$
$$a_{n+1} - a_n = 3(a_n - a_{n-1}) + 2(2^n - 2^{n-1} - 2^{n-2} + 2^{n-3})$$

$a_{n+1} - a_n = b_n$とおく.

$$b_n = 3b_{n-1} + 2(2^n - 2^{n-1} - 2^{n-2} + 2^{n-3})$$
$$\frac{b_n}{2^n} = \frac{3b_{n-1}}{2^n} + 2\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)$$
$$\frac{b_n}{2^n} = \frac{3b_{n-1}}{2^n} + \frac{3}{4}$$

$\frac{b_n}{2^n} = c_n$とおく.

$$c_n = \frac{3}{2}c_{n-1} + \frac{3}{4}$$

$c_n = \frac{3}{2}c_{n-1} + \frac{3}{4}$の漸化式を解くために，$\alpha = \frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{4}$とする.

$$\alpha = \frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{4}$$
$$\alpha = -\frac{3}{2}$$

よって，

$$c_n = \frac{3}{2}c_{n-1} + \frac{3}{4}$$
$$\underline{-)\ \alpha = \frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{4}}$$
$$c_n - \alpha = \frac{3}{2}(c_{n-1} - \alpha)$$

$\alpha = -\frac{3}{2}$より，

$$c_n + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\left(c_{n-1} + \frac{3}{2}\right)$$

$$\boxed{\begin{gathered} b_2 = a_3 - a_2 = 4 - 0 = 4 \\ c_2 = \frac{b_2}{2^2} = \frac{4}{4} = 1 \end{gathered}}$$

$$c_3 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\left(c_2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{5}{2}$$

$$c_4 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\left(c_3 + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} \times \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{5}{2}$$

$$\vdots$$

これらより，$\left\{c_n + \frac{3}{2}\right\}$は，初項：$c_2 = 1$ ，公比：$\frac{3}{2}$の等比数列.

よって，

$$c_n + \frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \times \frac{5}{2}$$

$$c_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \times \frac{5}{2} - \frac{3}{2}$$

$$\frac{b_n}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \times \frac{5}{2} - \frac{3}{2}$$

$$b_n = 2^n \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \times \frac{5}{2} - 2^n \cdot \frac{3}{2} = 10 \times 3^{n-2} - \frac{3}{2} \times 2^n$$

$$b_n = \frac{10}{9} \times 3^n - \frac{3}{2} \times 2^n$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{10}{9} \times 3^n - \frac{3}{2} \times 2^n$$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{10}{9} \times 3^{n-1} - \frac{3}{2} \times 2^{n-1}$$

$$a_{n-1} - a_{n-2} = \frac{10}{9} \times 3^{n-2} - \frac{3}{2} \times 2^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$\underline{+)\ a_3 - a_2 = \frac{10}{9} \times 3^2 - \frac{3}{2} \times 2^2}$$

$$a_n - a_2 = \frac{10}{9}(3^2 + \cdots + 3^{n-2} + 3^{n-1}) - \frac{3}{2}(2^2 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1})$$

$\underline{\underline{3^2 + \cdots + 3^{n-2} + 3^{n-1}}}$

$\hookrightarrow$ 初項：$3^2 = 9$ ， 公比：$3$ ， 項数：$n-2$ の等比級数

$$\frac{9(1-3^{n-2})}{1-3} = -\frac{9(1-3^{n-2})}{2}$$

$\underline{\underline{2^2 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1}}}$

$\hookrightarrow$ 初項：$2^2 = 4$ ， 公比：$2$ ， 項数：$n-2$ の等比級数

$$\frac{4(1-2^{n-2})}{1-2} = -4(1-2^{n-2})$$

$$a_n = \frac{10}{9} \times \left(-\frac{9(1-3^{n-2})}{2}\right) - \frac{3}{2} \times \left(-4(1-2^{n-2})\right)$$

$$a_n = -5(1-3^{n-2}) + 6(1-2^{n-2})$$

ゆえに，$3 \times n$バージョンの個数を求める公式は，

$$a_n = -5(1-3^{n-2}) + 6(1-2^{n-2}) \qquad (n \geq 2)$$

である．

これを用いると，

| $n$ | $a_n$ |
|---|---|
| 2 | 0 |
| 3 | 4 |
| 4 | 22 |
| 5 | 88 |
| 6 | 310 |
| 7 | 1024 |
| 8 | 3262 |
| 9 | 10168 |
| 10 | 31270 |
| 11 | 95344 |
| 12 | 289102 |
| 13 | 873448 |
| 14 | 2632630 |
| 15 | 7922464 |
| 16 | 23816542 |
| 17 | 71547928 |
| 18 | 214840390 |
| 19 | 644914384 |
| 20 | 1935529582 |
| | |

$\vdots$

となる．