そうだ球（きゅう）に、移そう

数学コース：エビとセロリ　アドバイザー：藤田玄先生

なにをしているの？

一言で表すと･･･

メビウス変換を由来とする
円の集まりを**立体射影**を用いて
球面ディスプレイ上に図示している！

今回の研究発表は佐野岳人さん(理研iTHEMS)と堀川由人さん(大阪大学/Rist)の発表を参考に行いました。

お二人の発表内容はこちらのQRコードから！

「メビウス変換で『無重力フライト』してきたぜ」

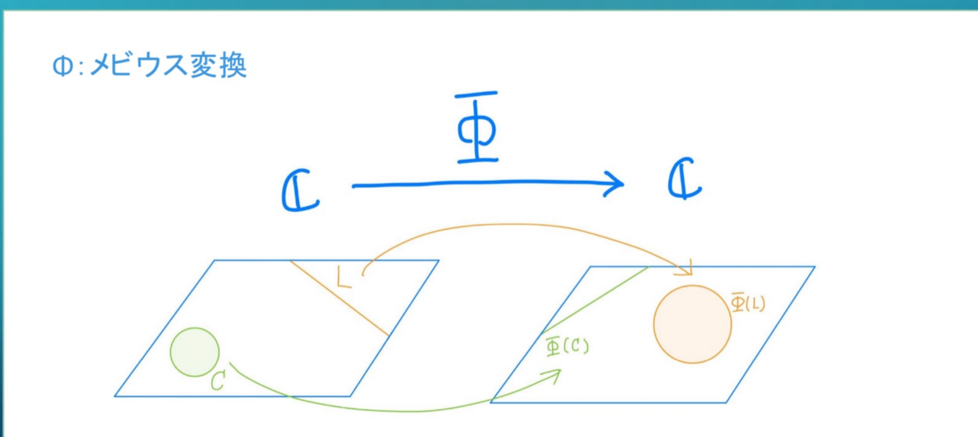
メビウス変換とは？

メビウス変換とは、1次分数変換ともいい、
複素数a, b, c, dに対して

$$\Phi(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (z\text{は複素数})$$

という形で表せる複素平面の変換のことです。

また1次分数変換には円円対応という性質があります。



メビウス変換は円または直線を円または直線にうつす。

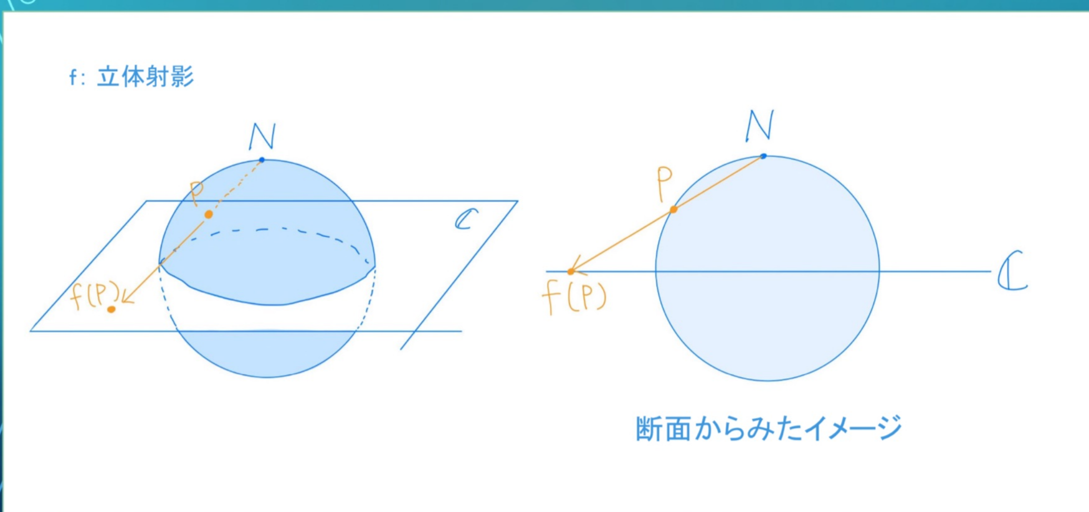
立体射影とは？

→ 球面と平面を**1対1対応**させる方法の一つです。

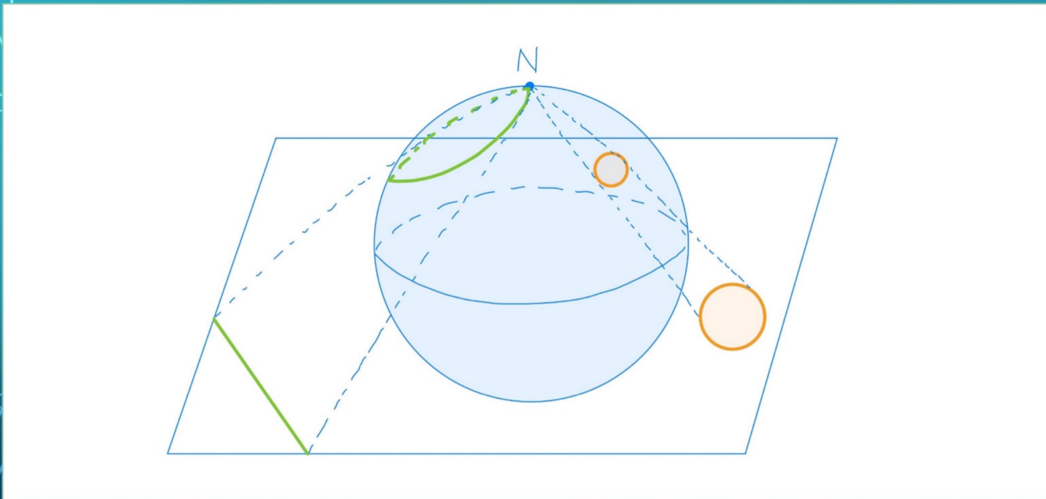
図１のように点Nと球面上の勝手な１点Pを結ぶように直線を引くと、複素平面 ℂ 上でただ一つの点f(P)と交わります。

こうして球面（点Nを除いた部分）から複素平面 ℂ への１対１の**写像f**が定義できます。

立体射影のイメージ図



また、立体射影にも円円対応という性質があります。



立体射影により球面内の円は ℂ 内の円または直線に対応する。逆も成り立つ。

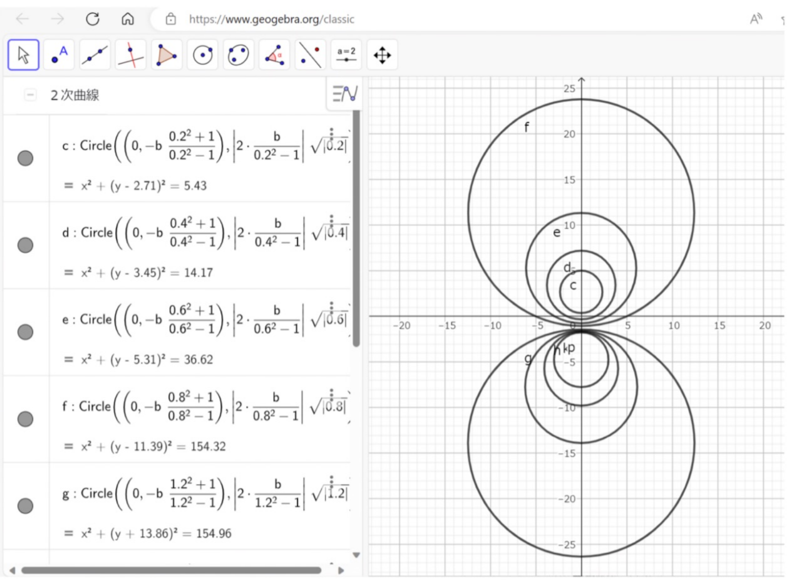
ここで、1次分数変換の分類について触れたいと思います。

1次分数変換には放物的、楕円的、双曲的という3つの分類が知られています。放物的なものと楕円的なものには不動点という特別な点が存在します。

不動点とは一次分数変換をしたときに動かない点、
つまり $\phi(z) = z$ となるような複素数 z のことです。

さらに、放物的なものと楕円的なものには変換具合を示す
円の集まりが存在します。ここでは、それらを不変小円族と
呼ぶことにします。

1次分数変換の不変小円族をPythonやGeogebraで描いた一例を紹介します.



メビウス変換:

$\Phi(z) = \dfrac{z+b}{-\frac{1}{b}z+1}$　（bは定数）

左図ではb = 2.5

不変小円族:

中心の座標は $-ib\dfrac{(t^2+1)}{(t^2-1)}$

半径は $\left|\dfrac{2b}{t^2-1}\right|\sqrt{|t|}$

tを変化させると、
重なりのない円たちを描ける

つまり・・・

動くメビウス変換の 不変小円族 Lt を計算して求めて、
ディスプレイにアニメーションを図示した！！

→ 計算過程の詳細は冊子で！

ここからは手書きで、計算過程を示していきたいと思います！

実数$a(\neq 0)$に対して、

$$\Phi(z) = \frac{3z + a}{-\frac{7}{a}z - 2}$$ (楕円的) を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ -7/a & -2 \end{pmatrix}$$ とおく. Aを対角化して、

Φをより簡単な形に変形し、不動点$Fix(\Phi)$、

不変小円族L_tを求める.

〈Aの固有値〉

$$\varphi_A(t) = |tE - A| = \begin{vmatrix} t-3 & -a \\ \frac{7}{a} & t+2 \end{vmatrix}$$

$$= (t-3)(t+2) + a \cdot \frac{7}{a}$$

$$= t^2 - t + 1$$

$$\varphi_A(t) = 0 \iff t^2 - t + 1 = 0$$

$$\iff t = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$\lambda_+ = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\lambda_- = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ とおく.

〈固有ベクトル〉

$Au_\pm = \lambda_\pm u_\pm$ となる $u_\pm \in \mathbb{C}^2$ を求める.

(i) $u_+ = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおいて

$$(A - \lambda_+ E)u_+ = 0 \iff \begin{pmatrix} 3 - \frac{1+\sqrt{3}i}{2} & i \\ -\frac{7}{i} & -2 - \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} \frac{5-\sqrt{3}i}{2} & i \\ -\frac{7}{i} & \frac{-5-\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

連立方程式にすると

$$\begin{cases} \frac{5-\sqrt{3}i}{2}x + iy = 0 & \text{— ①} \\ -\frac{7}{i}x - \frac{5+\sqrt{3}i}{2}y = 0 & \text{— ②} \end{cases}$$

$-\dfrac{5-\sqrt{3}i}{2}$

① $\times \dfrac{1}{i} \cdot \left(-\dfrac{5+\sqrt{3}i}{2}\right) =$ ② である.

$x = i$ のとき $y = -\dfrac{5-\sqrt{3}i}{2}$

よって $u_+ = \begin{pmatrix} i \\ -\frac{5-\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}$ の定数倍が

λ_+ に属する固有ベクトル.

(ii) $u_- = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおいて

$$(A - \lambda_- E)u_- = 0 \iff \begin{pmatrix} 3 - \frac{1-\sqrt{3}i}{2} & i \\ -\frac{7}{i} & -2 - \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{3}i}{2} & i \\ -\frac{7}{i} & \frac{-5+\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

連立方程式にすると

$$\begin{cases} \frac{5+\sqrt{3}i}{2}x + iy = 0 & -① \\ -\frac{7}{i}x + \frac{-5+\sqrt{3}i}{2}y = 0 & -② \end{cases}$$

$① \times \frac{1}{i} \cdot \left(\frac{-5+\sqrt{3}i}{2}\right) = ②$ である.

$x = i$ のとき $y = -\frac{5+\sqrt{3}i}{2}$ よって $u_- = \begin{pmatrix} i \\ -\frac{5+\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}$ の定数倍が

λ_- に属する固有ベクトル.

ここで $P := (u_+ \ u_-) = \begin{pmatrix} i & i \\ -\frac{5-\sqrt{3}i}{2} & -\frac{5+\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}$ とおくと

$$AP = A(u_+ \ u_-) = (Au_+ \ Au_-) = (\lambda_+ u_+ \ \lambda_- u_-)$$

$$= (u_+ \ u_-)\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$$

また $\det P = -\frac{5+\sqrt{3}i}{2}\ell + \frac{5-\sqrt{3}i}{2}\ell = -\ell\sqrt{3}i$ より

$$P^{-1} = \frac{1}{-\ell\sqrt{3}i}\begin{pmatrix} -\frac{5+\sqrt{3}i}{2} & -\ell \\ \frac{5-\sqrt{3}i}{2} & \ell \end{pmatrix}$$

$$\Psi(z) := \frac{\ell z + \ell}{-\frac{5-\sqrt{3}i}{2}z - \frac{5+\sqrt{3}i}{2}}$$ とおく.

すると,
$$\underbrace{(\Psi^{-1}\circ\Phi\circ\Psi)(z)}_{\Phi_0(z)} = \frac{\lambda_+ z + 0}{0\cdot z + \lambda_-} = (\lambda_+\lambda_-^{-1})z$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{2}{1-\sqrt{3}i}z$$

$$= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}z$$

つまり $\Phi_0 : z \mapsto \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}z \quad \left(= e^{\frac{2}{3}\pi i}\cdot z\right)$

また, $\Phi_0 = \Psi^{-1}\circ\Phi\circ\Psi$

$\rightsquigarrow \Phi(z) = (\Psi\circ\Phi_0\circ\Psi^{-1})(z) = z$

$\rightsquigarrow (\Phi_0\circ(\Psi^{-1}))(z) = \Psi^{-1}(z)$

$$\iff \Phi^{-1}(z) \in \mathrm{Fix}(\Phi_0) = \{0, \infty\}$$

$$\iff \Phi^{-1}(z) = 0 \text{ または } \infty$$

$$\iff z = \Phi(0) \text{ または } z = \Phi(\infty)$$

ここで $\Phi^{-1}(z) = \dfrac{-\frac{5+\sqrt{3}i}{2}z - i}{\frac{5-\sqrt{3}i}{2}z + i}$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{Fix}(\Phi) &= \Phi(\mathrm{Fix}(\Phi_0)) \\ &= \{\Phi(0), \Phi(\infty)\} \\ &= \left\{-\frac{2}{5+\sqrt{3}i}i, -\frac{2}{5-\sqrt{3}i}i\right\}\end{aligned}$$

一旦、求めたものを整理すると、

$$\Phi(z) = \frac{3z+i}{-\frac{7}{i}z-2} \quad \text{: 楕円的}$$

$$\mathrm{Fix}(\Phi) = \left\{-\frac{2}{5+\sqrt{3}i}i, -\frac{2}{5-\sqrt{3}i}i\right\}$$

$$\Phi(z) = \frac{iz+i}{-\frac{5-\sqrt{3}i}{2}z - \frac{5+\sqrt{3}i}{2}}$$

Φ_0 に対する不変小円族 L_t $(t \in \mathbb{R})$: $|z|^2 = z\bar{z} = t^2$ （中心0, 半径 $|t|$ の円）

$w := \Phi(z) = \dfrac{iz + i}{-\frac{5-\sqrt{3}i}{2}z - \frac{5+\sqrt{3}i}{2}}$ とおき, $\qquad \dfrac{(5+\sqrt{3}i)w + 2i}{(-5+\sqrt{3}i)w - 2i}$

L_t を $w, \bar{w}$ を用いて表す.

$$w = \frac{iz + i}{-\frac{5-\sqrt{3}i}{2}z - \frac{5+\sqrt{3}i}{2}} \iff z = \frac{(5+\sqrt{3}i)w + 2i}{(-5+\sqrt{3}i)w - 2i}$$

この z を $z\bar{z} = t^2$ に代入すると,

$$\frac{(5+\sqrt{3}i)w + 2i}{(-5+\sqrt{3}i)w - 2i} \cdot \frac{(5-\sqrt{3}i)\bar{w} + 2i}{(-5-\sqrt{3}i)\bar{w} - 2i} = t^2$$

式を整理して,

$$28(1-t^2)w\bar{w} + 2i\{(5+\sqrt{3}i) - t^2(5-\sqrt{3}i)\}w$$
$$+ 2i\{(5-\sqrt{3}i) - t^2(5+\sqrt{3}i)\}\bar{w} = -\frac{i^2}{7}$$

$w\bar{w}$ の係数が0のときと, そうでないときで場合分けする.

(i) $t^2 = 1$ のとき

$$4l\sqrt{3}i(w-\bar{w}) = -\frac{l^2}{7}$$

$l \in \mathbb{R}$ より，これは実軸に平行な直線を直す.

(ii) $t^2 \neq 1$ のとき

$$\left|w + \frac{l}{14}\cdot\frac{(5-\sqrt{3}i) - t^2(5+\sqrt{3}i)}{1-t^2}\right|^2 = 28t^4 - (17+11\sqrt{3}i)t^2 - 28 - \frac{l^2}{7}$$

$t^2 \neq 1$ のとき，Φ の不変小円族の中心と半径は，

中心：$\left(0, -\frac{l}{14}\cdot\frac{(5-\sqrt{3}i) - t^2(5+\sqrt{3}i)}{1-t^2}\right)$

半径：$\sqrt{\left|28t^4 - 44t^2 - 28 - \frac{l^2}{7}\right|}\cdot\left|\frac{l}{14(1-t^2)}\right|$

を表す.

ご拝読ありがとうございました！