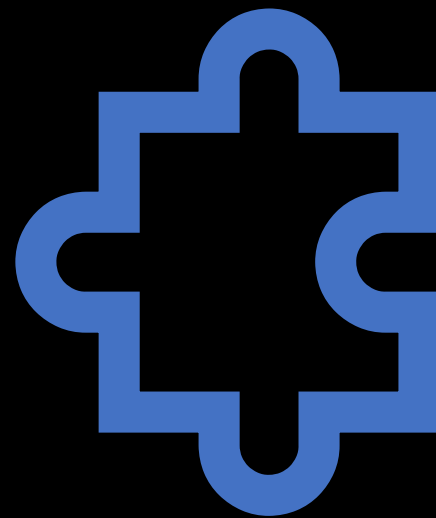


数字パズル

~あなたの数字を当てます~

グループ名：ももとぐみ
アドバイザー：杉山倫 先生



今回の研究に至った 経緯・目的

数学を使って何か面白い研究が
できないかと考えていたところ、
数字パズルの本を見つけ、2種
類の数字パズルを基に自分たち
で何か新しい数字パズルを作成
したいと思った。



今回の研究の大まかな流れ

—

- ・ 2種類の数字パズル、それぞれの仕組みを調べる。
- ・ それぞれについて、桁数を変化させたりして別のパターンについて調べてみる。

数字パズル① 客に客の数字を当てさせる *abcabc*

〈方法〉

- ①さいころで3桁の数字を作って紙に書いてもらう。
- ②その3桁の数字を繰り返して6桁にしてもらう。
(例えば、最初の数字が345なら345345にしてもらう。)
- ③6桁にした数字を11で割ってもらう。
- ④次に11で割ってもらった数字を13で割ってもらう。
- ⑤さらに7で割ってもらう。
- ⑥⑤で出た数字は①で決めてもらった数字と一致している。

数字パズル① 3桁の証明

○ $abcabc$ と並べる

3桁の数字 abc は、 $100a + 10b + c$ と表すことができる。

これを6桁にすると、

$$\begin{aligned} 100000a + 10000b + 1000c + 100a + 10b + c &= 100100a + 10010b + 1001c \\ &= 1001(100a + 10b + c) \end{aligned}$$

これより、6桁にした数字は最初の数字を1001倍したものと分かった。

ここで、1001を素因数分解すると、 $1001 = 11 \times 13 \times 7$ である。

よって、6桁にした数字を11, 13, 7で順に割っていくと最初の3桁の数字に戻ることが分かった。

数字パズル① 2桁バージョン *ababab*

〈方法〉

- ①さいころで2桁の数字を作って紙に書いてもらう。
- ②その2桁の数字を繰り返して6桁にしてもらう。
(例えば、最初の数字が34なら343434にしてもらう)
- ③6桁にした数字を3で割ってもらう。
- ④次に3で割ってもらった数字を7で割ってもらう。
- ⑤さらに13で割ってもらう。
- ⑥さらに37で割ってもらう。
- ⑦⑥で出た数字は①で決めてもらった数字と一致している。

数字パズル① 2桁バージョン $ababab$ 証明

最初の2桁の数字を ab とする。

○ $ababab$ と並べる

2桁の数字 ab は、 $10a + b$ と表すことができる。

これを6桁にすると、

$$100000a + 10000b + 1000a + 100b + 10a + b = 101010a + 10101b \\ = 10101(10a + b) \quad \text{と表すことができる。}$$

これより、6桁にした数字は最初の2桁の数字を10101倍した数字であることが分かった。

ここで、10101を素因数分解すると、 $10101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37$ である。

よって、6桁にした数字を3,7,13,37で順に割っていくと最初の2桁の数字に戻ることが分かった。

数字パズル① 2桁バージョン ヨン *baab*

〈方法〉

- ①さいころで2桁の数字を作って紙に書いてもらう。
- ②その2桁の数字を繰り返して4桁にしてもらう。
(例えば、最初の数字が34なら3443にしてもらう)
- ③4桁にした数字を11で割ってもらう。
- ④11で割ってもらった数の一の位は最初の数字の*b*と一致する。
また、十の位と一の位を足して出た数字の一の位の数字が最初の数字の*a*と一致する。
よって、最初に決めた数字が*ab*であると分かる。

数字パズル①

最初の2桁の数字を ab とする。

○ $baab$ と並べる

$baab$ を11で割る。

一の位が b となり、

十の位と一の位を足すと

a を求めることができる。

[illegible]

数字パズル① 3桁で並べ方を変えたバージョン $cbaabc$

〈方法〉

- ①さいころで3桁の数字を作って紙に書いてもらう。
- ②その3桁の数字の順序を逆にしたものを前において6桁にしてもらう。
(例えば、最初の数字が345なら543345にしてもらう。)
- ③6桁にした数字を11で割ってもらう。
- ④11で割ってもらった数の一の位は最初の数字の c と一致する。また、十の位と一の位を足して出た数字の一の位の数字が最初の数字の b と一致する。そして、十の位と百の位を足して出た数字が最初の数字の a と一致する。
よって、最初に決めた数字が abc であると分かる。

数字パズル① 3桁で並べ方を変えたバージョン
cbaabc 証明

最初の3桁の数字を abc とする。

○ $cbaabc$ と並べる

$cbaabc$ を11で割る。

一の位が c となり、

十の位と一の位を足すと b 、

百の位と十の位を足すと a を

求めることができる。

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccc}
 & c & b-c & a-b+c & b-c & c \\
 11) & c & b & a & a & b & c \\
 & c & c & & & & \\
 \hline
 & b-c & a & & & & \\
 & b-c & b-c & & & & \\
 \hline
 & & a-b+c & a & & & \\
 & & a-b+c & a-b+c & & & \\
 \hline
 & & & -b+c & b & & \\
 & & & -b+c & -b+c & & \\
 \hline
 & & & & & c & c \\
 & & & & & c & c \\
 \hline
 & & & & & & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

数字パズル② 必ず1089を出させる

〈方法〉

- ①適当に3桁の数字を作ってもらう。
(この3桁の数をAとする)
- ②Aの数字の順序を逆にした数Bを作ってもらう。
- ③数Aと数Bのうち、大きい方から小さい方を引き算する。
(その数字をCとする)
- ④②と同様にCの数字の順序を逆にした数Dを作ってもらう。
- ⑤数Cと数Dを足し算する。
- ⑥その答えは必ず1089になる。

数字パズル② 必ず1089を出させる 例

最初を選ぶ数字を935とする

$$\begin{array}{r} 935 \\ - 539 \\ \hline 396 \end{array}$$

←3桁の数A
←逆数の数B
←数C

$$\begin{array}{r} 396 \\ + 693 \\ \hline 1089 \end{array}$$

←C
←逆数の数D
←必ず1089

1089になる証明

3桁の数字 abc は、 $100a + 10b + c \cdots A$ と表すことができる。

これを逆数にすると、 $100c + 10b + a \cdots B$ と表すことができる。

手順通りに $A-B$ をすると、

$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 100(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a) \cdots C$
となる。

(一の位が「マイナス」となるため繰り下がりが起きて上の形になる)

数 C の数字の順序を逆にすると、

$100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1) \cdots D$ となる。

次に、 $C+D$ をすると、

$$\begin{aligned} & \{100(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a)\} + \{100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1)\} \\ &= (99a - 99c) + (1089 - 99a + 99c) = 1089 \end{aligned}$$

よって、**1089**になる。

数字パズル② 4桁バージョン

最初の4桁の数字を $abcd$ とする。(この時、 $a > d$ とする)

● $b > c$ のとき

$$\begin{array}{r} 1000a \quad + \quad 100b \quad + \quad 10c \quad + \quad d \\ - 1000d \quad + \quad 100c \quad + \quad 10b \quad + \quad a \\ \hline 1000(a-d) + 100(b-1-c) + 10(10+c-1-b) + 10+d-a \\ \\ 1000(a-d) \quad + \quad 100(b-1-c) \quad + \quad 10(10+c-1-b) \quad + \quad 10+d-a \\ + 1000(10+d-a) \quad + \quad 100(10+c-1-b) \quad + \quad 10(b-1-c) \quad + \quad a-d \\ \hline 10000 \quad + \quad 800 \quad + \quad 80 \quad + \quad 10 \end{array}$$

よって、10890になる。

数字パズル② 4桁バージョン

最初の4桁の数字を $abcd$ とする。(この時、 $a > d$ とする)

● $b < c$ のとき

$$\begin{array}{r} 1000a + 100b + 10c + d \\ - 1000d + 100c + 10b + a \\ \hline 1000(a-1+d) + 100(10+b-c) + 10(c-1-b) + 10+d-a \\ \\ 1000(a-1+d) + 100(10+b-c) + 10(c-1-b) + 10+d-a \\ + 1000(10+d-a) + 100(c-1-b) + 10(10+b-c) + a-1+d \\ \hline 9000 + 900 + 90 + 9 \end{array}$$

よって、9999になる。

数字パズル② 5桁バージョン

最初の5桁の数字を $abcde$ とする。(この時、 $a > e$ とする)

● $b < d$ のとき

$$\begin{aligned} & \{10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d + e\} - \{10^4e + 10^3d + 10^2c + 10b + a\} \\ &= 10^4(a - e - 1) + 10^3(10 + b - d) + 0 + 10(d - b - 1) \\ & \quad + (10 + e - a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{10^4(a - e - 1) + 10^3(10 + b - d) + 0 + 10(d - b - 1) \\ & \quad + (10 + e - a)\} \\ & \quad + \{10^4(10 + e - a) + 10^3(d - b - 1) + 0 + 10(10 + b - d) \\ & \quad + (a - e - 1)\} \\ &= 99099 \end{aligned}$$

数字パズル② 5桁バージョン

最初の5桁の数字を $abcde$ とする。(この時、 $a > e$ とする)

● $b > d$ のとき

$$\begin{aligned} & \{10^4 a + 10^3 b + 10^2 c + 10d + e\} - \{10^4 e + 10^3 d + 10^2 c + 10b + a\} \\ &= 10^4(a - e) + 10^3(b - d - 1) + 900 + 10(10 + d - b - 1) \\ & \quad + (10 + e - a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{10^4(a - e) + 10^3(b - d - 1) + 900 + 10(10 + d - b - 1) \\ & \quad + (10 + e - a)\} \\ & \quad + \{10^4(10 + e - a) + 10^3(10 + d - b - 1) + 900 \\ & \quad + 10(b - d - 1) + (a - e)\} \\ &= 109890 \end{aligned}$$

数字パズル② 6桁バージョン

最初6桁の数字を $abcdef$ とする。(この時、 $a > f$ とする)

● $b > e$ かつ $c > d$ のとき

$$\begin{aligned} & \{10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f\} \\ & \quad - \{10^5f + 10^4e + 10^3d + 10^2c + 10b + a\} \\ = & 10^5(a - f) + 10^4(b - e) + 10^3(c - d - 1) + 10^2(9 + d - c) \\ & \quad + 10(9 + e - b) + (10 + f - a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{10^5(a - f) + 10^4(b - e) + 10^3(c - d - 1) + 10^2(9 + d - c) \\ & \quad + 10(9 + e - b) + (10 + f - a)\} \\ & \quad + \{10^5(10 + f - a) + 10^4(e - b + 9) + 10^3(9 + d - c) \\ & \quad + 10^2(c - d - 1) + 10(b - e) + (a - f)\} \\ = & \text{1098900} \end{aligned}$$

数字パズル② 6桁バージョン

最初6桁の数字を $abcdef$ とする。(この時、 $a > f$ とする)

● $b < e$ かつ $c > d$ のとき

$$\begin{aligned} & \{10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f\} \\ & \quad - \{10^5f + 10^4e + 10^3d + 10^2c + 10b + a\} \\ = & 10^5(a - f - 1) + 10^4(10 + b - e) + 10^3(c - d - 1) \\ & \quad + 10^2(10 + d - c) + 10(e - b - 1) + (10 + f - a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{10^5(a - f - 1) + 10^4(10 + b - e) + 10^3(c - d - 1) \\ & \quad + 10^2(10 + d - c) + 10(e - b - 1) + (10 + f - a)\} \\ & \quad + \{10^5(10 + f - a) + 10^4(e - b - 1) + 10^3(10 + d - c) \\ & \quad + 10^2(c - d - 1) + 10(10 + b - e) + (a - f - 1)\} \\ = & 999999 \end{aligned}$$

* $b > e$ かつ $c < d$, $b < e$ かつ $c > d$ も同様にできる。

6桁 $abcdef$ まとめ

条件	値
$a > f$ かつ $b > e$ かつ $c > d$	1098900
$a > f$ かつ $b > e$ かつ $c < d$	1089990
$a > f$ かつ $b < e$ かつ $c > d$	999999
$a > f$ かつ $b < e$ かつ $c < d$	991089

数字パズル② 7桁バージョン

最初の7桁の数字を $abcdefg$ とする。(この時、 $a > g$ とする)

● $b > f$ かつ $c > e$ のとき

$$\begin{aligned} & \{10^6a + 10^5b + 10^4c + 10^3d + 10^2e + 10f + g\} \\ & \quad - \{10^6g + 10^5f + 10^4e + 10^3d + 10^2c + 10b + a\} \\ = & 10^6(a - g) + 10^5(b - f) + 10^4(c - e - 1) + 9000 \\ & \quad + 10^2(9 + e - c) + 10(9 + f - b) + (10 + g - a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{10^6(a - g) + 10^5(b - f) + 10^4(c - e - 1) + 9000 + 10^2(9 + e - c) \\ & \quad + 10(9 + f - b) + (10 + g - a)\} \\ & \quad + \{10^6(10 + g - a) + 10^5(9 + f - b) + 10^4(9 + e - c) + 9000 \\ & \quad + 10^2(c - e - 1) + 10(b - f) + (a - g)\} \\ = & 10998900 \end{aligned}$$

* $b > f$ かつ $c < e$, $b < f$ かつ $c > e$, $b < f$ かつ $c < e$ も同様にできる。

7桁 $abcdefg$ まとめ

条件	値
$a > g$ かつ $b > f$ かつ $c > e$	10998900
$a > g$ かつ $b > f$ かつ $c < e$	10890990
$a > g$ かつ $b < f$ かつ $c > e$	9901089
$a > g$ かつ $b < f$ かつ $c < e$	10008999

数字パズル② 8桁バージョン

最初8桁の数字を $abcdefgh$ とする。(この時、 $a > h$ とする)

● $b > g$ かつ $c > f$ かつ $d > e$ のとき

$$\begin{aligned} & \{10^7a + 10^6b + 10^5c + 10^4d + 10^3e + 10^2f + 10g + h\} \\ & \quad - \{10^7h + 10^6g + 10^5f + 10^4e + 10^3d + 10^2c + 10b + a\} \\ = & 10^7(a - h) + 10^6(b - g) + 10^5(c - f) + 10^4(d - e - 1) \\ & \quad + 10^3(9 + e - d) + 10^2(9 - f - c) + 10(9 + g - b) + (10 + h - a) \\ & \{10^7(a - h) + 10^6(b - g) + 10^5(c - f) + 10^4(d - e - 1) + 10^3(9 + e - d) \\ & \quad + 10^2(9 - f - c) + 10(9 + g - b) + (10 + h - a)\} \\ & \quad + \{10^7(10 + h - a) + 10^6(9 + g - b) + 10^5(9 + f - c) \\ & \quad + 10^4(9 + e - d) + 10^3(d - e - 1) + 10^2(c - f) + 10(b - g) + (a - h)\} \\ = & 109989000 \end{aligned}$$

数字パズル② 8桁バージョン

最初8桁の数字を $abcdefgh$ とする。(この時、 $a > h$ とする)

● $b < g$ かつ $c > f$ かつ $d < e$ のとき

$$\begin{aligned} & \{10^7a + 10^6b + 10^5c + 10^4d + 10^3e + 10^2f + 10g + h\} \\ & \quad - \{10^7h + 10^6g + 10^5f + 10^4e + 10^3d + 10^2c + 10b + a\} \\ &= 10^7(a - h - 1) + 10^6(10 + b - g) + 10^5(c - f - 1) + 10^4(10 + d - e) \\ & \quad + 10^3(e - d - 1) + 10^2(10 + f - c) + 10(g - b - 1) + (10 + h - a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{10^7(a - h - 1) + 10^6(10 + b - g) + 10^5(c - f - 1) + 10^4(10 + d - e) \\ & \quad + 10^3(e - d - 1) + 10^2(10 + f - c) + 10(g - b - 1) + (10 + h - a)\} \\ & \quad + \{10^7(10 + h - a) + 10^6(g - b - 1) + 10^5(10 + f - c) + 10^4(e - d - 1) \\ & \quad + 10^3(10 + d - e) + 10^2(c - f - 1) + 10(10 + b - g) + (a - h - 1)\} \\ &= 99999999 \end{aligned}$$

* 他の条件も同様にできる。

8 桁 $abcdefgh$ まとめ

条件	値
$a > h$ かつ $b > g$ かつ $c > f$ かつ $d > e$	109989000
$a > h$ かつ $b > g$ かつ $c > f$ かつ $d < e$	109899900
$a > h$ かつ $b > g$ かつ $c < f$ かつ $d > e$	108999990
$a > h$ かつ $b > g$ かつ $c < f$ かつ $d < e$	108910890
$a > h$ かつ $b < g$ かつ $c > f$ かつ $d > e$	100089099
$a > h$ かつ $b < g$ かつ $c > f$ かつ $d < e$	99999999
$a > h$ かつ $b < g$ かつ $c < f$ かつ $d > e$	99100089
$a > h$ かつ $b < g$ かつ $c < f$ かつ $d < e$	99010989

数字パズル② 9桁バージョン

最初9桁の数字を $abcdefghi$ とする。(この時、 $a > i$ とする)

● $b > h$ かつ $c > g$ かつ $d > f$ のとき

$$\begin{aligned} & \{10^8a + 10^7b + 10^6c + 10^5d + 10^4e + 10^3f + 10^2g + 10h + i\} \\ & \quad - \{10^8i + 10^7h + 10^6g + 10^5f + 10^4e + 10^3d + 10^2c + 10b + a\} \\ &= 10^8(a - i) + 10^7(b - h) + 10^6(c - g) + 10^5(d - f - 1) + 90000 \\ & \quad + 10^3(9 + f - d) + 10^2(9 + g - c) + 10(9 + h - b) + (10 + i - a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{10^8(a - i) + 10^7(b - h) + 10^6(c - g) + 10^5(d - f - 1) + 90000 + 10^3(9 + f - d) \\ & \quad + 10^2(9 + g - c) + 10(9 + h - b) + (10 + i - a)\} \\ & \quad + \{10^8(10 + i - a) + 10^7(9 - b + h) + 10^6(9 + f - d) + 10^5(9 + f - d) + 90000 \\ & \quad + 10^3(d - f - 1) + 10^2(c - g) + 10(b - h) + (a - i)\} \\ &= 1099989000 \end{aligned}$$

数字パズル② 9桁バージョン

最初9桁の数字を $abcdefghi$ とする。(この時、 $a > i$ とする)

● $b < h$ かつ $c > g$ かつ $d < f$ のとき

$$\begin{aligned} & \{10^8a + 10^7b + 10^6c + 10^5d + 10^4e + 10^3f + 10^2g + 10h + i\} \\ & \quad - \{10^8i + 10^7h + 10^6g + 10^5f + 10^4e + 10^3d + 10^2c + 10b + a\} \\ = & 10^8(a - i - 1) + 10^7(10 + b - h) + 10^6(c - g - 1) + 10^5(10 + d - f) + 0 \\ & \quad + 10^3(f - d - 1) + 10^2(10 - g - c) + 10(h - b - 1) + (10 + i - a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{10^8(a - i - 1) + 10^7(10 + b - h) + 10^6(c - g - 1) + 10^5(10 + d - f) + 0 \\ & \quad + 10^3(f - d - 1) + 10^2(10 - g - c) + 10(h - b - 1) + (10 + i - a)\} \\ & \quad + \{10^8(10 + i - a) + 10^7(h - b - 1) + 10^6(10 + g - c) + 10^5(f - d - 1) + 0 \\ & \quad + 10^3(10 + d - f) + 10^2(c - g - 1) + 10(10 + b - h) + (a - i - 1)\} \\ = & \text{999909999} \end{aligned}$$

* 他の条件も同様にできる

9 桁 $abcdefghi$ まとめ

条件	値
$a > i$ かつ $b > h$ かつ $c > g$ かつ $d > f$	1099989000
$a > i$ かつ $b > h$ かつ $c > g$ かつ $d < f$	1098909900
$a > i$ かつ $b > h$ かつ $c < g$ かつ $d > f$	1090089990
$a > i$ かつ $b > h$ かつ $c < g$ かつ $d < f$	1089010890
$a > i$ かつ $b < h$ かつ $c > g$ かつ $d > f$	1000989099
$a > i$ かつ $b < h$ かつ $c > g$ かつ $d < f$	999909999
$a > i$ かつ $b < h$ かつ $c < g$ かつ $d > f$	991090089
$a > i$ かつ $b < h$ かつ $c < g$ かつ $d < f$	990010989

類似条件での値の比較

まとめ

桁数 数字		桁数 数字	
3 桁	1089	3 桁	
4 桁	10890	4 桁	9999
5 桁	109890	5 桁	99099
6 桁	1098900	6 桁	999999
7 桁	10998900	7 桁	
8 桁	109989000	8 桁	99999999
9 桁	1099989000	9 桁	999909999

今回の研究を通してわかったこと、疑問に思ったこと

-
- $baab$ や $cbaabc$ は11で割ることで簡単にもとの数を求めることができる。
 - 数学パズル②の計算方法を用いることで、特定の数を求めることができる。
 - それぞれの桁数の同じような条件を比べると、0や9が増えていく規則性があることがわかった。
 - 3桁と7桁だけ、9が複数並ぶものがなかった。

今回の研究を通して、今後やりたいこと

-
- 数学パズル①の4桁バージョンを考えてみたい。
 - 出てきた数字をローマ字と結びつけて1つの言葉ができるような数学パズルを作ってみたい。
 - 7桁だけ、9が複数並ばなかった原因を探したい。

参考文献

-
- 数のパズル読本 （秋山久義・著 新紀元社）