打倒！徳川家康

目次

1. はじめに

みなさんは徳川家康が好きだろうか。私達は嫌いである。その理由としてこの逸話がある。徳川家康「信長は約束守らない卑怯なクズ。秀吉は礼儀を知らない下品なクズ」。私達は家康のこの口の悪さが気に食わない(笑)そこで関ヶ原の戦いで小早川秀秋をどのように配置し戦略を立てれば、石田三成が徳川家康に勝つかを考えた。私達は徳川家康軍を滅ぼすことに死力を尽くして議論をしたので、是非ご覧いただきたい。

2. 理論

2.1. 武器の性能が同様なとき

紅軍の戦闘員数を x 人、白軍の戦闘員数をy人とする。各戦闘員の戦闘力はみな等しく、実戦では一人が敵の一人を狙い打つ。また、実戦には全ての戦闘員が参加し、戦闘は時間的に一様であるものとする。時間的に一様とは、実際の戦闘は時間により激しくなったり休んだりする状態になるが、そのような状態を平均化したということである。このとき、Δt時間内での紅軍・白軍の戦闘員の減少数$\Delta x, \Delta y$は、それぞれ敵の武器の性能に比例する。ここで、正の比例定数β, αをそれぞれ紅軍・白軍の武器の性能とおくと

$$\Delta x = -\alpha \Delta t \,, \Delta y = -\beta \Delta t$$

と表すことができ、

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = -\alpha \,, \frac{\Delta y}{\Delta t} = -\beta$$

と変形できる。

x, yともに時間tの連続関数で、tについて微分可能であると仮定すると、上の式は次のような微分方程式系に書き換えることができる。

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha \,, \frac{dy}{dy} = -\beta$$

戦闘開始の時点を$t = 0$とし、この時の紅軍・白軍の戦闘員数をそれぞれ

$$x(0) = x_0 \,, y(0) = y_0$$

とする。これを微分方程式系の初期条件という。

このとき、紅軍・白軍の戦闘員数をそれぞれ 600、300 人とすると、時間変化と戦闘員数の推移は次のようなプログラムを書くことによりグラフで表すことができる。以下のプログラムの説明とグラフを図 1, 2 として表す。

```
import matplotlib.pyplot as plt
N=1000
x=[]
y=[]
t=[]
x.append(600) #紅軍の戦闘員数
y.append(300) #白軍の戦闘員数
t.append(0)
dt=1/N
alpha=0.1 #紅軍の戦闘力
beta=0.01 #白軍の戦闘力
p=0
K=0

while K<=N-1 and x[K]>=0 and y[K]>=0:
  t.append(dt*(K+1))
  x.append(x[K]+dt*(-alpha*y[K])+p)
  y.append(y[K]-dt*beta*x[1])

  K=K+1
##print(x[K+1],y[K+1])
plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(t,x)
plt.plot(t,y)
plt.show()
```

図 1　武器の性能が同様な場合のプログラム

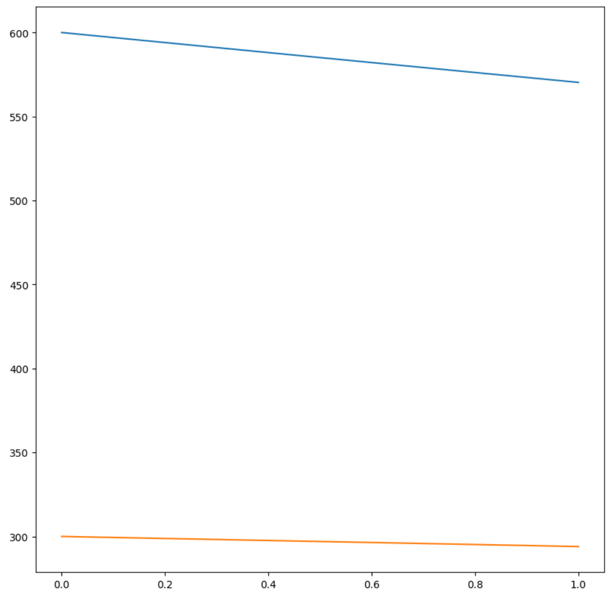

図 2　武器の性能が同様な場合の兵士の人数の推移

2.2.　武器の性能が異なるとき

時代が進むにつれ武器も進化しており、武器の性能が戦闘に大きく影響するようになった。そこで、武器の性能を表す係数を紅軍、白軍それぞれα, βとした。

このとき、紅軍白軍の戦闘員数をそれぞれ 600 人、300 人とし、武器の性能β, αを 1, 1、p, k を 0.001, 0 とすると、時間変化と戦闘員数の推移は次のようなプログラムを書くことによりグラフで表すことができる。

以下、プログラムの説明と結果のグラフを図 3, 4 によって示す。

```
import matplotlib.pyplot as plt
N=900

x=[]
y=[]
t=[]

x.append(2)
y.append(4)
t.append(0)

dt=1/N
alpha=1
beta=1
p=0.001
k=0

while k<=N-1 and x[k]>=0 and y[k]>=0:
  t.append(dt*(k+1))
  x.append(x[k]+dt*(-alpha*y[k])+p)
  y.append(y[k]-dt*beta*x[1])
  k=k+1
  ##print(x[k+1],y[k+1])

plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(t,x)
plt.plot(t,y)
plt.show()
```

図 3　武器の性能が異なる場合のプログラミング

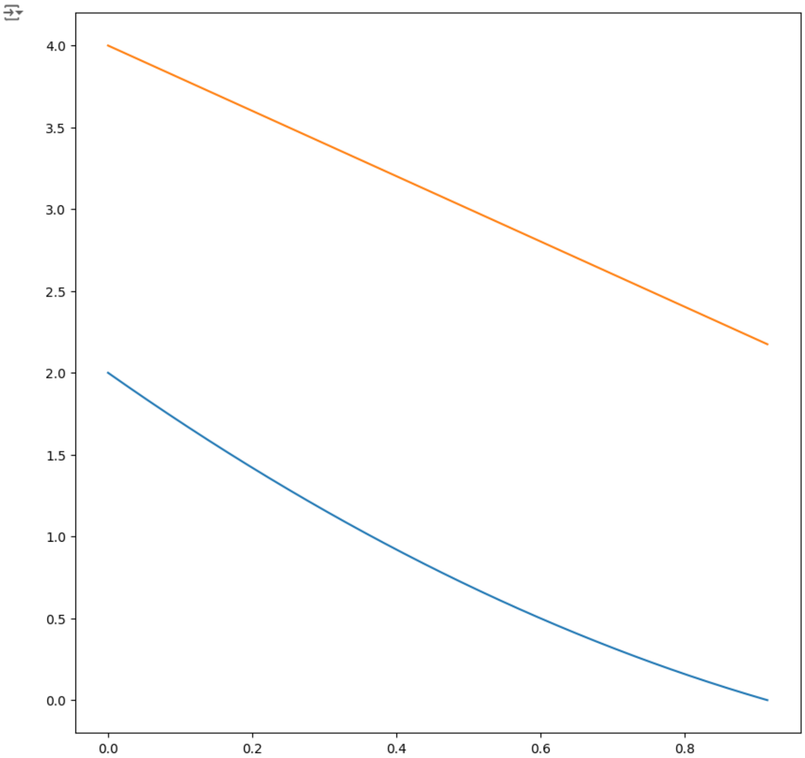

図 4　武器が違う場合の兵士の人数の推移

2.3.　途中で補給があるとき

　このとき、このとき、紅軍白軍の初期戦闘員数をそれぞれ 60000 人、55000 人とし、武器の性能を$\beta, \alpha =$0. 08, 0. 01、$t = 2.5$ のときに戦闘員の補給があったとすると、時間変化と戦闘員数の推移は次のようなプログラムを書くことによりグラフで表すことができる。以下、図 5, 6 によるプログラムの説明と結果のグラフ。

```python
import matplotlib.pyplot as plt
N=1000
x=[] #紅軍
y=[] #白軍
t=[]
x.append(60000) #紅軍
y.append(55000) #白軍
t.append(0)#時間がt=0から始める
dt=1/N
alpha=0.08 #紅軍の戦闘力
beta=0.01#白軍の戦闘力
p=0
K=0
Tend = 8  #グラフの範囲
Tchange=2.5   #補給のタイミング
while K<=N*Tend-1 and x[K]>=0 and y[K]>=0:
  t.append(dt*(K+1))
  T=(dt*(K+1))
  if T==Tchange:
      p=10000  #補給をどのくらいするか決められる

  else:
    p=0
  x.append(x[K]+p+dt*(-alpha*y[K]))
  y.append(y[K]-dt*beta*x[K])
  K=K+1
##print(x[K+1],y[K+1])
plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(t,x)
plt.plot(t,y)
plt.show()
```

図 5　途中で補給がある場合のプログラム

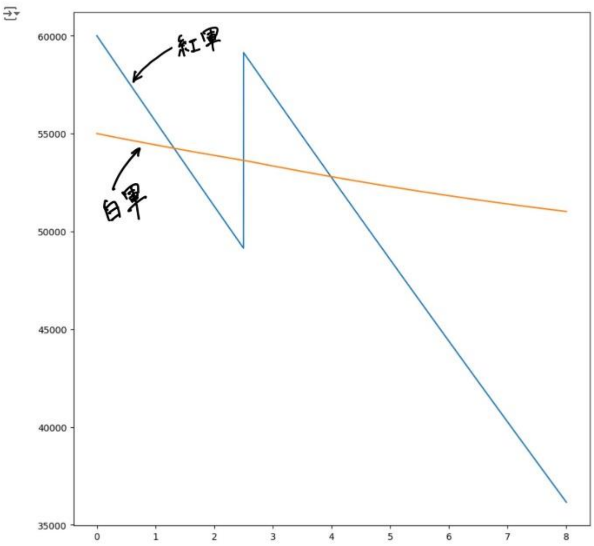

図６　途中で補給がある場合の兵士の人数の推移

3.　検証

3.1.　関ヶ原の戦いの概要

関ヶ原の戦いとは、慶長５年(1600)9 月 15 日、家康の覇権確立し日本史の大転換点となった出来事である。東軍は徳川家康軍７万５千、西軍は石田三成軍８万数千、これらは主要に戦った軍である。最初は石田三成率いる西軍の方が優勢であった。しかし徳川家康の巧みな戦略により、戦い開始４時間後に西軍であった小早川秀秋隊１万５千が裏切った。その結果徳川家康側の東軍が勝利を収めた。これが関ヶ原の戦いの概略だ。

3.2.　２で記した理論による、関ヶ原の戦いの再現

東軍、西軍、寝返った人数をそれぞれ x.append(),y.append(),Tchange に入力する。寝返った兵士は戦闘開始から４時間目まで動きがなかったため東軍の補給と考えてよい。また、西軍の方が有利な陣形であったことを考慮して、alpha,beta はそれぞれ 0.0337,0.0218 と仮定した。以下図 7,8 がそのプログラムとグラフである。

```
[ ]  import matplotlib.pyplot as plt
     N=1000
     x=[] #
     y=[] #
     t=[]
     x.append(75000) #徳川の戦闘員数
     y.append(83000) #石田の戦闘員数
     t.append(0)
     dt=1/N
     alpha=0.0337 #石田軍の戦闘力
     beta=0.0218 #徳川軍の戦闘力
     p=0
     K=0
     Tend = 8 #グラフの定義域
     Tchange=4 #寝返った時間
     while K<=N*Tend-1 and x[K]>=0 and y[K]>=0:
       t.append(dt*(K+1))
       T=(dt*(K+1))
       if T==Tchange:
           p=15000 #石田軍から徳川軍に寝返った人数

       else:
         p=0
       x.append(x[K]+p+dt*(-alpha*y[K]))
       y.append(y[K]-dt*beta*x[K])
       K=K+1
     ##print(x[K+1],y[K+1])
     plt.figure(figsize=(10,10))
     plt.plot(t,x)
     plt.plot(t,y)
     plt.show()
```

図 7　関ヶ原の戦いの数値を代入したプログラム

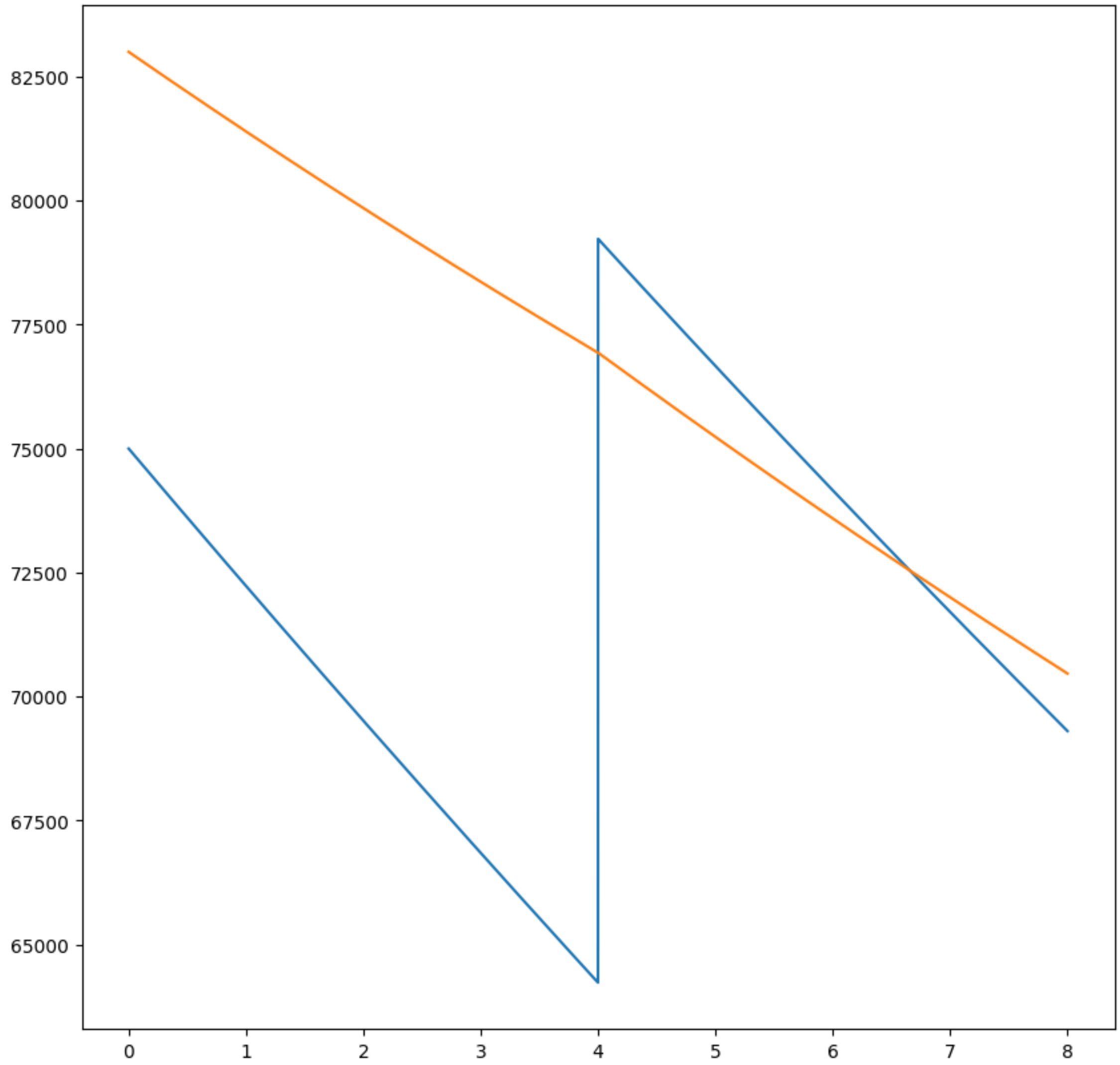

図 8　関ヶ原の戦いの数値を代入したときの兵士の人数の推移

青が徳川軍、黄が石田軍である。図 8 より、戦闘開始時点では人数も少なく不利な立場にあった徳川軍は、戦闘開始 4 時間目まで急速に戦闘員が減少していったことが読み取れる。しかし、4 時間目で石田軍から寝返った 15, 000 人の戦闘員が補給されたことにより、戦闘終了時 (6 時間目) で徳川軍が石田軍より僅かな差で勝利していることが読み取れる。

3.3　関ヶ原の歴史改変

関ヶ原の戦いでは、図 8 からも分かる通り、石田軍からの寝返りがあったことに

より徳川軍が勝利したといえる。しかし、寝返るタイミングを見誤ったり、寝返る人数が少なかったりしたら石田軍が勝利していたかもしれない。そこで、寝返る人数(p)と寝返る時間(Tchange)の値を変えてみた。

3.3.1　寝返る人数が少なすぎたとき

p=10000 を代入し、戦闘開始 4 時間後に 10000 人寝返ったとした。以下図 9, 10 がその時のプログラムとグラフである。

```
import matplotlib.pyplot as plt
N=1000
x=[] #
y=[] #
t=[]
x.append(75000) #徳川の戦闘員数
y.append(83000) #石田の戦闘員数
t.append(0)
dt=1/N
alpha=0.0337 #石田軍の戦闘力
beta=0.0218 #徳川軍の戦闘力
p=0
K=0
Tend = 8 #グラフの定義域
Tchange=4 #寝返った時間
while K<=N*Tend-1 and x[K]>=0 and y[K]>=0:
  t.append(dt*(K+1))
  T=(dt*(K+1))
  if T==Tchange:
      p=10000 #石田軍から徳川軍に寝返った人数

  else:
    p=0
  x.append(x[K]+p+dt*(-alpha*y[K]))
  y.append(y[K]-dt*beta*x[K])
  K=K+1
##print(x[K+1],y[K+1])
plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(t,x)
plt.plot(t,y)
plt.show()
```

図 9　寝返る人数が少なすぎた場合のプログラミング

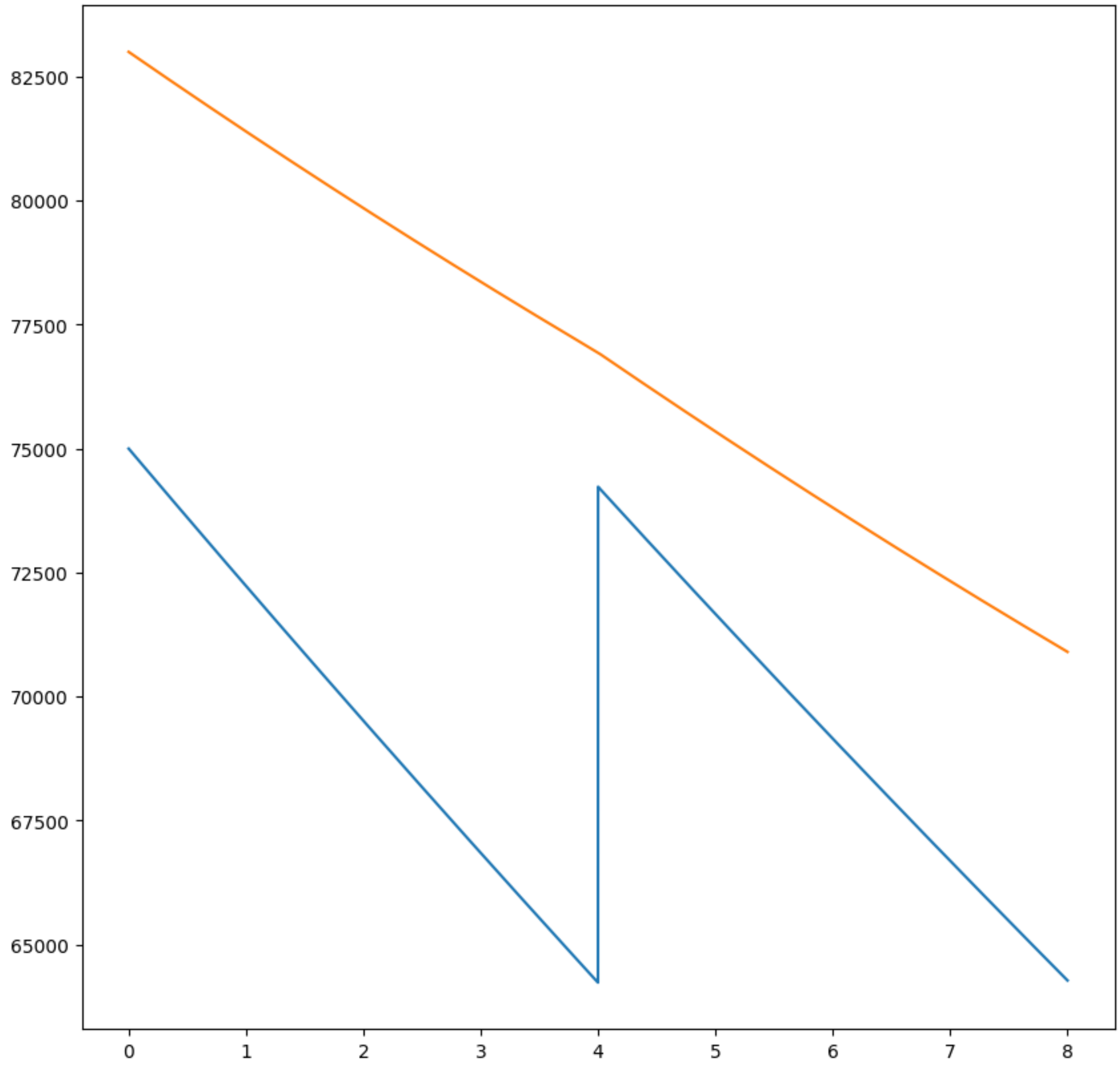

図 10　寝返る人数が少なすぎた場合の兵士の人数の推移

寝返る人数が少なすぎたことにより、徳川軍が逆転することができなかったことが読み取れる。

3.3.2　寝返る時間が早すぎたとき

Tchange=0.5 を代入し、戦闘開始 30 分後に 15000 人寝返ったとした。以下図 11,12 がその時のプログラムとグラフである。

```
import matplotlib.pyplot as plt
N=1000
x=[] #
y=[] #
t=[]
x.append(75000) #徳川の戦闘員数
y.append(85000) #石田の戦闘員数
t.append(0)
dt=1/N
alpha=0.0337 #石田軍の戦闘力
beta=0.0218 #徳川軍の戦闘力
p=0
K=0
Tend = 8 #グラフの定義域
Tchange=0.5 #寝返った時間
while K<=N*Tend-1 and x[K]>=0 and y[K]>=0:
  t.append(dt*(K+1))
  T=(dt*(K+1))
  if T==Tchange:
      p=15000 #石田軍から徳川軍に寝返った人数

  else:
    p=0
  x.append(x[K]+p+dt*(-alpha*y[K]))
  y.append(y[K]-dt*beta*x[K])
  K=K+1
##print(x[K+1],y[K+1])
plt.figure(figsize=(10,10))
plt.plot(t,x)
plt.plot(t,y)
plt.show()
```

図 11　寝返るのが早すぎた場合のプログラム

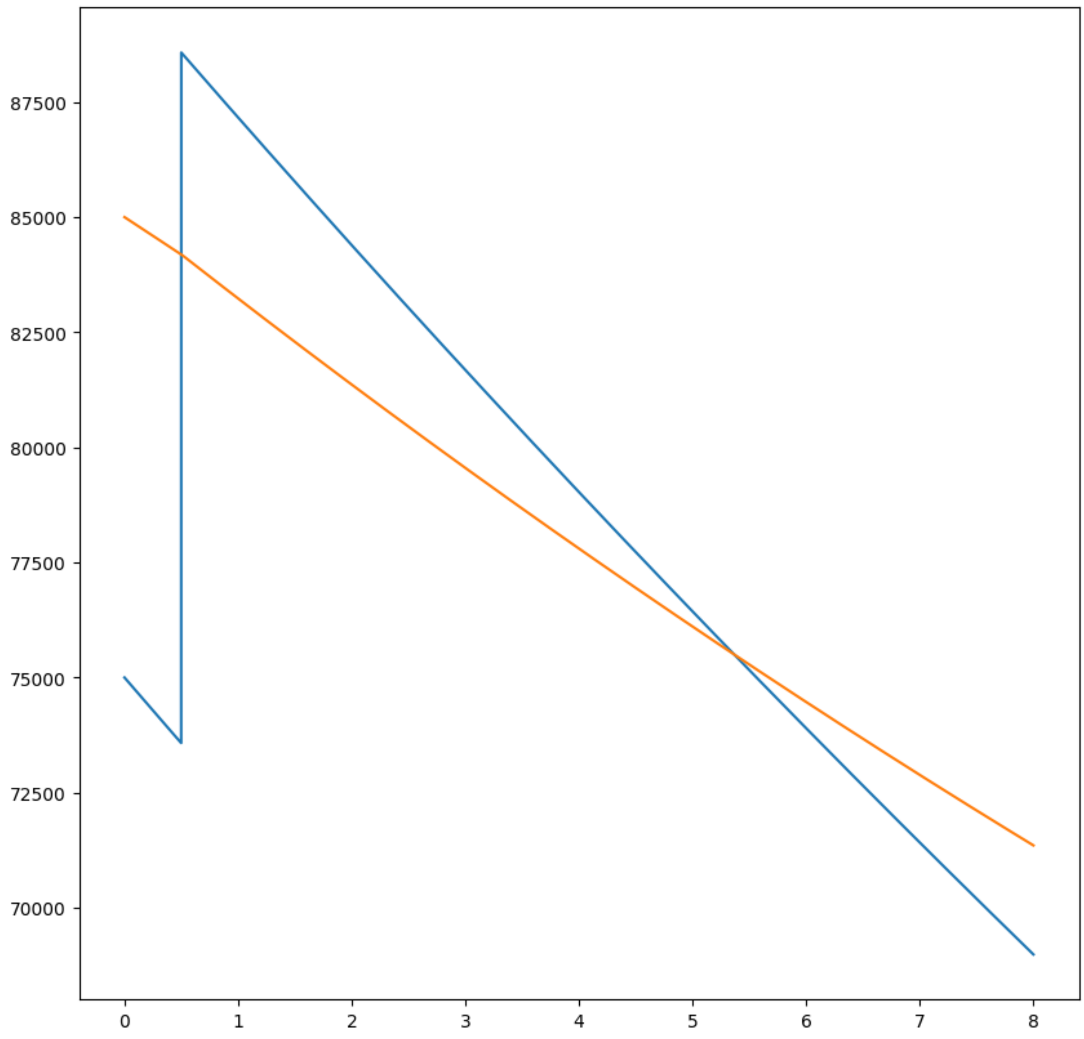

図 12　寝返るのが早すぎた場合の兵士の人数の推移

寝返りが早すぎたことにより、一度逆転した徳川軍は、戦闘終了時点で石田軍に再度逆転し返されてしまっている。

4.　まとめ

寝返りを失敗させることにより、無事徳川軍を敗北に追い込むことに成功した。

数学は社会において不必要であるという言葉を少なくとも一回は聞いたことがあるだろう。しかし今回の研究で関ヶ原の戦いで数学を扱ったことにより、歴史の事実を数式で表せる驚きと嬉しさを受け取ってもらえたら幸いである。

5.　参考文献

・『関ヶ原合戦』二木謙一　中公文庫　2021.08.25

・『自然の数理と社会の数理１』　佐藤總夫　日本評論社　1984.10.1