コラッツの双子とｓつ子の数と条件

チーム名：満身創痍

目次

1. 研究動機..2
2. コラッツ予想とは..2
3. 双子とは..2
4. 研究目標..3
5. 研究手順..3
6. Level 1の計算結果...4
7. Level 2の計算結果...5
8. Level 3の計算結果...7
9. Level 4の計算結果...9
10. Level 5の計算結果...15
11. Level 1の計算方法...23
12. Level 2の計算方法...24
13. Level 5の計算の一部...28
14. まとめ・考察..36
15. 参考文献..36
16. Level ごとの分岐表（付録）....................................37

1. 研究動機

コラッツ予想という問題があることを知り、「シンプルでありながら未解決である」という点に惹かれた。今回、双子の条件やｓつ子の存在を調べることで、コラッツ予想の背後にある規則性や新たな発見に繋がる手掛かりが得られるのではないかと考え、この研究に取り組む運びとなった。

2. コラッツ予想とは

コラッツ予想とは、任意の自然数$k > 0$に対して、以下の操作$C(k)$を有限回繰り返すと1になる。すなわち、$C^m(k) = 1$になる$m \in \mathbb{N}$が存在する予想のことである。

$$C(k) = \begin{cases} \dfrac{k}{2} & (k \equiv 0 \; mod \; 2) \\ 3k + 1 & (k \equiv 1 \; mod \; 2) \end{cases}$$

Ex.）$k = 5$のとき、$C(5) = 5 \times 3 + 1 = 16$, $C^2(5) = C(16) = \frac{16}{2} = 8$,

$C^3(5) = C(8) = \frac{8}{2} = 4$, $C^4(5) = 2$, $C^5(5) = 1$

$$5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

3. 双子とは

定義（$\boldsymbol{Col(k)}$）

$Col(k)$を

$$Col(k) \coloneqq k\text{が初めて 1 になるまでの C の回数}$$

定義する。

定義（双子）

自然数$k, k+1$に対し、

$$Col(k) = Col(k+1)$$

が成り立つとき、$k, k+1$は**コラッツの双子**であるという。

Ex.）20, 21 は双子である。

$$20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$
$$21 \to 64 \to 32 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

定義（$\boldsymbol{s}$つ子）

自然数$k, \dots, k+s-1$に対し、

$$Col(k) = \cdots = Col(k+s-1)$$

が成り立つとき、$k, \dots, k+s-1$は**$\boldsymbol{s}$つ子**であるという。

4. 研究目標

本研究では、「双子がどのくらい存在するか」、「sつ子はどこまで存在するのか」を明らかにすることを目標とした。

5. 研究手順

コラッツ予想は、任意の数で成り立つという予想のため、調べる数が膨大になってしまう。そのため、本研究では「Level」という制限を設け、Level 3 から Level 5 に関して調べた。

定義（$\boldsymbol{Level}$）

自然数kの $Level$とは、

kが 1 になるまでに出る奇数の数

のことである。

研究手順は以下の通りである。

① Level nとなる奇数dを式で表す。

② Level nで 2 nつ子が存在すると仮定し、矛盾するか調べる。

③ Level nの双子の条件を調べる。

④ Level nで何つ子までいるか調べ、$n = 2, 3, 4, 5$に関しては実際の数を求める。

$n = 1$ から始め、$n = 5$まで計算した。

6. Level 1 の計算結果

Level 1 となる奇数dは、奇数操作の後の偶数の操作回数をa_1とすると以下のように表せる。

Level 1 の奇数 d　　$d \xrightarrow{\text{奇}} \underbrace{\longrightarrow}_{a_1\text{コの偶数そうさ}} 1$

$1 \xrightarrow{a_1\text{コの偶}} 2^{a_1} \xrightarrow{\text{奇}} \frac{1}{3}(2^{a_1}-1)$

よって

$$d = \frac{1}{3}(2^{a_1}-1)$$

このとき、奇偶の双子（$Col(d) = Col(d+1)$）は存在せず、$d-1$を$b_0, b_1 \in \mathbb{N}^{\times}$を用いて以下のように表すと偶奇の双子（$Col(d-1) = Col(d)$）になる条件は、

Level 1 の偶数

$$\frac{2^{b_0}}{3}(2^{b_1}-1)$$

偶奇の双子の条件

1) $b_0 = 2$

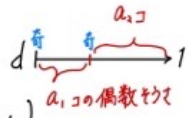
である。奇偶の双子が存在しないことから 3 つ子が存在しないと言える。

（「11．Level 1 の計算方法」に計算方法を記載）

7. Level 2 の計算結果

Level　2 となる奇数dは、i回目の奇数操作の後の偶数の操作回数をa_iとすると以下のように表せる。

Level2の奇数 d



$$1 \xrightarrow{a_2\text{コの偶}} 2^{a_2} \xrightarrow{\text{奇}} \frac{1}{3}(2^{a_2}-1) \xrightarrow{a_1\text{コの偶}} \frac{2^{a_1}}{3}(2^{a_2}-1) \xrightarrow{\text{奇}} \frac{1}{3}\left(\frac{2^{a_1}}{3}(2^{a_2}-1)-1\right)$$

よって

$$d = \frac{1}{9}\left(2^{a_1+a_2} - 2^{a_1} - 3\right)$$

このとき、$Col(d) = Col(d+2)$となるdは存在しない。すなわち、**4 つ子**は存在しない。

次に、Level　2 の偶数を$b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{N}^{\times}$を用いて以下のように表すと偶奇の双子（$Col(d-1) = Col(d)$）、奇偶の双子（$Col(d) = Col(d+1)$）になる条件は、

Level2の偶数

$$\frac{2^{b_0}}{9}\left(2^{b_1+b_2} - 2^{b_1} - 3\right)$$

偶奇の双子の条件	奇偶の双子の条件
1) $a_1 = 1$ $b_0 = 1,\ b_1 = 2$ 2) $a_1 = b_1 + 2$ $b_0 = 2,\ b_1 \geq 1$	1) $a_1 = 4$ $b_0 = 1,\ b_1 = 1$

である。

（「12.　Level　2 の計算方法」に計算方法を記載）

3 つ子になるの条件は、以下のように確認することができる。

Level 2

偶奇偶の3つ子

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

$A \quad a \quad B$

2)と1)より

2) bをAと置きかえると

$A_0=1,\ A_1=2,\ A_2\geq 1$

$a_1=1,\ a_2=A_2+2$

1) bをBと置き換えると

$a_1=1,\ a_2=4$

$B_0=2,\ B_1=2,\ B_2=1$

$A_2=2$とすると. 2)のaと1)のaの値は一致する.

つまり. 以下の3つ子が生成できる.

1) $A_0=2,\ A_1=2$

$a_1=4$

$B_0=1,\ B_1=1$

Level 2の3つ子になる最小の値をもとめる.

$$d=\frac{1}{9}\left(2^{a_1+a_2}-2^{a_1}-3\right)$$

$a_1=4$を代入すると.

$$d=\frac{1}{9}\left(2^{4+a_2}-2^4-3\right)=\frac{1}{9}\left(2^{4+a_2}-19\right)$$

$d\in\mathbb{N}$より

$$2^{4+a_2}-19\equiv 0 \mod 9$$

となればよい.

$$2^{4+a_2}\equiv 19\equiv 1 \mod 9$$

$$4+a_2=6n \quad (n\in\mathbb{N}_{\geq 2})$$

$n=2$とすると.

$$2^{4+a_2}=2^{12}$$

よって

$$d=\frac{1}{9}\left(2^{12}-19\right)$$

$$=453$$

以上より

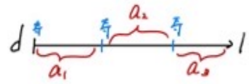
Level2の最小の3つ子は

452, 453, 454

8. Level 3 の計算結果

Level 3 となる奇数 d は、i回目の奇数操作の後の偶数の操作回数をa_iとすると以下のように表せる。

Level3 の奇数 d



$$d = \frac{1}{27}\left(2^{a_1+a_2+a_3} - 2^{a_1+a_2} - 3\cdot 2^{a_1} - 9\right)$$

このとき、$Col(d) = Col(d+4)$となるdは存在しない。すなわち、6 つ子は存在しない。

次に、Level 3 の偶数を$b_0, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{N}^{\times}$を用いて以下のように表すと偶奇の双子（$Col(d-1) = Col(d)$）、奇偶の双子（$Col(d) = Col(d+1)$）になる条件は、

Level3 の偶数

$$\frac{2^{b_0}}{27}\left(2^{b_1+b_2+b_3} - 2^{b_1+b_2} - 3\cdot 2^{b_1} - 9\right)$$

偶奇の双子の条件	奇偶の双子の条件
1) $a_1 = 1,\ a_2 = 1$ $b_0 = 1,\ b_1 = 1,\ b_2 = 2$	1) $a_1 = 1,\ a_2 = 6$ $b_0 = 2,\ b_1 = 2,\ b_2 = 1$
2) $a_1 = 1,\ a_2 = b_2 + 2$ $b_0 = 1,\ b_1 = 2,\ b_2 \geq 1$	2) $a_1 = 2,\ a_2 = 4$ $b_0 = 1,\ b_1 = 2,\ b_2 = 1$
3) $a_1 = b_1 + 2,\ a_2 = b_2$ $b_0 = 2,\ b_1 \geq 1,\ b_2 \geq 1$	3) $a_1 = 3,\ a_2 = 2$ $b_0 = 1,\ b_1 = 1,\ b_2 = 1$
4) $a_1 = 2,\ a_2 = 6$ $b_0 = 4,\ b_1 = 1,\ b_2 = 1$	4) $a_1 = 4,\ a_2 = b_2 - 2,$ $b_0 = 1,\ b_1 = 1,\ b_2 \geq 3$

3つ子になる条件は、Level 2 のときと同様に考えると

Level 3

偶奇偶の3つ子

↑ ↑ ↑

A a B

2) 1) より

1) $A_0 = 1$, $A_1 = 2$, $A_2 = 4$

$a_1 = 1$, $a_2 = 6$

$B_0 = 2$, $B_1 = 2$, $B_2 = 1$

3) 3) より

2) $A_0 = 2$, $A_1 = 1$, $A_2 = 2$

$a_1 = 3$, $a_2 = 2$

$B_0 = 1$, $B_1 = 1$, $B_2 = 1$

3) 4) より

3) $A_0 = 2$, $A_1 = 2$, $A_2 = B_2 - 2$

$a_1 = 4$, $a_2 = B_2 - 2$

$B_0 = 1$, $B_1 = 1$, $B_2 \geqq 3$

奇偶奇の3つ子

↑ ↑ ↑

a B b

1) 3) より

1) $a_1 = 1$, $a_2 = 6$,

$B_0 = 2$, $B_1 = 2$, $B_2 = 1$

$b_1 = 4$, $b_2 = 1$

2) 2) より

2) $a_1 = 2$, $a_2 = 4$,

$B_0 = 1$, $B_1 = 2$, $B_2 = 1$

$b_1 = 1$, $b_2 = 3$

また、5つ子になる条件は

偶奇偶奇偶の5つ子

↑ ↑ ↑ ↑ ↑

A a B b C

1) 3) より

1) $A_0 = 1$, $A_1 = 2$, $A_2 = 4$

$a_1 = 1$, $a_2 = 6$

$B_0 = 2$, $B_1 = 2$, $B_2 = 1$

$b_1 = 4$, $b_2 = 1$

$C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 3$

である。

Level 3 の5つ子になる最小の値を求める.

$$d = \frac{1}{27}\left(2^{a_1+a_2+a_3} - 2^{a_1+a_2} - 3\cdot 2^{a_1} - 9\right)$$

$a_1 = 1,\ a_2 = 6$ を代入すると.

$$d = \frac{1}{27}\left(2^{1+6+a_3} - 2^{1+6} - 3\cdot 2^{1} - 9\right) = \frac{1}{27}\left(2^{7+a_3} - 143\right)$$

$d \in \mathbb{N}$ より

$$2^{7+a_2} - 143 \equiv 0 \mod 27$$

となればよい.

$$2^{7+a_2} \equiv 143 \equiv 8 \mod 27$$

$$7 + a_2 = 18n + 3 \quad (n \in \mathbb{N}_{\geq 1})$$

$n = 1$ とすると.

$$2^{7+a_2} = 2^{21}$$

よって

$$d = \frac{1}{27}\left(2^{21} - 143\right) = 77667$$

以上より

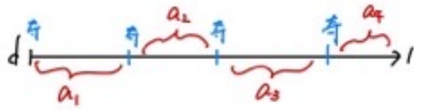
Level3の最小の5つ子は

77666, 77667, 77668, 77669, 77670

9. Level 4 の計算結果

Level 4 となる奇数 d は、i回目の奇数操作の後の偶数の操作回数をa_iとすると以下のように表せる。

Level 4 の奇数 d



$$d = \frac{1}{81}\left(2^{a_1+a_2+a_3+a_4} - 2^{a_1+a_2+a_3} - 3\cdot 2^{a_1+a_2} - 9\cdot 2^{a_1} - 27\right)$$

このとき、$Col(d) = Col(d+6)$となるdは存在しない。すなわち、8 つ子は存在しない。

次に、Level 4 の偶数を$b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4 \in \mathbb{N}^{\times}$を用いて以下のように表すと偶奇の双子（$Col(d-1) = Col(d)$）、奇偶の双子（$Col(d) = Col(d+1)$）になる条件は、

Level 4 の偶数

$$\frac{2^{b_0}}{81}\left(2^{b_1+b_2+b_3+b_4}-2^{b_1+b_2+b_3}-3\cdot 2^{b_1+b_2}-9\cdot 2^{b_1}-27\right)$$

偶奇の双子の条件

1) $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=1$
$b_0=1$, $b_1=1$, $b_2=1$, $b_3=2$,

2) $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=b_3+2$
$b_0=1$, $b_1=1$, $b_2=1$, $b_3=\geqq 1$,

3) $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=6$
$b_0=1$, $b_1=4$, $b_2=1$, $b_3=1$,

4) $a_1=1$, $a_2=b_2+2$, $a_3=b_3$
$b_0=1$, $b_1=2$, $b_2\geqq 1$, $b_3\geqq 1$,

5) $a_1=b_1+2$, $a_2=b_2$, $a_3=b_3$
$b_0=2$, $b_1\geqq 1$, $b_2\geqq 1$, $b_3\geqq 1$,

6) $a_1=2$, $a_2=1$, $a_3=6$
$b_0=3$, $b_1=1$, $b_2=2$, $b_3=1$,

7) $a_1=2$, $a_2=2$, $a_3=10$
$b_0=6$, $b_1=3$, $b_2=2$, $b_3=1$,

8) $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=6$
$b_0=4$, $b_1=2$, $b_2=2$, $b_3=1$,

9) $a_1=2$, $a_2=5$, $a_3=2$
$b_0=4$, $b_1=1$, $b_2=1$, $b_3=1$,

10) $a_1=2$, $a_2=6$, $a_3=b_3-2$
$b_0=4$, $b_1=1$, $b_2=1$, $b_3\geqq 3$,

11) $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=4$
$b_0=4$, $b_1=1$, $b_2=2$, $b_3=1$,

奇偶の双子の条件

1) $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=8$
$b_0=3$, $b_1=1$, $b_2=3$, $b_3=1$,

2) $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=6$
$b_0=2$, $b_1=1$, $b_2=3$, $b_3=1$,

3) $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=6$
$b_0=2$, $b_1=3$, $b_2=2$, $b_3=1$,

4) $a_1=1$, $a_2=4$, $a_3=4$
$b_0=2$, $b_1=2$, $b_2=2$, $b_3=1$,

5) $a_1=1$, $a_2=5$, $a_3=2$
$b_0=2$, $b_1=2$, $b_2=1$, $b_3=1$,

6) $a_1=1$, $a_2=6$, $a_3=b_3-2$
$b_0=2$, $b_1=2$, $b_2=1$, $b_3\geqq 3$,

7) $a_1=2$, $a_2=1$, $a_3=6$
$b_0=1$, $b_1=3$, $b_2=2$, $b_3=1$,

8) $a_1=2$, $a_2=2$, $a_3=4$
$b_0=1$, $b_1=2$, $b_2=2$, $b_3=1$,

9) $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=2$
$b_0=1$, $b_1=2$, $b_2=1$, $b_3=1$,

10) $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=b_3-2$
$b_0=1$, $b_1=2$, $b_2=1$, $b_3\geqq 3$,

11) $a_1=3$, $a_2=2$, $a_3=b_3-2$
$b_0=1$, $b_1=1$, $b_2=1$, $b_3\geqq 3$,

12) $a_1=4$, $a_2=b_2-2$, $a_3=b_3$
$b_0=1$, $b_1=1$, $b_2\geqq 3$, $b_3\geqq 1$,

13) $a_1=6$, $a_2=1$, $a_3=1$
$b_0=1$, $b_1=1$, $b_2=2$, $b_3=6$,

14) $a_1=3$, $a_2=1$, $a_3=2$
$b_0=1$, $b_1=1$, $b_2=1$, $b_3=1$,

３つ子になる条件は、Level ２のときと同様に考えると

Level 4

偶奇偶の３つ子

↑ ↑ ↑

A a B

2) 1) より

1) $A_0=1, A_1=1, A_2=1, A_3=6$

$a_1=1, a_2=1, a_3=8$

$B_0=3, B_1=1, B_2=3, B_3=1$

3) 2) より

2) $A_0=1, A_1=4, A_2=1, A_3=1$

$a_1=1, a_2=2, a_3=6$

$B_0=2, B_1=1, B_2=3, B_3=1$

4) 3) より

3) $A_0=1, A_1=2, A_2=1, A_3=6$

$a_1=1, a_2=3, a_3=6$

$B_0=2, B_1=3, B_2=2, B_3=1$

4) 4) より

4) $A_0=1, A_1=2, A_2=2, A_3=4$

$a_1=1, a_2=4, a_3=4$

$B_0=2, B_1=2, B_2=2, B_3=1$

4) 5) より

5) $A_0=1, A_1=2, A_2=3, A_3=2$

$a_1=1, a_2=5, a_3=2$

$B_0=2, B_1=2, B_2=1, B_3=1$

4) 6) より

6) $A_0=1, A_1=2, A_2=4, A_3=B_3-2$

$a_1=1, a_2=6, a_3=B_3-2$

$B_0=2, B_1=2, B_2=1, B_3\geqq 3$

奇偶奇の３つ子

↑ ↑ ↑

a B b

2) 5) より

1) $a_1=1, a_2=2, a_3=6$

$B_0=2 \quad B_1=1, B_2=3, B_3=1$

$b_1=3 \quad b_2=3, b_3=1$

3) 5) より

2) $a_1=1, a_2=3, a_3=6$

$B_0=2 \quad B_1=3, B_2=2, B_3=1$

$b_1=5 \quad b_2=2, b_3=1$

4) 5) より

3) $a_1=1, a_2=4, a_3=4$

$B_0=2 \quad B_1=2, B_2=2, B_3=1$

$b_1=4 \quad b_2=2, b_3=1$

5) 5) より

4) $a_1=1, a_2=5, a_3=2$

$B_0=2 \quad B_1=2, B_2=1, B_3=1$

$b_1=4 \quad b_2=1, b_3=1$

6) 5) より

5) $a_1=1, a_2=6, a_3=B_3-2$

$B_0=2 \quad B_1=2, B_2=1, B_3\geqq 3$

$b_1=4 \quad b_2=1, b_3=B_3$

8) 4) より

6) $a_1=2, a_2=2, a_3=4$

$B_0=1 \quad B_1=2, B_2=2, B_3=1$

$b_1=1 \quad b_2=4, b_3=1$

5) 11) より

7) $A_0=2,\ A_1=1,\ A_2=2,\ A_3=b_3-2$

$a_1=3,\ a_2=2,\ a_3=b_3-2$

$B_0=1,\ B_1=1,\ B_2=1,\ B_3\geqq 3$

5) 12) より

8) $A_0=2,\ A_1=2,\ A_2=B_2-2,\ A_3=B_3$

$a_1=4,\ a_2=B_2-2,\ a_3=B_3$

$B_0=1,\ B_1=1,\ B_2\geqq 3,\ B_3\geqq 1$

5) 13) より

9) $A_0=2,\ A_1=4,\ A_2=1,\ A_3=1$

$a_1=6,\ a_2=1,\ a_3=1$

$B_0=1,\ B_1=1,\ B_2=2,\ B_3=6$

5) 14) より

10) $A_0=2,\ A_1=1,\ A_2=1,\ A_3=2$

$a_1=3,\ a_2=1,\ a_3=2$

$B_0=1,\ B_1=1,\ B_2=1,\ B_3=1$

9) 4) より

7) $a_1=2,\ a_2=3,\ a_3=2$

$B_0=1\quad B_1=2,\ B_2=1,\ B_3=1$

$b_1=1\quad b_2=3,\ b_3=1$

10) 4) より

8) $a_1=2,\ a_2=4,\ a_3=B_3-2$

$B_0=1\quad B_1=2,\ B_2=1,\ B_3\geqq 3$

$b_1=1\quad b_2=3,\ b_3=B_3$

11) 2) より

9) $a_1=3,\ a_2=2,\ a_3=B_3-2$

$B_0=1\quad B_1=1,\ B_2=1,\ B_3\geqq 3$

$b_1=1\quad b_2=1,\ b_3=B_3+2$

14) 2) より

10) $a_1=3,\ a_2=1,\ a_3=2$

$B_0=1\quad B_1=1,\ B_2=1,\ B_3=1$

$b_1=1\quad b_2=1,\ b_3=3$

6) 7) より

11) $A_0=3,\ A_1=1,\ A_2=2,\ A_3=1$

$a_1=2,\ a_2=1,\ a_3=6$

$B_0=1\quad B_1=3,\ B_2=2,\ B_3=1$

11) 10) より

12) $A_0=4,\ A_1=1,\ A_2=2,\ A_3=1$

$a_1=2,\ a_2=4,\ a_3=4$

$B_0=1,\ B_1=2,\ B_2=1,\ B_3=6$

5 つ子になる条件は

偶奇偶奇偶の5つ子

$$\begin{array}{ccccc} 偶 & 奇 & 偶 & 奇 & 偶 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A & a & B & b & \mathcal{C} \end{array}$$

4) 8) より

1) $A_0 = 1, A_1 = 2, A_2 = 2, A_3 = 4$
$a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 4$
$B_0 = 2, B_1 = 2, B_2 = 2, B_3 = 1$
$b_1 = 4, b_2 = 2, b_3 = 1$
$\mathcal{C}_0 = 1, \mathcal{C}_1 = 1, \mathcal{C}_2 = 4, \mathcal{C}_3 = 1$

5) 8) より

2) $A_0 = 1, A_1 = 2, A_2 = 3, A_3 = 2$
$a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 2$
$B_0 = 2, B_1 = 2, B_2 = 1, B_3 = 1$
$b_1 = 4, b_2 = 1, b_3 = 1$
$\mathcal{C}_0 = 1, \mathcal{C}_1 = 1, \mathcal{C}_2 = 3, \mathcal{C}_3 = 1$

6) 8) より

3) $A_0 = 1, A_1 = 2, A_2 = 4, A_3 = B_3 - 2$
$a_1 = 1, a_2 = 6, a_3 = B_3 - 2$
$B_0 = 2, B_1 = 2, B_2 = 1, B_3 \geqq 3$
$b_1 = 4, b_2 = 3, b_3 = B_3$
$\mathcal{C}_0 = 1, \mathcal{C}_1 = 1, \mathcal{C}_2 = 5, \mathcal{C}_3 = B_3$

奇偶奇偶奇の5つ子

$$\begin{array}{ccccc} 奇 & 偶 & 奇 & 偶 & 奇 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a & B & b & \mathcal{C} & c \end{array}$$

8) 2) より

1) $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 4$
$B_0 = 1, B_1 = 2, B_2 = 1, B_3 = 6$
$b_1 = 1, b_2 = 3, b_3 = 6$
$\mathcal{C}_0 = 2, \mathcal{C}_1 = 3, \mathcal{C}_2 = 2, \mathcal{C}_3 = 1$
$c_1 = 5, c_2 = 2, c_3 = 1$

12) 3) より

4) $A_0 = 4, A_1 = 1, A_2 = 2, A_3 = 1$
$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 4$
$B_0 = 1, B_1 = 2, B_2 = 1, B_3 = 6$
$b_1 = 1, b_2 = 3, b_3 = 6$
$\mathcal{C}_0 = 2, \mathcal{C}_1 = 3, \mathcal{C}_2 = 2, \mathcal{C}_3 = 1$

6 つ子になる条件は

偶奇偶奇偶奇 の6つ子

$\uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow$

A a B b C c

4) 1) より

1) $A_0=4, A_1=1, A_2=2, A_3=1$

$a_1=2, a_2=4, a_3=4$

$B_0=1, B_1=2, B_2=1, B_3=6$

$b_1=1, b_2=3, b_3=6$

$C_0=2, C_1=3, C_2=2, C_3=1$

$c_1=5, c_2=2, c_3=1$

Level14 の6つ子になる最小の値を求める.

$$d=\frac{1}{81}\left(2^{a_1+a_2+a_3+a_4}-2^{a_1+a_2+a_3}-3\cdot2^{a_1+a_2}-9\cdot2^{a_1}-27\right)$$

$a_1=2, a_2=4, a_3=4$ を代入すると

$$d=\frac{1}{81}\left(2^{10+a_4}-2^{10}-3\cdot2^{6}-9\cdot2^{2}-27\right)=\frac{1}{81}\left(2^{10+a_4}-1279\right)$$

$d\in\mathbb{N}$ より

$$2^{10+a_4}-1279\equiv0 \mod 81$$

となればよい.

$$2^{10+a_4}\equiv1279\equiv64 \mod 81$$

$$10+a_4=54n+6 \quad (n\in\mathbb{N}_{\geq1})$$

$n=1$ とすると.

$$2^{10+a_4}=2^{60}$$

よって

$$d=\frac{1}{81}\left(2^{60}-1279\right)$$

$$=14233598822306737$$

以上より

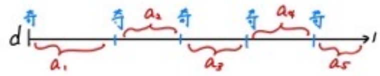
Level14の最小の6つ子は

$\underline{14233598822306736 \sim 14233598822306741}$

10. Level 5 の計算結果

Level 5 となる奇数 d は、i回目の奇数操作の後の偶数の操作回数をa_iとすると以下のように表せる。

Level 5 の奇数 d



$$d = \frac{1}{243}\left(2^{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5} - 2^{a_1+a_2+a_3+a_4} - 3\cdot 2^{a_1+a_2+a_3} - 9\cdot 2^{a_1+a_2} - 27\cdot 2^{a_1} - 81\right)$$

このとき、$Col(d) = Col(d+4)$となるdは存在しない。すなわち、**6 つ子**は存在しない。
次に、Level 5 の偶数を$b_0, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{N}^{\times}$を用いて以下のように表すと偶奇の双子（$Col(d-1) = Col(d)$）、奇偶の双子（$Col(d) = Col(d+1)$）になる条件は、

偶奇の双子の条件

1) $a_1=1, a_2=1, a_3=1, a_4=1$
$b_0=1, b_1=1, b_2=1, b_3=1, b_4=2$
2) $a_1=1, a_2=1, a_3=1, a_4=b_4+2$
$b_0=1, b_1=1, b_2=1, b_3=2 \quad b_4 \geqq 1$
3) $a_1=1, a_2=1, a_3=b_3+2, a_4=b_4$
$b_0=1 \quad b_1=1, b_2=2, b_3 \geqq 1 \quad b_4 \geqq 1$
4) $a_1=1, a_2=1, a_3=2, a_4=6$
$b_0=1, b_1=1, b_2=4, b_3=1, b_4=1$
5) $a_1=1, a_2=b_2+2, a_3=b_3, a_4=b_4$
$b_0=1, b_1=2, b_2 \geq 1, b_3 \geqq 1 \quad b_4 \geqq 1$
6) $a_1=1, a_2=2, a_3=1, a_4=6$
$b_0=1, b_1=3, b_2=1, b_3=2 \quad b_4=1$
7) $a_1=1, a_2=2, a_3=3, a_4=6$
$b_0=1, b_1=4, b_2=2 \quad b_3=2 \quad b_4=1$
8) $a_1=1, a_2=2, a_3=4, a_4=4$
$b_0=1, b_1=4, b_2=1, b_3=2, b_4=1$
9) $a_1=1, a_2=2, a_3=5, a_4=2$
$b_0=1, b_1=4, b_2=1, b_3=1 \quad b_4=1$
10) $a_1=1, a_2=2, a_3=6, a_4=b_4-2$
$b_0=1, b_1=4, b_2=1 \quad b_3=1, b_4 \geqq 3$
11) $a_1=1, a_2=2, a_3=2, a_4=10$
$b_0=1, b_1=6, b_2=3, b_3=2, b_4=1$
12) $a_1=b_1+2, a_2=b_2, a_3=b_3, a_4=b_4$
$b_0=2, b_1 \geq 1, b_2 \geq 1, b_3 \geqq 1 \quad b_4 \geqq 1$
13) $a_1=2, a_2=1, a_3=1, a_4=8$
$b_0=3, b_1=2, b_2=1 \quad b_3=3, b_4=1$
14) $a_1=2, a_2=1 \quad a_3=2, a_4=6$
$b_0=3, b_1=1, b_2=1, b_3=3, b_4=1$

21) $a_1=2, a_2=3 \quad a_3=3, a_4=6$
$b_0=4, b_1=2, b_2=3, b_3=2 \quad b_4=1$
22) $a_1=2, a_2=3, a_3=4, a_4=4$
$b_0=4, b_1=2, b_2=2, b_3=2 \quad b_4=1$
23) $a_1=2, a_2=3, a_3=5, a_4=2$
$b_0=4, b_1=2, b_2=2 \quad b_3=1 \quad b_4=1$
24) $a_1=2, a_2=3, a_3=6, a_4=b_4-2$
$b_0=4, b_1=2, b_2=2, b_3=1, b_4 \geq 3$
25) $a_1=2, a_2=4, a_3=1, a_4=6$
$b_0=4 \quad b_1=1, b_2=3, b_3=2 \quad b_4=1$
26) $a_1=2, a_2=4, a_3=2, a_4=4$
$b_0=4, b_1=1, b_2=2 \quad b_3=2, b_4=1$
27) $a_1=2, a_2=4, a_3=3, a_4=2$
$b_0=4, b_1=1, b_2=2, b_3=1, b_4=1$
28) $a_1=2, a_2=4, a_3=4, a_4=b_4-2$
$b_0=4, b_1=1, b_2=2, b_3=1 \quad b_4 \geqq 3$
29) $a_1=2, a_2=5 \quad a_3=1, a_4=2$
$b_0=4, b_1=1, b_2=1 \quad b_3=1, b_4=1$
30) $a_1=2, a_2=5 \quad a_3=2, a_4=b_4-2$
$b_0=4, b_1=1, b_2=1, b_3=1, b_4 \geq 3$
31) $a_1=2, a_2=6 \quad a_3=b_3-2, a_4=b_4$
$b_0=4, b_1=1, b_2=1, b_3 \geqq 3, b_4 \geqq 1$
32) $a_1=2, a_2=8 \quad a_3=1, a_4=1$
$b_0=4, b_1=1, b_2=1, b_3=2, b_4=6$
33) $a_1=2, a_2=2, a_3=3, a_4=8$
$b_0=6, b_1=1, b_2=2, b_3=3, b_4=1$
34) $a_1=2, a_2=2, a_3=5, a_4=8$
$b_0=6 \quad b_1=4, b_2=1, b_3=3 \quad b_4=1$

15) $a_1=2$, $a_2=1$, $a_3=3$, $a_4=0$
$b_0=3$, $b_1=1$, $b_2=3$, $b_3=2$, $b_4=1$

16) $a_1=2$, $a_2=1$, $a_3=4$, $a_4=4$
$b_0=3$, $b_1=1$, $b_2=2$, $b_3=2$, $b_4=1$

17) $a_1=2$, $a_2=1$, $a_3=5$, $a_4=2$
$b_0=3$, $b_1=1$, $b_2=2$, $b_3=1$, $b_4=1$

18) $a_1=2$, $a_2=1$, $a_3=6$, $a_4=b_4-2$
$b_0=3$ $b_1=1$, $b_2=2$, $b_3=1$ $b_4\geqq 3$

19) $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=1$, $a_4=8$
$b_0=4$ $b_1=3$, $b_2=1$, $b_3=3$ $b_4=1$

20) $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=2$, $a_4=6$
$b_0=4$, $b_1=2$, $b_2=1$, $b_3=3$, $b_4=1$

35) $a_1=2$, $a_2=2$, $a_3=6$, $a_4=6$
$b_0=6$ $b_1=3$, $b_2=1$, $b_3=3$ $b_4=1$

36) $a_1=2$, $a_2=2$, $a_3=7$, $a_4=6$
$b_0=6$, $b_1=3$, $b_2=3$, $b_3=2$, $b_4=1$

37) $a_1=2$, $a_2=2$, $a_3=8$, $a_4=4$
$b_0=6$, $b_1=3$, $b_2=2$, $b_3=2$, $b_4=1$

38) $a_1=2$, $a_2=2$, $a_3=9$, $a_4=2$
$b_0=6$ $b_1=3$, $b_2=2$, $b_3=1$ $b_4=1$

39) $a_1=2$, $a_2=2$, $a_3=10$, $a_4=b_4-2$
$b_0=6$ $b_1=3$, $b_2=2$, $b_3=1$ $b_4\geqq 3$

40) $a_1=2$, $a_2=2$, $a_3=2$, $a_4=10$
$b_0=8$, $b_1=1$, $b_2=1$, $b_3=1$, $b_4=3$

奇偶の双子の条件

1) $a_1=1, a_2=1, a_3=1, a_4=12$
$b_0=4, b_1=2, b_2=4, b_3=2, b_4=1$

2) $a_1=1, a_2=1, a_3=2, a_4=10$
$b_0=3, b_1=2, b_2=4, b_3=2, b_4=1$

3) $a_1=1, a_2=1, a_3=3, a_4=6$
$b_0=3, b_1=1, b_2=1, b_3=1, b_4=3$

4) $a_1=1, a_2=1, a_3=4, a_4=6$
$b_0=3, b_1=1, b_2=2, b_3=3, b_4=1$

5) $a_1=1, a_2=1, a_3=5, a_4=6$
$b_0=3, b_1=1, b_2=4, b_3=2, b_4=1$

6) $a_1=1, a_2=1, a_3=6, a_4=4$
$b_0=3, b_1=1, b_2=3, b_3=2, b_4=1$

7) $a_1=1, a_2=1, a_3=7, a_4=2$
$b_0=3, b_1=1, b_2=3, b_3=1, b_4=1$

8) $a_1=1, a_2=1, a_3=8, a_4=b_4-2$
$b_0=3, b_1=1, b_2=3, b_3=1$

9) $a_1=1, a_2=2, a_3=1, a_4=6$
$b_0=2, b_1=1, b_2=1, b_3=1, b_4=3$

10) $a_1=1, a_2=2, a_3=2, a_4=6$
$b_0=2, b_1=1, b_2=2, b_3=2, b_4=1$

11) $a_1=1, a_2=2, a_3=3, a_4=6$
$b_0=2, b_1=1, b_2=4, b_3=2, b_4=1$

12) $a_1=1, a_2=2, a_3=4, a_4=4$
$b_0=2, b_1=1, b_2=3, b_3=2, b_4=1$

13) $a_1=1, a_2=2, a_3=5, a_4=2$
$b_0=2, b_1=1, b_2=3, b_3=1, b_4=1$

14) $a_1=1, a_2=2, a_3=6, a_4=b_4-2$
$b_0=2, b_1=1, b_2=3, b_3=1$

15) $a_1=1, a_2=3, a_3=1, a_4=8$
$b_0=2, b_1=4, b_2=1, b_3=3, b_4=1$

16) $a_1=1, a_2=3, a_3=2, a_4=6$
$b_0=2, b_1=3, b_2=1, b_3=3, b_4=1$

26) $a_1=1, a_2=5, a_3=2, a_4=b_4-2$
$b_0=2, b_1=2, b_2=1, b_3=1,$

27) $a_1=1, a_2=6, a_3=b_3-2, a_4=b_4$
$b_0=2, b_1=2, b_2=1,$

28) $a_1=1, a_2=8, a_3=1, a_4=1$
$b_0=2, b_1=2, b_2=1, b_3=2, b_4=6$

29) $a_1=2, a_2=1, a_3=1, a_4=8$
$b_0=1, b_1=4, b_2=1, b_3=3, b_4=1$

30) $a_1=2, a_2=1, a_3=2, a_4=6$
$b_0=1, b_1=3, b_2=1, b_3=3, b_4=1$

31) $a_1=2, a_2=1, a_3=3, a_4=6$
$b_0=1, b_1=3, b_2=3, b_3=2, b_4=1$

32) $a_1=2, a_2=1, a_3=4, a_4=4$
$b_0=1, b_1=3, b_2=2, b_3=2, b_4=1$

33) $a_1=2, a_2=1, a_3=5, a_4=2$
$b_0=1, b_1=3, b_2=2, b_3=1, b_4=1$

34) $a_1=2, a_2=1, a_3=6, a_4=b_4-2$
$b_0=1, b_1=3, b_2=2, b_3=1$

35) $a_1=2, a_2=2, a_3=1, a_4=6$
$b_0=1, b_1=2, b_2=3, b_3=2, b_4=1$

36) $a_1=2, a_2=2, a_3=2, a_4=4$
$b_0=1, b_1=2, b_2=2, b_3=2, b_4=1$

37) $a_1=2, a_2=2, a_3=3, a_4=2$
$b_0=1, b_1=2, b_2=2, b_3=1, b_4=1$

38) $a_1=2, a_2=2, a_3=4, a_4=b_4-2$
$b_0=1, b_1=2, b_2=2, b_3=1$

39) $a_1=2, a_2=3, a_3=1, a_4=2$
$b_0=1, b_1=2, b_2=1, b_3=1, b_4=1$

40) $a_1=2, a_2=3, a_3=2, a_4=b_4-2$
$b_0=1, b_1=2, b_2=1, b_3=1,$

41) $a_1=2, a_2=4, a_3=b_3-2, a_4=b_4$
$b_0=1, b_1=2, b_2=1,$

17) $a_1=1, a_2=3, a_3=3, a_4=6$
$b_0=2, b_1=3, b_2=3, b_3=2, b_4=1$

18) $a_1=1, a_2=3, a_3=4, a_4=4$
$b_0=2, b_1=3, b_2=2, b_3=2, b_4=1$

19) $a_1=1, a_2=3, a_3=5, a_4=2$
$b_0=2, b_1=3, b_2=2, b_3=1, b_4=1$

20) $a_1=1, a_2=3, a_3=6, a_4=b_4-2$
$b_0=2, b_1=3, b_2=2, b_3=1$

21) $a_1=1, a_2=4, a_3=1, a_4=6$
$b_0=2, b_1=2, b_2=3, b_3=2, b_4=1$

22) $a_1=1, a_2=4, a_3=2, a_4=4$
$b_0=2, b_1=2, b_2=2, b_3=2, b_4=1$

23) $a_1=1, a_2=4, a_3=3, a_4=2$
$b_0=2, b_1=2, b_2=2, b_3=1, b_4=1$

24) $a_1=1, a_2=4, a_3=4, a_4=b_4-2$
$b_0=2, b_1=2, b_2=2, b_3=1,$

25) $a_1=1, a_2=5, a_3=1, a_4=2$
$b_0=2, b_1=2, b_2=1, b_3=1, b_4=1$

42) $a_1=2, a_2=6, a_3=1, a_4=1$
$b_0=1, b_1=2, b_2=1, b_3=2, b_4=6$

43) $a_1=3, a_2=1, a_3=1, a_4=2$
$b_0=1, b_1=1, b_2=1, b_3=1, b_4=1$

44) $a_1=3, a_2=1, a_3=2, a_4=b_4-2$
$b_0=1, b_1=1, b_2=1, b_3=1, b_4 \geqq 1$

45) $a_1=3, a_2=2, a_3=b_3-2, a_4=b_4$
$b_0=1, b_1=1, b_2=1,$

46) $a_1=3, a_2=4, a_3=1, a_4=1$
$b_0=1, b_1=1, b_2=1, b_3=2, b_4=6$

47) $a_1=4, a_2=b_2-2, a_3=b_3, a_4=b_4$
$b_0=1, b_1=1$

48) $a_1=6, a_2=1, a_3=1, a_4=b_4+2$
$b_0=1, b_1=1, b_2=2, b_3=6, b_4 \geqq 1$

49) $a_1=5, a_2=1, a_3=2, a_4=1$
$b_0=1, b_1=1, b_2=2, b_3=1, b_4=6$

50) $a_1=6, a_2=1, a_3=1, a_4=1$
$b_0=1, b_1=1, b_2=2, b_3=5, b_4=2$

51) $a_1=6, a_2=1, a_3=2, a_4=1$
$b_0=1, b_1=1, b_2=2, b_3=4, b_4=4$

52) $a_1=6, a_2=2, a_3=2, a_4=1$
$b_0=1, b_1=1, b_2=2, b_3=3, b_4=6$

53) $a_1=8, a_2=3, a_3=2, a_4=1$
$b_0=1, b_1=1, b_2=2, b_3=2, b_4=10$

（「13. Level 5 の計算方法の一部」に計算方法を記載）

3つ子になる条件は Level 2 のときと同様に考えると

Level 5

偶奇偶の3つ子
↑ ↑ ↑
A a B

2) 1)
1) $A_0=1, A_1=1, A_2=1, A_3=2, A_4=10$
$a_1=1, a_2=1, a_3=1, a_4=12$
$B_0=4, B_1=2, B_2=4, B_3=2, B_4=1$

3) 3)
2) $A_0=1, A_1=1, A_2=2, A_3=1, A_4=6$
$a_1=1, a_2=1, a_3=3, a_4=6$
$B_0=3, B_1=1, B_2=1, B_3=1, B_4=3$

3) 4)
3) $A_0=1, A_1=1, A_2=2, A_3=2, A_4=6$
$a_1=1, a_2=1, a_3=4, a_4=6$
$B_0=3, B_1=1, B_2=2, B_3=3, B_4=1$

8) 12)
24) $A_0=1, A_1=4, A_2=1, A_3=2, A_4=1$
$a_1=1, a_2=2, a_3=4, a_4=4$
$B_0=2, B_1=1, B_2=3, B_3=2$ $B_4=1$

9) 13)
25) $A_0=1, A_1=4, A_2=1, A_3=1, A_4=1$
$a_1=1, a_2=2, a_3=5, a_4=2$
$B_0=2$ $B_1=1, B_2=3, B_3=1, B_4=1$

10) 14)
26) $A_0=1$ $A_1=4, A_2=1, A_3=1, A_4=B_4$
$a_1=1$ $a_2=2, a_3=6, a_4=B_4-2$
$B_0=2$ $B_1=1, B_2=3, B_3=1$ $B_4 \geqq 3$

3) 5)

4) $A_0 = 1, A_1 = 1, A_2 = 2, A_3 = 3, A_4 = 6$
$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 5, a_4 = 6$
$B_0 = 3, B_1 = 1, B_2 = 4, B_3 = 2, B_4 = 1$

3) 6)

5) $A_0 = 1, A_1 = 1, A_2 = 2, A_3 = 4, A_4 = 4$
$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 6, a_4 = 4$
$B_0 = 3, B_1 = 1, B_2 = 3, B_3 = 2, B_4 = 1$

3) 7)

6) $A_0 = 1, A_1 = 1, A_2 = 2, A_3 = 5, A_4 = 2$
$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 7, a_4 = 2$
$B_0 = 3, B_1 = 1, B_2 = 3, B_3 = 1, B_4 = 1$

3) 8)

7) $A_0 = 1, A_1 = 1, A_2 = 2, A_3 = 6, A_4 = B_4$
$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 8, a_4 = B_4 - 2$
$B_0 = 3, B_1 = 1, B_2 = 3, B_3 = 1, B_4 \geq 1$

5) 15)

8) $A_0 = 1, A_1 = 2, A_2 = 1, A_3 = 1, A_4 = 8$
$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 1, a_4 = 8$
$B_0 = 2, B_1 = 4, B_2 = 1, B_3 = 3, B_4 = 1$

5) 16)

9) $A_0 = 1, A_1 = 2, A_2 = 1, A_3 = 2, A_4 = 6$
$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 2, a_4 = 6$
$B_0 = 2, B_1 = 3, B_2 = 1, B_3 = 3, B_4 = 1$

5) 17)

10) $A_0 = 1, A_1 = 2, A_2 = 1, A_3 = 3, A_4 = 6$
$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 3, a_4 = 6$
$B_0 = 2, B_1 = 3, B_2 = 3, B_3 = 2, B_4 = 1$

5) 18)

11) $A_0 = 1, A_1 = 2, A_2 = 1, A_3 = 4, A_4 = 4$
$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 4$
$B_0 = 2, B_1 = 3, B_2 = 2, B_3 = 2, B_4 = 1$

5) 19)

12) $A_0 = 1, A_1 = 2, A_2 = 2, A_3 = 5, A_4 = 2$
$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 2$
$B_0 = 2, B_1 = 3, B_2 = 2, B_3 = 1, B_4 = 1$

5) 20)

13) $A_0 = 1, A_1 = 2, A_2 = 1, A_3 = 6, A_4 = B_4 - 2$
$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = B_4 - 2$
$B_0 = 2, B_1 = 3, B_2 = 2, B_3 = 1, B_4 \geqq 3$

12) 43)

27) $A_0 = 2, A_1 = 1, A_2 = 1, A_3 = 1, A_4 = 2$
$a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 2$
$B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 1, B_3 = 1, B_4 = 1$

(2) 45)

28) $A_0 = 2, A_1 = 1, A_2 = 2, A_3 = B_3 - 2, A_4 = B_4$
$a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = B_3 - 2, a_4 = B_4$
$B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 1, B_3 \geqq 3, B_4 \geqq 1$

12) 46)

29) $A_0 = 2, A_1 = 1, A_2 = 4, A_3 = 1, A_4 = 1$
$a_1 = 3, a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = 1$
$B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 1, B_3 = 2, B_4 = 6$

12) 47)

30) $A_0 = 2, A_1 = 2, A_2 = B_2 - 2, A_3 = B_3, A_4 = B_4$
$a_1 = 4, a_2 = B_2 - 2, a_3 = B_3, a_4 = B_4$
$B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 \geqq 3, B_3 \geqq 1, B_4 \geqq 1$

12) 48)

31) $A_0 = 2, A_1 = 3, A_2 = 1, A_3 = 2, A_4 = 1$
$a_1 = 5, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 1$
$B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 1, B_4 = 6$

12) 49)

32) $A_0 = 2, A_1 = 4, A_2 = 1, A_3 = 1, A_4 = 1$
$a_1 = 6, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1$
$B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5, B_4 = 2$

12) 50)

33) $A_0 = 2, A_1 = 4, A_2 = 1, A_3 = 2, A_4 = 1$
$a_1 = 6, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 1$
$B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 4, B_4 = 4$

12) 51)

34) $A_0 = 2, A_1 = 4, A_2 = 2, A_3 = 2, A_4 = 1$
$a_1 = 6, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = 1$
$B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 3, B_4 = 6$

12) 52)

35) $A_0 = 2, A_1 = 6, A_2 = 3, A_3 = 2, A_4 = 1$
$a_1 = 8, a_2 = 3, a_3 = 2, a_4 = 1$
$B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 2, B_4 = 10$

13) 29)

36) $A_0 = 3, A_1 = 2, A_2 = 1, A_3 = 3, A_4 = 1$
$a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 8$
$B_0 = 1, B_1 = 4, B_2 = 1, B_3 = 3, B_4 = 1$

5) 21)

14) $A_0 = 1, A_1 = 2, A_2 = 2, A_3 = 1, A_4 = 6$
$a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = 6$
$B_0 = 2, B_1 = 2, B_2 = 3, B_3 = 2, B_4 = 1$

5) 22)

15) $A_0 = 1, A_1 = 2, A_2 = 2, A_3 = 2, A_4 = 4$
$a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 2, a_4 = 4$
$B_0 = 2, B_1 = 2, B_2 = 2, B_3 = 2, B_4 = 1$

5) 23)

16) $A_0 = 1, A_1 = 2, A_2 = 2, A_3 = 3, A_4 = 2$
$a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 3, a_4 = 2$
$B_0 = 2, B_1 = 2, B_2 = 2, B_3 = 1, B_4 = 1$

5) 24)

17) $A_0 = 1, A_1 = 2, A_2 = 2, A_3 = 4, A_4 = B_4 - 2$
$a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 4, a_4 = B_4 - 2$
$B_0 = 2, B_1 = 2, B_2 = 2, B_3 = 1, B_4 \geqq 3$

5) 25)

18) $A_0 = 1, A_1 = 2, A_2 = 3, A_3 = 1, A_4 = 2$
$a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 1, a_4 = 2$
$B_0 = 2, B_1 = 2, B_2 = 1, B_3 = 1, B_4 = 1$

14) 30)

37) $A_0 = 3, A_1 = 1, A_2 = 1, A_3 = 3, A_4 = 1$
$a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 6$
$B_0 = 1, B_1 = 3, B_2 = 1, B_3 = 3, B_4 = 1$

15) 31)

38) $A_0 = 3, A_1 = 1, A_2 = 3, A_3 = 2, A_4 = 1$
$a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 3, a_4 = 6$
$B_0 = 1, B_1 = 3, B_2 = 3, B_3 = 2, B_4 = 1$

16) 32)

39) $A_0 = 3, A_1 = 1, A_2 = 2, A_3 = 2, A_4 = 1$
$a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 4, a_4 = 4$
$B_0 = 1, B_1 = 3, B_2 = 2, B_3 = 2, B_4 = 1$

17) 33)

40) $A_0 = 3, A_1 = 1, A_2 = 2, A_3 = 1, A_4 = 1$
$a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 5, a_4 = 2$
$B_0 = 1, B_1 = 3, B_2 = 2, B_3 = 1, B_4 = 1$

18) 34)

41) $A_0 = 3, A_1 = 1, A_2 = 2, A_3 = 1, A_4 = B_4$
$a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 6, a_4 = B_4 - 2$
$B_0 = 1, B_1 = 3, B_2 = 2, B_3 = 1, B_4 \geqq 3$

Level 5

奇偶奇 の 3つ子
↑ ↑ ↑
a B b

6) 15)

1) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 6, a_4 = 4$
$B_0 = 3, B_1 = 1, B_2 = 3, B_3 = 2, B_4 = 1$
$b_1 = 2, b_2 = 1, b_3 = 3, b_4 = 6$

9) 12)

2) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 6$
$B_0 = 2, B_1 = 1, B_2 = 1, B_3 = 1, B_4 = 3$
$b_1 = 3, b_2 = 1, b_3 = 1, b_4 = 3$

10) 12)

3) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = 6$
$B_0 = 2, B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 2, B_4 = 1$
$b_1 = 3, b_2 = 2, b_3 = 2, b_4 = 1$

11) 12)

4) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 6$
$B_0 = 2, B_1 = 1, B_2 = 4, B_3 = 2, B_4 = 1$
$b_1 = 3, b_2 = 4, b_3 = 2, b_4 = 1$

26) 12)

19) $a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 2, a_4 = B_4 - 2$
$B_0 = 2, B_1 = 2, B_2 = 1, B_3 = 1, B_4 \geqq 3$
$b_1 = 4, b_2 = 1, b_3 = 1, b_4 = B_4$

27) 12)

20) $a_1 = 1, a_2 = 6, a_3 = B_3 - 2, a_4 = B_4$
$B_0 = 2, B_1 = 2, B_2 = 1, B_3 \geqq 3, B_4 \geqq 1$
$b_1 = 4, b_2 = 1, b_3 = B_3, b_4 = B_4$

28) 12)

21) $a_1 = 1, a_2 = 8, a_3 = 1, a_4 = 1$
$B_0 = 2, B_1 = 2, B_2 = 1, B_3 = 2, B_4 = 6$
$b_1 = 4, b_2 = 1, b_3 = 2, b_4 = 6$

35) 5)

22) $a_1 = 2, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 6$
$B_0 = 1, B_1 = 2, B_2 = 3, B_3 = 2, B_4 = 1$
$b_1 = 1, b_2 = 5, b_3 = 2, b_4 = 1$

12) 12)

5) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 4$
$B_0 = 2, B_1 = 1, B_2 = 3, B_3 = 2, B_4 = 1$
$b_1 = 3, b_2 = 3, b_3 = 2, b_4 = 1$

13) 12)

6) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5, a_4 = 2$
$B_0 = 2, B_1 = 1, B_2 = 3, B_3 = 1, B_4 = 1$
$b_1 = 3, b_2 = 3, b_3 = 1, b_4 = 1$

14) 12)

7) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 6, a_4 = B_4 - 2$
$B_0 = 2, B_1 = 1, B_2 = 3, B_3 = 1, B_4 \geq 3$
$b_1 = 3, b_2 = 3, b_3 = 1, b_4 = B_4$

15) 12)

8) $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 1, a_4 = 8$
$B_0 = 2, B_1 = 4, B_2 = 1, B_3 = 3, B_4 = 1$
$b_1 = 6, b_2 = 1, b_3 = 3, b_4 = 1$

16) 12)

9) $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 2, a_4 = 6$
$B_0 = 2, B_1 = 3, B_2 = 1, B_3 = 3, B_4 = 1$
$b_1 = 5, b_2 = 1, b_3 = 3, b_4 = 1$

17) 12)

10) $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 3, a_4 = 6$
$B_0 = 2, B_1 = 3, B_2 = 3, B_3 = 2, B_4 = 1$
$b_1 = 5, b_2 = 3, b_3 = 2, b_4 = 1$

18) 12)

11) $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 4$
$B_0 = 2, B_1 = 3, B_2 = 2, B_3 = 2, B_4 = 1$
$b_1 = 5, b_2 = 2, b_3 = 2, b_4 = 1$

19) 12)

12) $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 2$
$B_0 = 2, B_1 = 3, B_2 = 2, B_3 = 1, B_4 = 1$
$b_1 = 5, b_2 = 2, b_3 = 1, b_4 = 1$

20) 12)

13) $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = B_4 - 2$
$B_0 = 2, B_1 = 3, B_2 = 2, B_3 = 1, B_4 \geq 3$
$b_1 = 5, b_2 = 2, b_3 = 1, b_4 = B_4$

21) 12)

14) $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = 6$
$B_0 = 2, B_1 = 2, B_2 = 3, B_3 = 2, B_4 = 1$
$b_1 = 4, b_2 = 3, b_3 = 2, b_4 = 1$

22) 12)

15) $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 2, a_4 = 4$
$B_0 = 2, B_1 = 2, B_2 = 2, B_3 = 2, B_4 = 1$
$b_1 = 4, b_2 = 2, b_3 = 2, b_4 = 1$

36) 5)

23) $a_1 = 2, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = 4$
$B_0 = 1, B_1 = 2, B_2 = 2, B_3 = 2, B_4 = 1$
$b_1 = 1, b_2 = 4, b_3 = 2, b_4 = 1$

37) 5)

24) $a_1 = 2, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 2$
$B_0 = 1, B_1 = 2, B_2 = 2, B_3 = 1, B_4 = 1$
$b_1 = 1, b_2 = 4, b_3 = 1, b_4 = 1$

38) 5)

25) $a_1 = 2, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = B_4 - 2$
$B_0 = 1, B_1 = 2, B_2 = 2, B_3 = 1, B_4 \geq 3$
$b_1 = 1, b_2 = 4, b_3 = 1, b_4 = B_4$

39) 5)

26) $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 1, a_4 = 2$
$B_0 = 1, B_1 = 2, B_2 = 1, B_3 = 1, B_4 = 1$
$b_1 = 1, b_2 = 3, b_3 = 1, b_4 = 1$

40) 5)

27) $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 2, a_4 = B_4 - 2$
$B_0 = 1, B_1 = 2, B_2 = 1, B_3 = 1, B_4 \geq 3$
$b_1 = 1, b_2 = 3, b_3 = 1, b_4 = B_4$

41) 5)

28) $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = B_3 - 2, a_4 = B_4$
$B_0 = 1, B_1 = 2, B_2 = 1, B_3 \geq 3, B_4 \geq 1$
$b_1 = 1, b_2 = 3, b_3 = B_3, b_4 = B_4$

42) 5)

29) $a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 1, a_4 = 1$
$B_0 = 1, B_1 = 2, B_2 = 1, B_3 = 2, B_4 = 6$
$b_1 = 1, b_2 = 3, b_3 = 2, b_4 = 6$

44) 1)

30) $a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3$
$B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 1, B_3 = 1, B_4 = 2$
$b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 1, b_4 = 1$

46) 2)

31) $a_1 = 3, a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = 1$
$B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 1, B_3 = 2, B_4 = 6$
$b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 1, b_4 = 8$

47) 4)

32) $a_1 = 4, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 1$
$B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 4, B_3 = 1, B_4 = 1$
$b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 2, b_4 = 6$

48) 3)

33) $a_1 = 5, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 1$
$B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 1, B_4 = 6$
$b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 3, b_4 = 6$

49) 3)

34) $a_1 = 5, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 1$
$B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 1, B_4 = 6$
$b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 3, b_4 = 1,$

23)12)

(16) $a_1=1,\ a_2=4,\ a_3=3,\ a_4=2$

$B_0=2,\ B_1=2,\ B_2=2,\ B_3=1,\ B_4=1$

$b_1=4,\ b_2=2,\ b_3=1,\ b_4=1$

24)12)

(17) $a_1=1,\ a_2=4,\ a_3=4,\ a_4=B_4-2$

$B_0=2,\ B_1=2,\ B_2=2,\ B_3=1,\ B_4\geqq 3$

$b_1=4,\ b_2=2,\ b_3=1,\ b_4=B_4$

25)12)

(18) $a_1=1,\ a_2=5,\ a_3=1,\ a_4=2$

$B_0=2,\ B_1=2,\ B_2=1,\ B_3=1,\ B_4=1$

$b_1=4,\ b_2=1,\ b_3=1,\ b_4=1$

$-5\quad a_3=2\quad a_4 -- \beta$

50)3)

35) $a_1=6,\ a_2=1,\ a_3=1,\ a_4=1$

$B_0=1,\ B_1=1,\ B_2=2,\ B_3=5,\ B_4=2$

$b_1=1,\ b_2=1,\ b_3=7,\ b_4=2$

51)3)

36) $a_1=6,\ a_2=1,\ a_3=2,\ a_4=1$

$B_0=1,\ B_1=1,\ B_2=2,\ B_3=4,\ B_4=4$

$b_1=1,\ b_2=1,\ b_3=6,\ b_4=4$

52)3)

37) $a_1=6,\ a_2=2,\ a_3=2,\ a_4=1$

$B_0=1,\ B_1=1,\ B_2=2,\ B_3=3,\ B_4=6$

$b_1=1,\ b_2=1,\ b_3=5,\ b_4=6$

53)3)

38) $a_1=8,\ a_2=3,\ a_3=2,\ a_4=1$

$B_0=1,\ B_1=1,\ B_2=2,\ B_3=2,\ B_4=10$

$b_1=1,\ b_2=1,\ b_3=4,\ b_4=10$

7 つ子になる条件は、

Level 5

偶奇偶奇偶奇偶の7つ子

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

$A\ \ a\ \ B\ \ b\ \ \mathcal{C}\ \ c\ \ D$

33), 5), 38)

1) $A_0=2,\ A_1=4,\ A_2=1,\ A_3=2,\ A_4=1$

$a_1=6,\ a_2=1,\ a_3=2,\ a_4=1$

$B_0=1,\ B_1=1,\ B_2=2,\ B_3=4,\ B_4=4$

$b_1=1,\ b_2=1,\ b_3=6,\ b_4=4$

$\mathcal{C}_0=3,\ \mathcal{C}_1=1,\ \mathcal{C}_2=3,\ \mathcal{C}_3=2,\ \mathcal{C}_4=1$

$c_1=2,\ c_2=1,\ c_3=3,\ c_4=6$

$D_0=1,\ D_1=3,\ D_2=3,\ D_3=2,\ D_4=1$

Level 5 の7つ子になる最小の値を求める.

$$d=\frac{1}{243}\left(2^{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}-2^{a_1+a_2+a_3+a_4}-3\cdot 2^{a_1+a_2+a_3}-9\cdot 2^{a_1+a_2}-27^{a_1}-81\right)$$

$a_1=6,\ a_2=1,\ a_3=2,\ a_4=1$ を代入すると

$$d=\frac{1}{243}\left(2^{10+a_5}-2^{10}-3\cdot 2^{9}-9\cdot 2^{7}-27\cdot 2^{6}-81\right)=\frac{1}{243}\left(2^{10+a_5}-5521\right)$$

$d\in\mathbb{N}$ より

$$2^{10+a_5}-5521\equiv 0 \mod 243$$

となればよい.

$$2^{10+a_5}\equiv 5521\equiv 175 \mod 243$$

$$10+a_5=162n+116\ (n\in\mathbb{N}_{\geq 0})$$

$n=1$ とすると.

$$2^{10+a_5} = 2^{116}$$

よって

$$d = \frac{1}{243}\left(2^{116} - 5521\right)$$

$$= 34187962854550305373040305048605$$

以上より

Level5の最小の7つ子は

$\underline{34187962854550305373040305048604 \sim}$

$\underline{34187962854550305373040305048610}$

11. Level 1 の計算方法

Level 1 の双子になる条件の求め方

Level 1の偶奇の双子

Level 1の奇数 d は

$$d = \frac{1}{3}\left(2^{a_1}-1\right) \quad (a_1 \in \mathbb{N}^{\times}) \text{ — ①}$$

偶数は

$$d-1 = \frac{2^{b_0}}{3}\left(2^{b_1}-1\right) \quad (b_0, b_1 \in \mathbb{N}^{\times}) \text{ — ②}$$

と表せる. $d-1, d$ が双子と仮定すると.

$$Col(d-1) = Col(d)$$

より.

$$a_1 + \underset{\text{奇の数}}{\underline{2}} = b_0 + b_1 + \underline{2}$$

$$a_1 = b_0 + b_1 \text{ —③}$$

となる。①,②,③より

$$\frac{1}{3}\left(2^{a_1}-1\right) = \frac{2^{b_0}}{3}\left(2^{b_1}-1\right)+1$$

$$2^{a_1}-1 = 2^{b_0+b_1} - 2^{b_0} + 3$$

$$-1 = -2^{b_0} + 3$$

$$2^{b_0} = 4$$

$$\underline{b_0 = 2}$$

Level 1の奇偶の双子

Level 1の奇数 d は

$$d = \frac{1}{3}\left(2^{a_1}-1\right) \quad (a_1 \in \mathbb{N}^{\times}) \text{ — ①}$$

偶数は

$$d+1 = \frac{2^{b_0}}{3}\left(2^{b_1}-1\right) \quad (b_0, b_1 \in \mathbb{N}^{\times}) \text{ — ②}$$

と表せる. $d+1, d$ が双子と仮定すると.

$$Col(d+1) = Col(d)$$

より.

$$a_1 + \underset{\text{奇の数}}{\underline{2}} = b_0 + b_1 + \underline{2}$$

$$a_1 = b_0 + b_1 \text{ —③}$$

となる。①,②,③より

$$\frac{1}{3}\left(2^{a_1}-1\right) = \frac{2^{b_0}}{3}\left(2^{b_1}-1\right)-1$$

$$2^{a_1}-1 = 2^{b_0+b_1} - 2^{b_0} - 3$$

$$-1 = -2^{b_0} - 3$$

$$2^{b_0} = -2$$

$b_0 \geq 1$ より $2^{b_0} \geq 2$ よって不適

12. Level 2 の計算方法

Level 2 の 4 つ子がいないことの証明

Level 2 の4つ子いない証明

d を Level 1 の奇数とすると、

$$d=\frac{1}{9}\left(2^{a_1+a_2}-2^{a_1}-3\right)\qquad (a_1, a_2 \in \mathbb{N}^{*})$$

と表せる。また、$d+2$ も Level 1 の奇数とすると、

$$d+2=\frac{1}{9}\left(2^{b_1+b_2}-2^{b_1}-3\right)\qquad (b_1, b_2 \in \mathbb{N}^{*})$$

と表せる。

このとき $Col(d)=Col(d+2)$ となる d が存在するか？

$Col(d)=Col(d+2)$ と仮定すると、

$$a_1+a_2+2=b_1+b_2+2$$

$$a_1+a_2=b_1+b_2 \quad -①$$

また、d, $d+2$ の式より、

$$\frac{1}{9}\left(2^{a_1+a_2}-2^{a_1}-3\right)+2=\frac{1}{9}\left(2^{b_1+b_2}-2^{b_1}-3\right)$$

$$2^{a_1+a_2}-2^{a_1}-3+18=2^{b_1+b_2}-2^{b_1}-3$$

① より

$$2^{a_1+a_2}-2^{a_1}-3+18=2^{a_1+a_2}-2^{b_1}-3$$

$$2^{a_1}-15=2^{b_1}+3$$

$$2^{a_1}-2^{b_1}=18$$

$$2^{a_1-1}-2^{b_1-1}=9 \quad -②$$

$a_1 \geq 1$, $b_1 \geq 1$ より

$a_1=1, b_1=1$ のとき $2^{a_1-1}=1$, $2^{b_1-1}=1$

$a_1 \geq 2, b_1 \geq 2$ 〃 $2^{a_1-1} \geq 2$, $2^{b_1-1} \geq 2$

② の右辺は奇数より、左辺が奇数になるには、

$a_1=1, b_1 \geq 2$ (I) or $a_1 \geq 2, b_1=1$ (II)

である。

(I) $a_1=1, b_1 \geq 2$

② に代入すると、

$$2^0-2^{b_1-1}=9$$

$$-2^{b_1-1}=8$$

$-2^{b_1-1} \leq -2$ より不適

(II) $a_1 \geq 2, b_1=1$

② に代入すると、

$$2^{a_1-1}-2^0=9$$

$$2^{a_1-1}=10=2\cdot 5$$

よって不適

よって矛盾、すなわち $Col(d)=Col(d+2)$ となる d は存在しない。

? 双子かも ?

d-1 d d+1 d+2 d+3

×

双子じゃない

よって4つ子は存在しない。

Level 2 の双子になる条件の求め方

Level12の偶奇の双子

Level12の奇数 d は

$$d=\frac{1}{9}\left(2^{a_1+a_2}-2^{a_1}-3\right)\quad (a_1,a_2\in\mathbb{N}^x) \text{ —①}$$

偶数は

$$d-1=\frac{2^{b_0}}{9}\left(2^{b_1+b_2}-2^{b_1}-3\right)\quad (b_0,b_1,b_2\in\mathbb{N}^x) \text{ —②}$$

と表せる. $d-1,d$ が双子と仮定すると.

$$Col(d-1)=Col(d)$$

より.

$$a_1+a_2+\underbrace{3}_{\text{奇の数}}=b_0+b_1+b_2+\underline{3}$$

$$a_1+a_2=b_0+b_1+b_2 \quad \text{—③}$$

となる。①,②,③より

$$\frac{1}{9}\left(2^{a_1+a_2}-2^{a_1}-3\right)=\frac{2^{b_0}}{9}\left(2^{b_1+b_2}-2^{b_1}-3\right)+1$$

$$2^{a_1+a_2}-2^{a_1}-3=2^{b_0+b_1+b_2}-2^{b_0+b_1}-3\cdot 2^{b_0}+9$$

$a_1=1$

$b_0=1,\ b_1=2$

$$2^{b_0+b_1}+3\cdot 2^{b_0}-2^{a_1}=12$$

$\div 2$

$$2^{b_0+b_1-1}\underbrace{+3\cdot 2^{b_0-1}}_{ぐ}\underbrace{-2^{a_1-1}}_{ぐ}=\underbrace{6}_{ぐ}\quad \text{—☆}$$

or

き　き

$b_0+b_1-1\geq 1$ より. $2^{b_0+b_1-1}$ は偶数 であり $b_0-1\geq 0$, $a_1-1\geq 0$ より.

$b_0=1$, $a_1=1$ のとき $2^{b_0-1}=1$, $2^{a_1-1}=1$ で奇数

$b_0\geq 2$, $a_1\geq 2$ のとき 2^{b_0-1}, 2^{a_1-1} は偶数

右辺は偶より

「2^{a_1-1} が奇数かつ 2^{b_0-1} も奇数」or「2^{a_1-1} が偶数かつ 2^{b_0-1} も偶数」

のどちらか. つまり、

$\underbrace{「a_1=1 \text{ かつ } b_0=1」}_{i)}$ or $\underbrace{「a_1\geq 2 \text{ かつ } b_0\geq 2」}_{ii)}$

i) $a_1=1$, $b_0=1$ のとき

☆は

$$2^{b_1}+3\cdot 2^0-2^0=6$$

$$2^{b_1}=4$$

$$b_1=2$$

ii) $a_1\geq 2, b_0\geq 2$

☆は

$$2^{b_0+b_1-1}+3\cdot 2^{b_0-1}-2^{a_1-1}=6$$

$\div 2$

$$2^{b_0+b_1-2}\underbrace{+3\cdot 2^{b_0-2}}_{ぐ}\underbrace{-2^{a_1-2}}_{き}=\underbrace{3}_{き}\quad \text{—☆1}$$

き　or　ぐ

$b_0 \geq 2$, $b_1 \geq 1$, $a_1 \geq 2$ より

$2^{b_0+b_1-2} \geq 2$ であり.

$b_0 = 2$, $a_1 = 2$ のとき $2^{b_0-2} = 1$, $2^{a_1-2} = 1$

$b_0 \geq 3$, $a_1 \geq 3$ のとき $2^{b_0-2} \geq 2$, $2^{a_1-2} \geq 2$

となる. 1の右辺は奇より

$a_1 = 2$, $b_0 \geq 3$ ① or $a_1 \geq 3$, $b_0 = 2$ ②

① $a_1 = 2$, $b_0 \geq 3$ のとき

$$2^{b_0+b_1-2} + 3 \cdot 2^{b_0-2} - 1 = 3$$

$$2^{b_0+b_1-2} + 3 \cdot 2^{b_0-2} = 4$$

$$2^{b_0+b_1-2} \geq 4,\ 3 \cdot 2^{b_0-2} \geq 6$$

よって

$$2^{b_0+b_1-2} + 3 \cdot 2^{b_0-2} \geq 10 \neq 4$$

よって不適.

② $a_1 \geq 3$, $b_0 = 2$ のとき.

$$2^{b_1} - 2^{a_1-2} = 0$$

$$2^{b_1} = 2^{a_1-2}$$

よって

$$b_1 = a_1 - 2 \quad (a_1 \geq 3)$$

$$a_1 = b_1 + 2$$

$$b_0 = 2,\ b_1 \geq 1$$

Level12の奇偶の双子

Level12の奇数 d は

$$d = \frac{1}{9}\left(2^{a_1+a_2} - 2^{a_1} - 3\right) \quad (a_1, a_2 \geq 1) \ -①$$

偶数は

$$d+1 = \frac{2^{b_0}}{9}\left(2^{b_1+b_2} - 2^{b_1} - 3\right) \quad (b_0, b_1, b_2 \geq 1) \ -②$$

と表せる. d, $d+1$ が双子と仮定すると.

$$Col(d) = Col(d+1)$$

より.

$$a_1 + a_2 + \underbrace{3}_{\text{奇の数}} = b_0 + b_1 + b_2 + \underline{3}$$

$$a_1+a_2=b_0+b_1+b_2 \quad -③$$

となる。①,②,③より

$$\frac{1}{9}\left(2^{a_1+a_2}-2^{a_1}-3\right)=\frac{2^{b_0}}{9}\left(2^{b_1+b_2}-2^{b_1}-3\right)-1$$

$$2^{a_1+a_2}-2^{a_1}-3=2^{b_0+b_1+b_2}-2^{b_0+b_1}-3\cdot 2^{b_0}-9$$

$$2^{a_1}+3=2^{b_0+b_1}+3\cdot 2^{b_0}+9$$

$$2^{a_1}-2^{b_0+b_1}-3\cdot 2^{b_0}=6$$

$\div 2$

$$2^{a_1-1}-2^{b_0+b_1-1}-3\cdot 2^{b_0-1}=3 \quad -☆$$

$b_0+b_1-1\geq 1$ より, $2^{b_0+b_1-1}$ は偶数 であり $b_0-1\geq 0$, $a_1-1\geq 0$ より.

$b_0=1$, $a_1=1$ のとき $2^{b_0-1}=1$, $2^{a_1-1}=1$ で奇数

$b_0\geq 2$, $a_1\geq 2$ のとき 2^{b_0-1}, 2^{a_1-1} は偶数

右辺は奇より.

「2^{a_1-1} が奇数かつ 2^{b_0-1} が偶数」 or 「2^{a_1-1} が偶数 かつ 2^{b_0-1} が奇数」

のどちらか, つまり,

$\underbrace{「a_1=1 \text{ かつ } b_0\geq 2」}_{i)}$ or $\underbrace{「a_1\geq 2 \text{ かつ } b_0=1」}_{ii)}$

i) $a_1=1$, $b_0\geq 2$ のとき

☆は

$$-2^{b_0+b_1-1}-3\cdot 2^{b_0-1}=2$$

$$-2^{b_0+b_1-1}-3\cdot 2^{b_0-1}<0$$

よって 不適

ii) $a_1\geq 2$, $b_0=1$ のとき

☆は

$$2^{a_1-1}-2^{b_1}=6$$

$a_1=4$

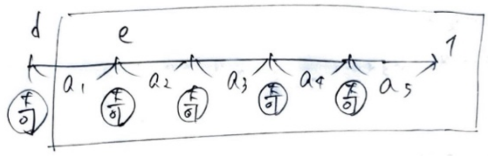
$b_0=1$, $b_1=1$

13. Level 5 の計算の一部

Level 5 の 10 つ子がいないことの証明の一部を紹介する。

〈Level 5の10つ子の存在について〉

Level 5の奇数の形は



eはLevel 4の奇数なので、

$$e = \frac{1}{81}\left(2^{a_2+a_3+a_4+a_5} - 2^{a_2+a_3+a_4} - 3\cdot 2^{a_2+a_3} - 9\cdot 2^{a_2} - 27\right)$$

$$d \longrightarrow 3d+1 \underbrace{\longrightarrow \cdots \longrightarrow}_{a_1\text{回 偶}} e = \frac{3d+1}{2^{a_1}}$$

$$\therefore\ d = \frac{2^{a_1}e - 1}{3}$$

e代入

$$d = \frac{1}{3}\left\{2^{a_1}\cdot\frac{1}{81}\left(2^{a_2+a_3+a_4+a_5} - 2^{a_2+a_3+a_4} - 3\cdot 2^{a_2+a_3} - 9\cdot 2^{a_2} - 27\right) - 1\right\}$$

$\frac{1}{81}$出す $= \frac{1}{243}\left\{2^{a_1}\left(2^{a_2+a_3+a_4+a_5} - 2^{a_2+a_3+a_4} - 3\cdot 2^{a_2+a_3} - 9\cdot 2^{a_2} - 27\right) - 81\right\}$

$$= \frac{1}{243}\left(2^{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5} - 2^{a_1+a_2+a_3+a_4} - 3\cdot 2^{a_1+a_2+a_3} - 9\cdot 2^{a_1+a_2} - 27\cdot 2^{a_1} - 81\right)$$

となる。

$\mathrm{Col}(d) = \mathrm{Col}(d+8)$

となれば、10?子が存在する。

$$d = \frac{1}{243}\left(2^{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5} - 2^{a_1+a_2+a_3+a_4} - 3\cdot 2^{a_1+a_2+a_3} - 9\cdot 2^{a_1+a_2} - 27\cdot 2^{a_1} - 81\right) \quad — ⊛$$

$$d+8 = \frac{1}{81}\left(2^{b_1+b_2+b_3+b_4+b_5} - 2^{b_1+b_2+b_3+b_4} - 3\cdot 2^{b_1+b_2+b_3} - 9\cdot 2^{b_1+b_2} - 27\cdot 2^{b_1} - 81\right) \quad — ⊞$$

である。

$\mathrm{Col}(d) = \mathrm{Col}(d+8)$ が成り立つとすると、

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+5 = b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+5$$

つまり $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = b_1+b_2+b_3+b_4+b_5$ — ①

であるので、

dの表し方より、 ⊛ $+\ 8 =$ ⊞

$$\therefore \frac{1}{243}\left(2^{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5} - 2^{a_1+a_2+a_3+a_4} - 3\cdot 2^{a_1+a_2+a_3} - 9\cdot 2^{a_1+a_2} - 27\cdot 2^{a_1} - 81\right) + 8$$

$$= \frac{1}{243}\left(2^{b_1+b_2+b_3+b_4+b_5} - 2^{b_1+b_2+b_3+b_4} - 3\cdot 2^{b_1+b_2+b_3} - 9\cdot 2^{b_1+b_2} - 27\cdot 2^{b_1} - 81\right)$$

$$\times 243 \Longrightarrow \cancel{2^{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}} - 2^{a_1+a_2+a_3+a_4} - 3\cdot 2^{a_1+a_2+a_3}$$

$$- 9\cdot 2^{a_1+a_2} - 27\cdot 2^{a_1} \cancel{- 81} + 1944$$

$$= \cancel{2^{b_1+b_2+b_3+b_4+b_5}} - 2^{b_1+b_2+b_3+b_4} - 3\cdot 2^{b_1+b_2+b_3}$$

$$- 9\cdot 2^{b_1+b_2} - 27\cdot 2^{b_1} \cancel{- 81}$$

①より

$$\Longrightarrow 2^{a_1+a_2+a_3+a_4} - 2^{b_1+b_2+b_3+b_4} + 3\cdot 2^{a_1+a_2+a_3} - 3\cdot 2^{b_1+b_2+b_3}$$

$$+ 9\cdot 2^{a_1+a_2} - 9\cdot 2^{b_1+b_2} + 27\cdot 2^{a_1} - 27\cdot 2^{b_1} = 1944$$

$$\xRightarrow{\div 2} \underbrace{2^{a_1+a_2+a_3+a_4-1}}_{\text{偶}} - \underbrace{2^{b_1+b_2+b_3+b_4-1}}_{\text{偶}} + \underbrace{3\cdot 2^{a_1+a_2+a_3-1}}_{\text{偶}} - \underbrace{3\cdot 2^{b_1+b_2+b_3-1}}_{\text{偶}}$$

$$+ \underbrace{9\cdot 2^{a_1+a_2-1}}_{\text{偶}} - \underbrace{9\cdot 2^{b_1+b_2-1}}_{\text{偶}} + \underbrace{27\cdot 2^{a_1-1}}_{\text{きぐ}} - \underbrace{27\cdot 2^{b_1-1}}_{\text{きぐ}} = \underbrace{972}_{\text{偶!}} \quad \text{—☆}$$

[1] $27\cdot 2^{a_1-1}$ が奇 かつ $27\cdot 2^{b_1-1}$ が奇

すなわち $a_1 = 1$ かつ $b_1 = 1$ のとき

[2] $27\cdot 2^{a_1-1}$ が偶 かつ $27\cdot 2^{b_1-1}$ が偶

すなわち $a_1 \geq 2$ かつ $b_1 \geq 2$ のとき

[1] のとき

$$☆ \Longrightarrow 2^{1+a_2+a_3+a_4-1} - 2^{1+b_2+b_3+b_4-1} + 3\cdot 2^{1+a_2+a_3-1} - 3\cdot 2^{1+b_2+b_3-1}$$

$$+ 9\cdot 2^{1+a_2-1} - 9\cdot 2^{1+b_2-1} + 27\cdot 2^{1-1} - 27\cdot 2^{1-1} = 972$$

$$\Longrightarrow 2^{a_2+a_3+a_4} - 2^{b_2+b_3+b_4} + 3\cdot 2^{a_2+a_3} - 3\cdot 2^{b_2+b_3}$$

$$+ 9\cdot 2^{a_2} - 9\cdot 2^{b_2} = 972$$

$$\overset{\div 2}{\Longrightarrow}\ \underbrace{2^{a_2+a_3+a_4-1}}_{偶} - \underbrace{2^{b_2+b_3+b_4-1}}_{偶} + \underbrace{3\cdot 2^{a_2+a_3-1}}_{偶} - \underbrace{3\cdot 2^{b_2+b_3-1}}_{偶}$$

$$+\underbrace{9\cdot 2^{a_2-1}}_{\substack{き\\ぐ}} - \underbrace{9\cdot 2^{b_2-1}}_{\substack{き\\ぐ}} = 486 \quad —\ ♡$$

偶!

(i) $9\cdot 2^{a_2-1}$ が奇 かつ $9\cdot 2^{b_2-1}$ が奇

すなわち $a_2=1$ かつ $b_2=1$ のとき

(ii) $9\cdot 2^{a_2-1}$ が偶 かつ $9\cdot 2^{b_2-1}$ が偶

すなわち $a_2\geqq 2$ かつ $b_2\geqq 2$ のとき

(i) のとき

$$♡ \Longrightarrow 2^{1+a_3+a_4-1} - 2^{1+b_3+b_4-1} + 3\cdot 2^{1+a_3-1} - 3\cdot 2^{1+b_3-1}$$

$$+9\cdot 2^{1-1} - 9\cdot 2^{1-1} = 486$$

$$\Longrightarrow 2^{a_3+a_4} - 2^{b_3+b_4} + 3\cdot 2^{a_3} - 3\cdot 2^{b_3} = 486$$

キスウ!

$$\overset{\div 2}{\Longrightarrow}\ \underbrace{2^{a_3+a_4-1}}_{偶} - \underbrace{2^{b_3+b_4-1}}_{偶} + \underbrace{3\cdot 2^{a_3-1}}_{\substack{き\\ぐ}} - \underbrace{3\cdot 2^{b_3-1}}_{\substack{ぐ\\き}} = 243 \quad —\ ◇$$

(ア) $3\cdot 2^{a_3-1}$ が奇 かつ $3\cdot 2^{b_3-1}$ が偶

すなわち $a_3=1$ かつ $b_3\geqq 2$ のとき

(イ) $3\cdot 2^{a_3-1}$ が偶 かつ $3\cdot 2^{b_3-1}$ が奇

すなわち $a_3\geqq 2$ かつ $b_3=1$ のとき

(う) のとき

◇ $\Rightarrow 2^{1+a_4-1} - 2^{b_3+b_4-1} + 3\cdot 2^{1-1} - 3\cdot 2^{b_3-1} = 243$

$\Rightarrow 2^{a_4} - 2^{b_3+b_4-1} - 3\cdot 2^{b_3-1} = 240$

$\overset{\div 2}{\Rightarrow} \underbrace{2^{a_4-1}}_{\text{き ぐ}} - \underbrace{2^{b_3+b_4-2}}_{\text{偶}} - \underbrace{3\cdot 2^{b_3-2}}_{\text{き ぐ}} = 120$ —— ロ

(あ) 2^{a_4-1} が奇 かつ $3\cdot 2^{b_3-2}$ が奇

すなわち $a_4 = 1$ かつ $b_3 = 2$ のとき

(い) 2^{a_4-1} が偶 かつ $3\cdot 2^{b_3-2}$ が偶

すなわち $a_4 \geqq 2$ かつ $b_3 \geqq 3$ のとき

(あ) のとき

ロ $\Rightarrow 2^{1-1} - 2^{2+b_4-2} - 3\cdot 2^{2-2} = 120$

$-2^{b_4} = 122$ 解なし

Level 5の奇偶の双子になる条件(1)の求め方

Level 5 

$$d=\frac{1}{243}\left(2^{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}-2^{a_1+a_2+a_3+a_4}-3\cdot 2^{a_1+a_2+a_3}-9\cdot 2^{a_1+a_2}-27\cdot 2^{a_1}-81\right)$$

奇偶の双子の条件.

$d+1$ (偶数) を

$$d+1=\frac{2^{b_0}}{243}\left(2^{b_1+b_2+b_3+b_4+b_5}-2^{b_1+b_2+b_3+b_4}-3\cdot 2^{b_1+b_2+b_3}-9\cdot 2^{b_1+b_2}-27\cdot 2^{b_1}-81\right)$$

と表すと.

$$\frac{1}{243}\left(2^{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}-2^{a_1+a_2+a_3+a_4}-3\cdot 2^{a_1+a_2+a_3}-9\cdot 2^{a_1+a_2}-27\cdot 2^{a_1}-81\right)+1$$

$$=\frac{2^{b_0}}{243}\left(2^{b_1+b_2+b_3+b_4+b_5}-2^{b_1+b_2+b_3+b_4}-3\cdot 2^{b_1+b_2+b_3}-9\cdot 2^{b_1+b_2}-27\cdot 2^{b_1}-81\right) - ★1$$

となる。ここで $Col(d)=Col(d+1)$ つまり. d と $d+1$ は双子と仮定すると.

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\underline{5}=b_0+b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+\underline{5}$$

奇数の回数

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=b_0+b_1+b_2+b_3+b_4+b_5 - ★2$$

となる。

★1 より

$$\cancel{2^{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}}-2^{a_1+a_2+a_3+a_4}-3\cdot 2^{a_1+a_2+a_3}-9\cdot 2^{a_1+a_2}-27\cdot 2^{a_1}-81+243$$

$$=\cancel{2^{b_0+b_1+b_2+b_3+b_4+b_5}}-2^{b_0+b_1+b_2+b_3+b_4}-3\cdot 2^{b_0+b_1+b_2+b_3}-9\cdot 2^{b_0+b_1+b_2}-27\cdot 2^{b_0+b_1}-81\cdot 2^{b_0}$$

★2 より

$$2^{a_1+a_2+a_3+a_4}+3\cdot 2^{a_1+a_2+a_3}+9\cdot 2^{a_1+a_2}+27\cdot 2^{a_1}-2^{b_0+b_1+b_2+b_3+b_4}-3\cdot 2^{b_0+b_1+b_2+b_3}-9\cdot 2^{b_0+b_1+b_2}$$
$$-27\cdot 2^{b_0+b_1}-81\cdot 2^{b_0}=162$$

÷2

となる.

$$2^{a_1+a_2+a_3+a_4-1}+3\cdot 2^{a_1+a_2+a_3-1}+9\cdot 2^{a_1+a_2-1}+27\cdot 2^{a_1-1}-2^{b_0+b_1+b_2+b_3+b_4-1}-3\cdot 2^{b_0+b_1+b_2+b_3-1}-9\cdot 2^{b_0+b_1+b_2-1}$$
$$-27\cdot 2^{b_0+b_1-1}-81\cdot 2^{b_0-1}=81 - ★3$$

$a_1 \geq 1,\ b_0 \geq 1$ より.

$a_1 = 1,\ b_0 = 1$ のとき $27 \cdot 2^{a_1 - 1} = 27$ (奇) , $81 \cdot 2^{b_0 - 1} = 81$ (奇)

$a_1 \geq 2,\ b_0 \geq 2$ 　 $27 \cdot 2^{a_1 - 1} \geq 54$ (偶) , $81 \cdot 2^{b_0 - 1} \geq 162$ (偶)

また, $a_2, a_3, a_4,\ b_1, b_2, b_3, b_4 \geq 1$ より $27 \cdot 2^{a_1 - 1}$, $81 \cdot 2^{b_0 - 1}$ 以外の左辺の項は偶数である.

(右辺) $= 81$ は奇数より,

$\underline{\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ b_0 \geq 2 \end{array}}$ [1] or $\underline{\begin{array}{l} a_1 \geq 2 \\ b_0 = 1 \end{array}}$ [2]

[1] $a_1 = 1,\ b_0 \geq 2$ のとき ⑬ に代入

$$2^{a_2+a_3+a_4} + 3 \cdot 2^{a_2+a_3} + 9 \cdot 2^{a_2} - 2^{b_0+b_1+b_2+b_3+b_4-1} - 3 \cdot 2^{b_0+b_1+b_2+b_3-1} - 9 \cdot 2^{b_0+b_1+b_2-1} - 27 \cdot 2^{b_0+b_1-1} - 81 \cdot 2^{b_0-1} = \underline{\overset{54}{\overset{\shortparallel}{81 - 27}}}$$

$\div 2$

$$2^{a_2+a_3+a_4-1} + 3 \cdot 2^{a_2+a_3-1} + 9 \cdot 2^{a_2-1} - 2^{b_0+b_1+b_2+b_3+b_4-2} - 3 \cdot 2^{b_0+b_1+b_2+b_3-2} - 9 \cdot 2^{b_0+b_1+b_2-2} - 27 \cdot 2^{b_0+b_1-2} - 81 \cdot 2^{b_0-2} = 27$$

先ほどと同様に考えると.

$\underline{\begin{array}{l} a_2 = 1 \\ b_0 \geq 3 \end{array}}$ [1] or $\underline{\begin{array}{l} a_2 \geq 2 \\ b_0 = 2 \end{array}}$ [2]

[1] $a_2 = 1$ or $b_0 \geq 3$ のとき

$$2^{a_3+a_4} + 3 \cdot 2^{a_3} - 2^{b_0+b_1+b_2+b_3+b_4-2} - 3 \cdot 2^{b_0+b_1+b_2+b_3-2} - 9 \cdot 2^{b_0+b_1+b_2-2} - 27 \cdot 2^{b_0+b_1-2} - 81 \cdot 2^{b_0-2} = 18$$

$$2^{a_3+a_4-1} + 3 \cdot 2^{a_3-1} - 2^{b_0+b_1+b_2+b_3+b_4-3} - 3 \cdot 2^{b_0+b_1+b_2+b_3-3} - 9 \cdot 2^{b_0+b_1+b_2-3} - 27 \cdot 2^{b_0+b_1-3} - 81 \cdot 2^{b_0-3} = 9$$

$\underline{\begin{array}{l} a_3 = 1 \\ b_0 \geq 4 \end{array}}$ ① or $\underline{\begin{array}{l} a_3 \geq 2 \\ b_0 = 3 \end{array}}$ ②

① $a_3 = 1,\ b_0 \geq 4$ のとき

$$2^{a_4} - 2^{b_0+b_1+b_2+b_3+b_4-3} - 3 \cdot 2^{b_0+b_1+b_2+b_3-3} - 9 \cdot 2^{b_0+b_1+b_2-3} - 27 \cdot 2^{b_0+b_1-3} - 81 \cdot 2^{b_0-3} = 6$$

$$2^{a_4-1} - 2^{b_0+b_1+b_2+b_3+b_4-4} - 3 \cdot 2^{b_0+b_1+b_2+b_3-4} - 9 \cdot 2^{b_0+b_1+b_2-4} - 27 \cdot 2^{b_0+b_1-4} - 81 \cdot 2^{b_0-4} = 3$$

$\underline{\begin{array}{l} a_4 = 1 \\ b_0 \geq 5 \end{array}}$ ① or $\underline{\begin{array}{l} a_4 \geq 2 \\ b_0 = 4 \end{array}}$ ②

① $a_4 = 1,\ b_0 \geq 5$ のとき

$$\underbrace{-2^{b_0+b_1+b_2+b_3+b_4-4} - 3 \cdot 2^{b_0+b_1+b_2+b_3-4} - 9 \cdot 2^{b_0+b_1+b_2-4} - 27 \cdot 2^{b_0+b_1-4} - 81 \cdot 2^{b_0-4}}_{< 0} = 2$$

よって (左辺) < 0 であり (左辺) $\neq 2$ で不適.

② $a_4 \geq 2,\ b_0 = 4$ のとき

$$2^{a_4-1} - 2^{b_1+b_2+b_3+b_4} - 3 \cdot 2^{b_1+b_2+b_3} - 9 \cdot 2^{b_1+b_2} - 27 \cdot 2^{b_1} = 84$$

$$2^{a_4-2} \underbrace{- 2^{b_1+b_2+b_3+b_4-1} - 3 \cdot 2^{b_1+b_2+b_3-1} - 9 \cdot 2^{b_1+b_2-1}}_{偶} - 27 \cdot 2^{b_1-1} = 42$$

$a_4 \geq 2,\ b_1 \geq 1$ より.

$a_4 = 2, b_1 = 1$ のとき $2^{a_4-1} = 1$ (奇) , $27 \cdot 2^{b_1-1} = 27$ (奇)

$a_4 \geq 3,\ b_0 \geq 2$ のとき $2^{a_4-1} \geq 2$ (偶) , $27 \cdot 2^{b_1-1} \geq 54$ (偶)

(右辺) = 42 は偶数より.

$a_4 = 2,\ b_1 = 1$ ① or $a_4 \geq 3,\ b_1 \geq 2$ ②

① $a_4 = 2,\ b_1 = 1$ のとき.

$$\underbrace{-2^{b_2+b_3+b_4} - 3\cdot 2^{b_2+b_3} - 9\cdot 2^{b_2}}_{\substack{\wedge\\0}} = 68$$

よって不適

② $a_4 \geq 3,\ b_1 \geq 2$ のとき

$$2^{a_4-2} - 2^{b_1+b_2+b_3+b_4-1} - 3\cdot 2^{b_1+b_2+b_3-1} - 9\cdot 2^{b_1+b_2-1} - 27\cdot 2^{b_1-1} = 42$$

$\div 2$

$$2^{a_4-3} - 2^{b_1+b_2+b_3+b_4-2} - 3\cdot 2^{b_1+b_2+b_3-2} - 9\cdot 2^{b_1+b_2-2} - 27\cdot 2^{b_1-2} = 21$$

$a_4 = 3,\ b_1 \geq 3$ $\boxed{1}$ or $a_4 \geq 4,\ b_1 = 2$ $\boxed{2}$

$\boxed{1}$ $a_4 = 3,\ b_1 \geq 3$

$$\underbrace{-2^{b_1+b_2+b_3+b_4-2} - 3\cdot 2^{b_1+b_2+b_3-2} - 9\cdot 2^{b_1+b_2-2} - 27\cdot 2^{b_1-2}}_{\substack{\wedge\\0}} = 20$$

よって (左辺) ≠ 20 より不適

$\boxed{2}$ $a_4 \geq 4,\ b_1 = 2$ のとき

$$2^{a_4-3} - 2^{b_2+b_3+b_4} - 3\cdot 2^{b_2+b_3} - 9\cdot 2^{b_2} = 48$$

$$2^{a_4-7} - 2^{b_2+b_3+b_4-4} - 3\cdot 2^{b_2+b_3-4} - 9\cdot 2^{b_2-4} = 3$$

$a_4 = 7,\ b_2 \geq 5$ (i) $a_4 \geq 8,\ b_2 = 4$ (ii)

(i) $a_4 = 7,\ b_2 \geq 5$ のとき

$$\underbrace{-2^{b_2+b_3+b_4-4} - 3\cdot 2^{b_2+b_3-4} - 9\cdot 2^{b_2-4}}_{\substack{\wedge\\0}} = 2$$

よって不適

(ii) $a_4 \geq 8,\ b_2 = 4$ のとき

$$2^{a_4-7} - 2^{b_3+b_4} - 3\cdot 2^{b_3} = 12$$

$$2^{a_4-9} - 2^{b_3+b_4-2} - 3\cdot 2^{b_3-2} = 3$$

$a_4 = 9,\ b_3 \geq 3$ △1 or $a_4 \geq 10,\ b_3 = 2$ △2

△1 $a_4 = 9,\ b_3 \geq 3$ のとき

$$\underbrace{-2^{b_3+b_4-2} - 3\cdot 2^{b_3-2}}_{\substack{\wedge\\0}} = 2$$

よって不適

△2 $a_4 \geq 10,\ b_3 = 2$ のとき

$$2^{a_4-9} - 2^{b_4} = 6$$

よって $a_4 = 12,\ b_4 = 1$

以上から

1) $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1,\ a_4 = 12$

$b_0 = 4,\ b_1 = 2,\ b_2 = 4,\ b_3 = 2,\ b_4 = 1$

は奇偶の双子になる条件の1つである.

14. まとめ・考察

Level 1 と Level 2 の結果から「Level nに対し、2 nつ子はいない」という予想を立て計算したが、実際に Level 3 から Level 5 では 2 nつ子がいないという結果を得ることができた。しかし、最大何つ子までいるか調べてみると Level 4 で 6 つ子、Level 5 では 7 つ子までと $2n$つ子より大分小さい値になっていることがわかった。このことから「Level nに対する最大何つ子がいるか？」という問題には規則がないもしくは、単純な規則ではないということが考えられる。

また、双子は Level が上がるにつれて大幅に増えている一方で、s つ子の s の値はあまり大きく変化しないことから、s つ子になる条件は双子の条件と比較して非常に厳しいと考えられる。

Level 5 では「16.Level ごとの分岐表(付録)」に書いたように分岐がとても多く計算量が膨大になった。Level 6 では 8 つ子までいるのかさらに大きいsつ子がいるのか気になるが、Level 6 ではさらに分岐が増えると考えられ、手計算で求めるは難しい。そのため、今後はプログラミングを用いて探す方法を考えたい。

コラッツの双子になる条件から 3 つ子になる条件を作る際、b_0, b_1, b_2, a_1, a_2 …の値が一つの値に決まらないもの(Level 2 の$b_0 = 2$, $b_1 \geq 1$, $a_1 = b_1 + 2$ のようなもの)の方が 3 つ子になりやすいことがわかった。そのため、b_0, b_1, b_2, a_1, a_2 …の値が 1 つに決まらないものにどのような特徴があるか今後調べてみたい。

今回の研究で Level 1 から Level 5 まで調べたが、この限られた状況でもわからないこと、気になることが多く出てきてしまった。コラッツ予想はシンプルだがわからない、未知の部分が多く改めて面白いと感じた。

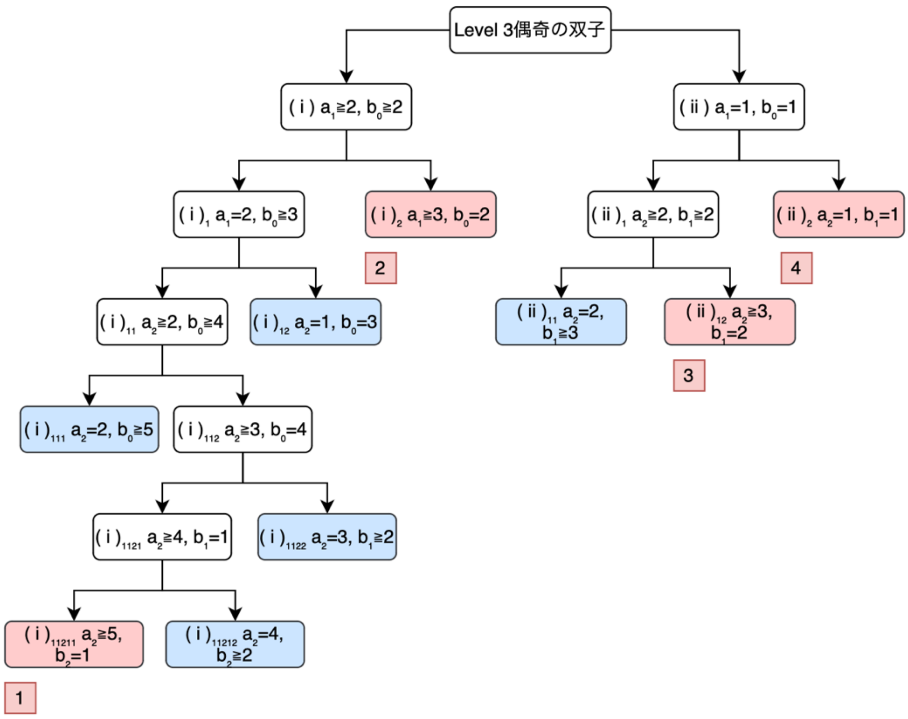
15. 参考文献

コラッツ列のいくつかの性質について 石動高校 片山 喜美
http://ja9nfo.web.fc2.com/math/20191108Collatz.pdf
コラッツ予想に関する双子の系列について
https://ed.ehime-u.ac.jp/CRESE/wp-content/uploads/2022/03/No.5.pdf

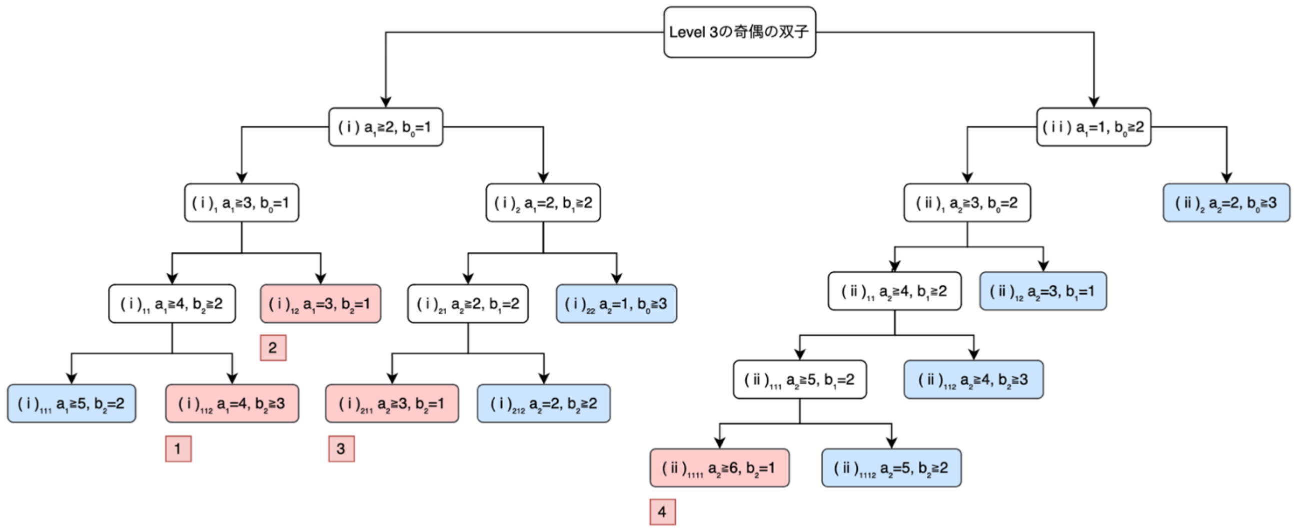
16. Level ごとの分岐表（付録）

ピンク色で囲われているものは答えが出てきたもので、水色で囲われたものは矛盾したものである。

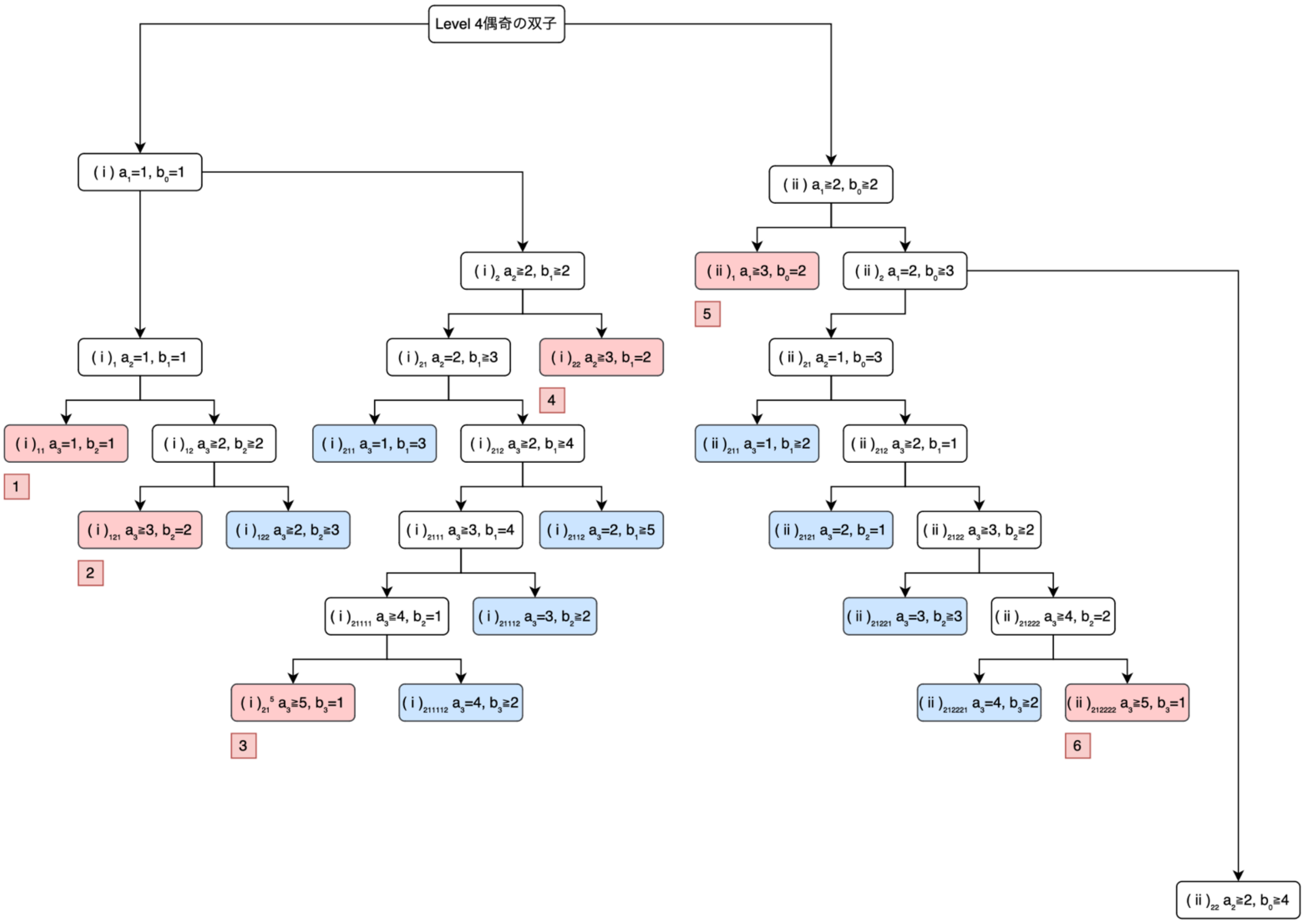
表：Level 3 の偶数・奇数の双子



表：Level 3 の奇数・偶数の双子

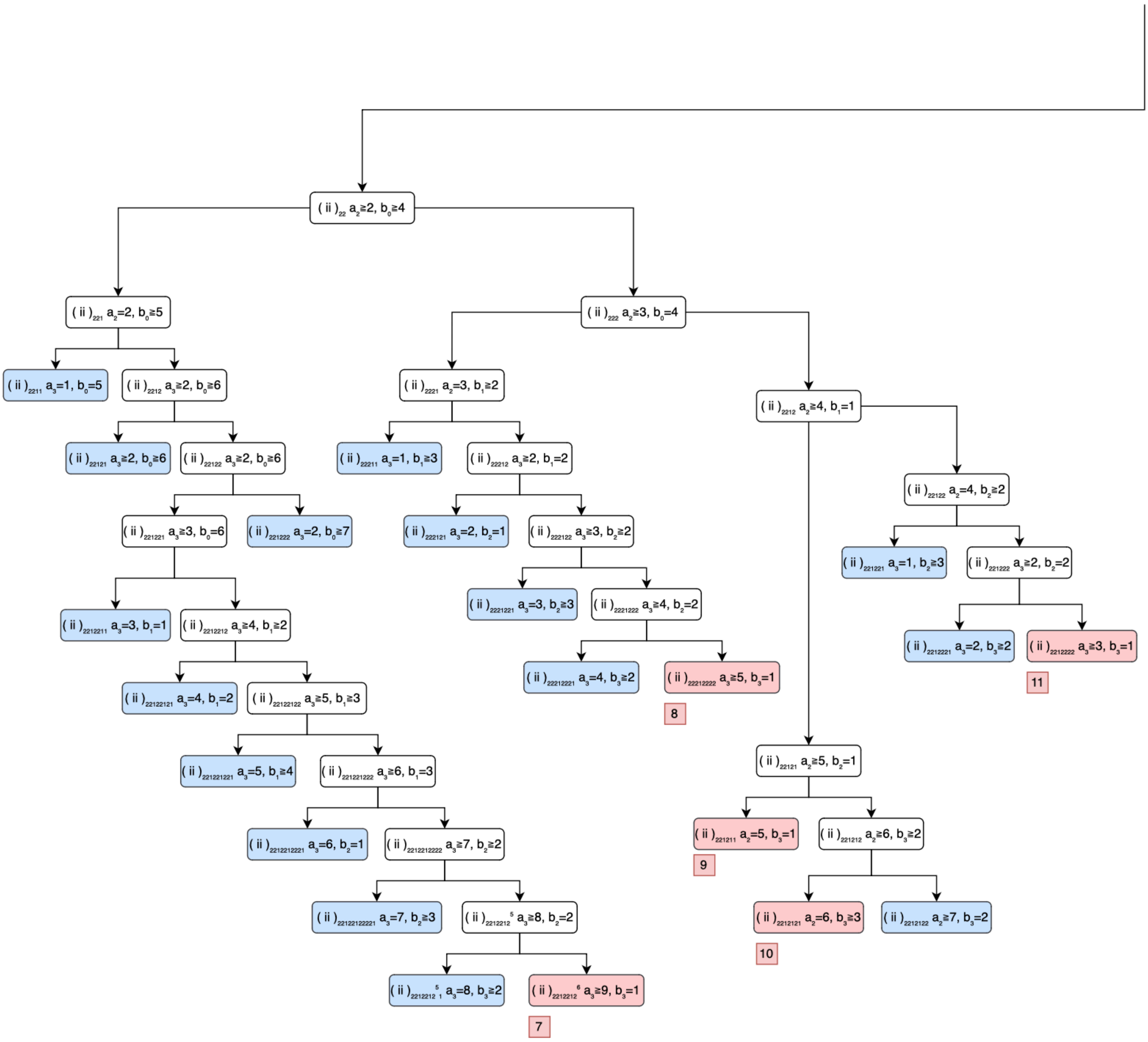


表：Level 4 の偶数・奇数の双子①

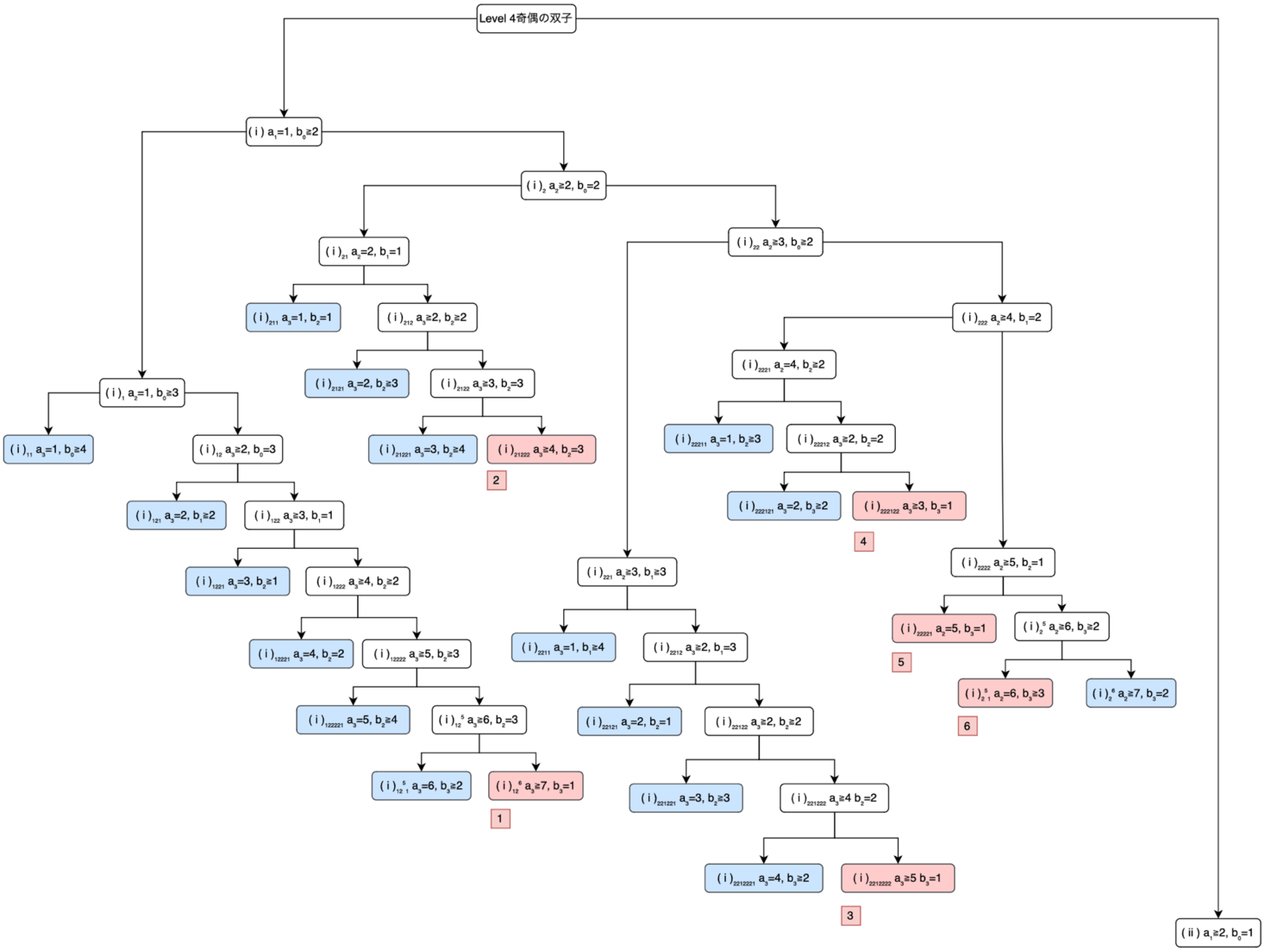


次のページへ続く。

表：Level 4 の偶数・奇数の双子②

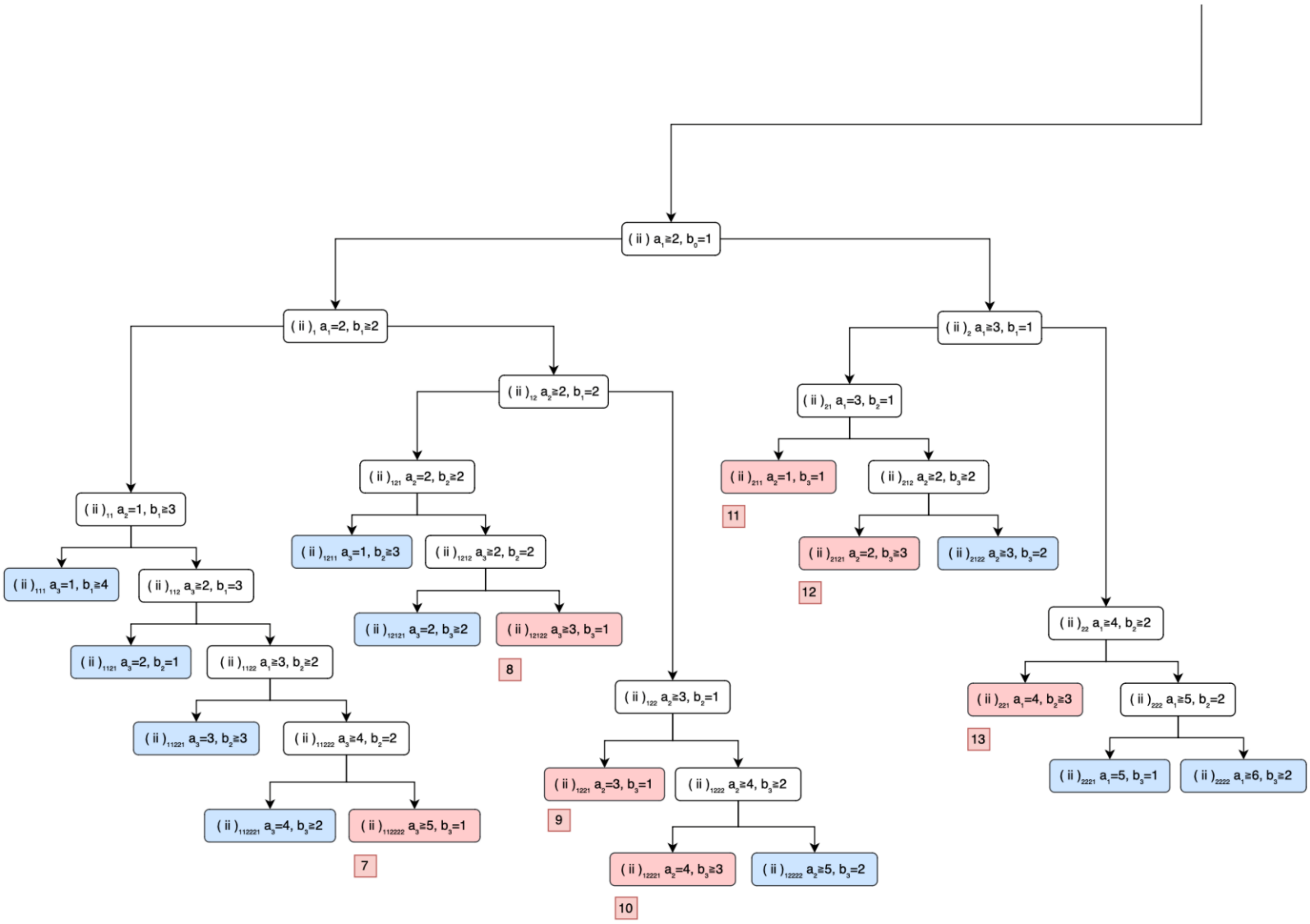


表：Level 4の奇数・偶数の双子（i）

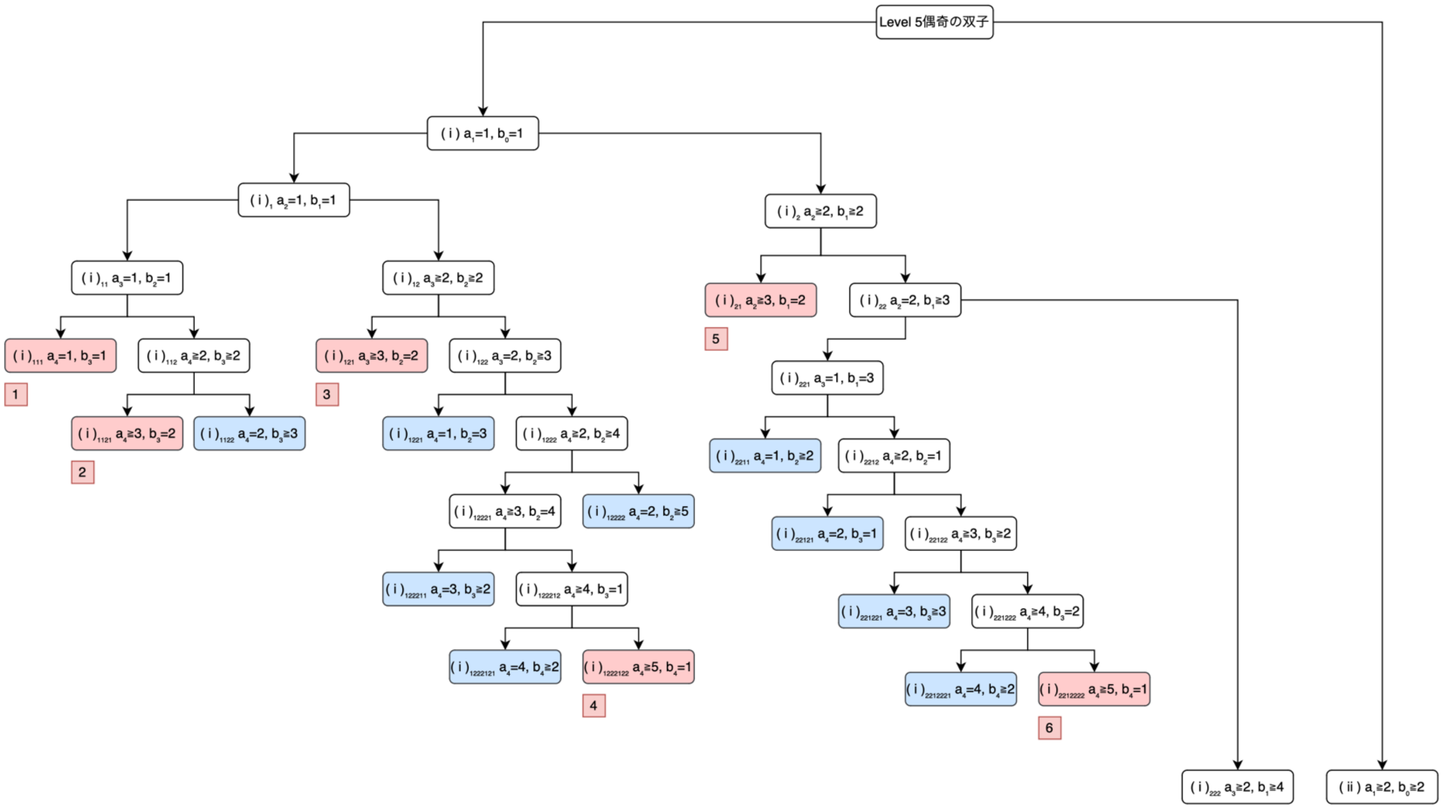


次のページへ続く。

表：Level 4 の奇数・偶数の双子（ii）

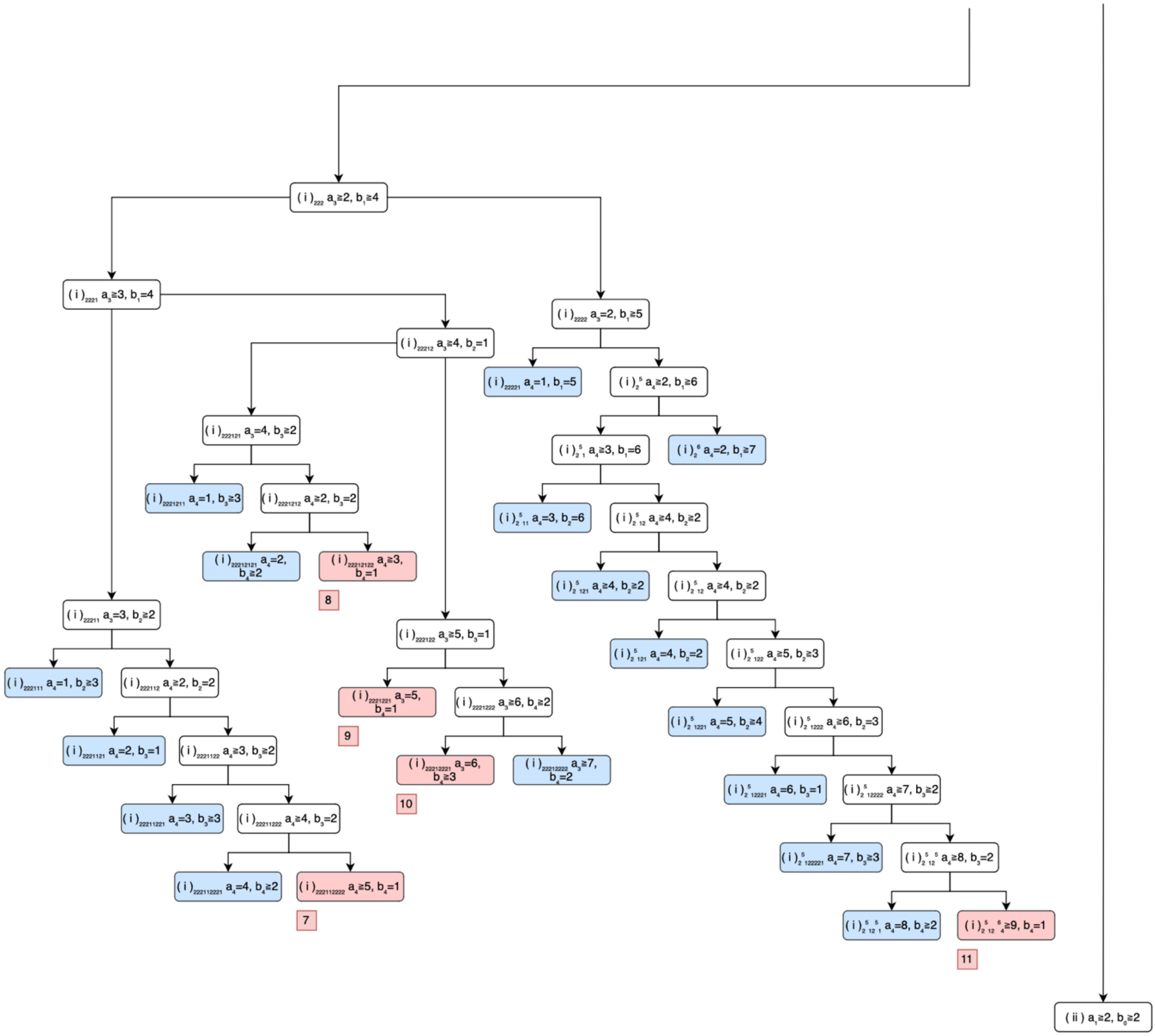


表：Level 5 の偶数・奇数の双子①



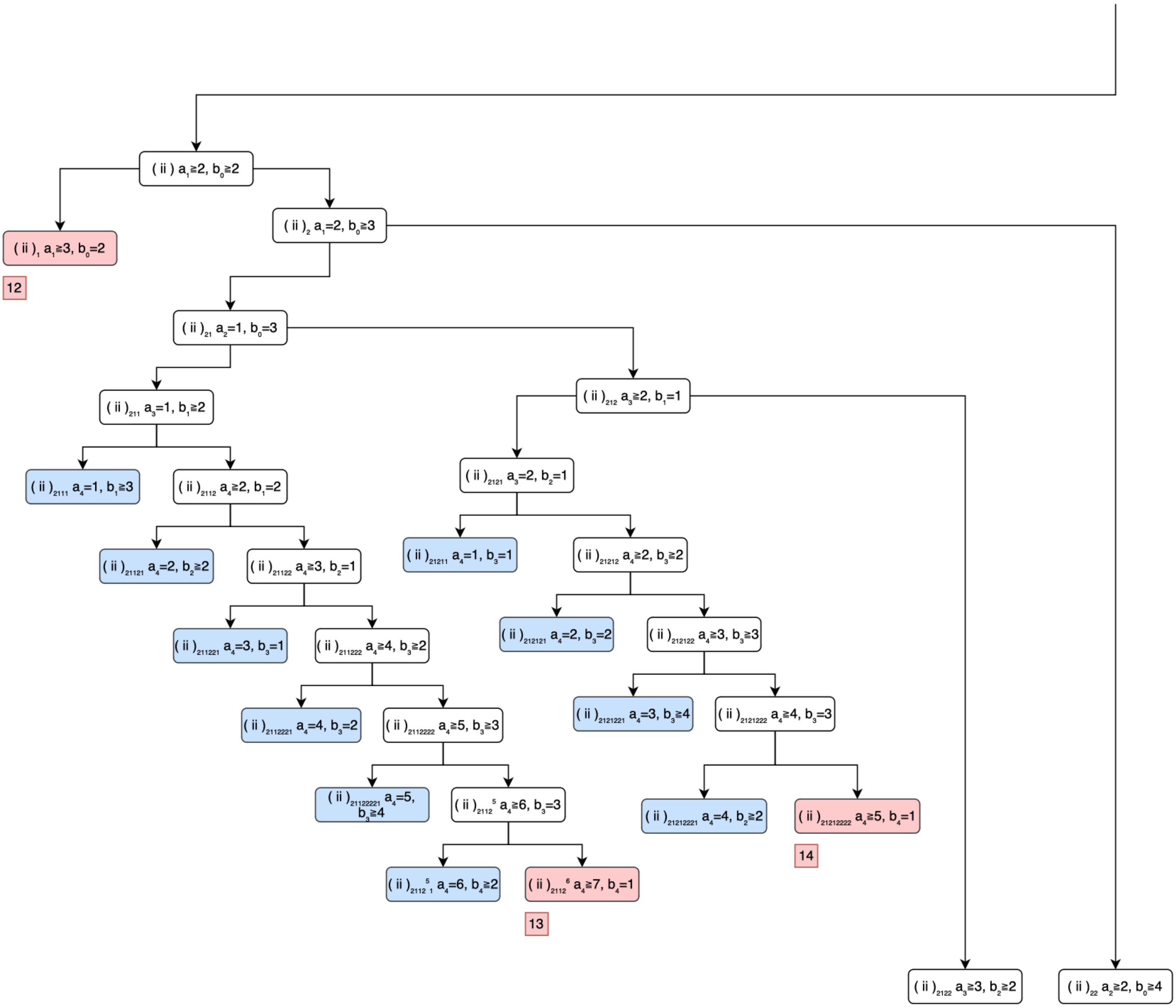
次のページへ続く。

表：Level 5 の偶数・奇数の双子②



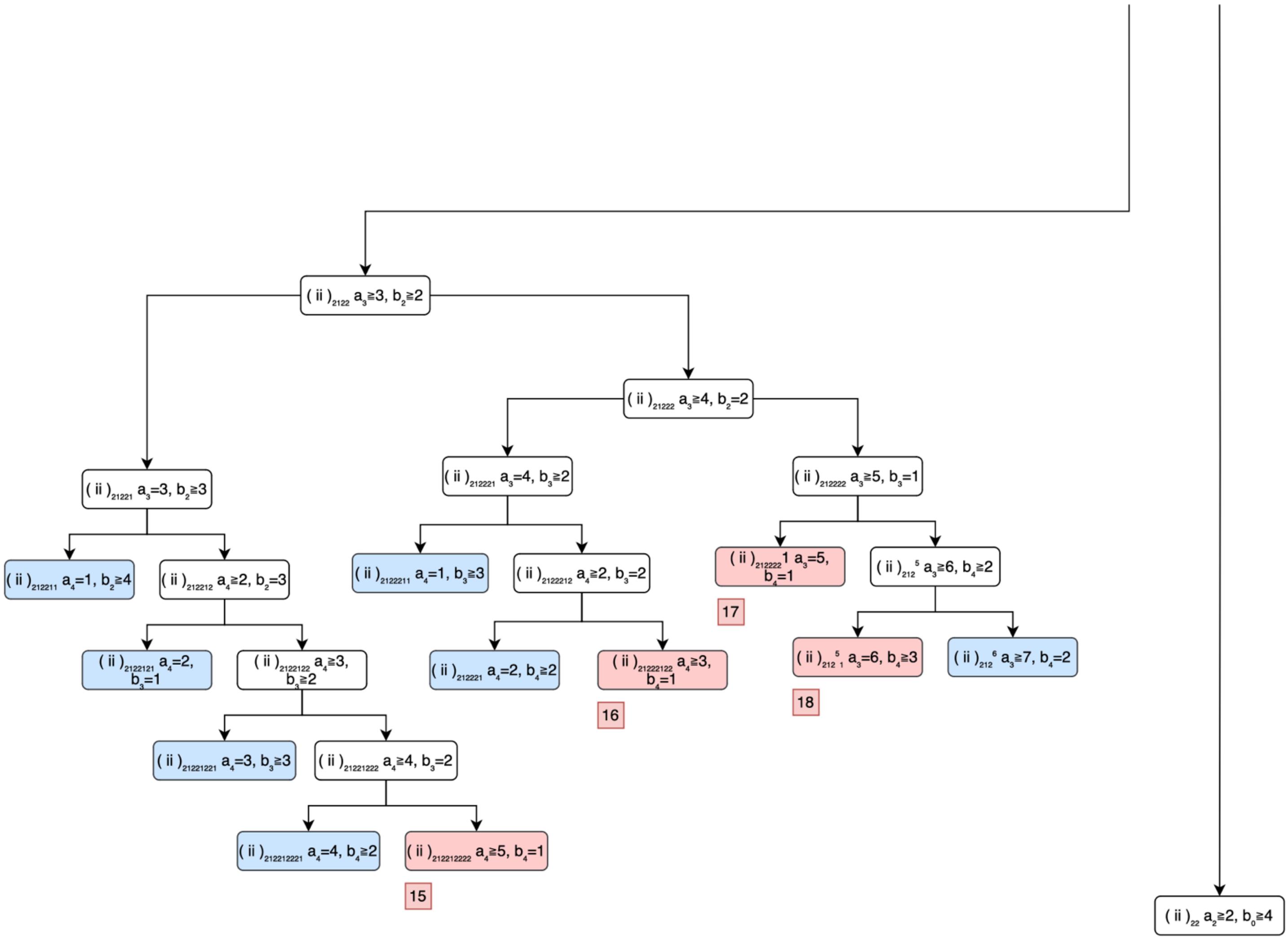
次のページへ続く。

表：Level 5 の偶数・奇数の双子③



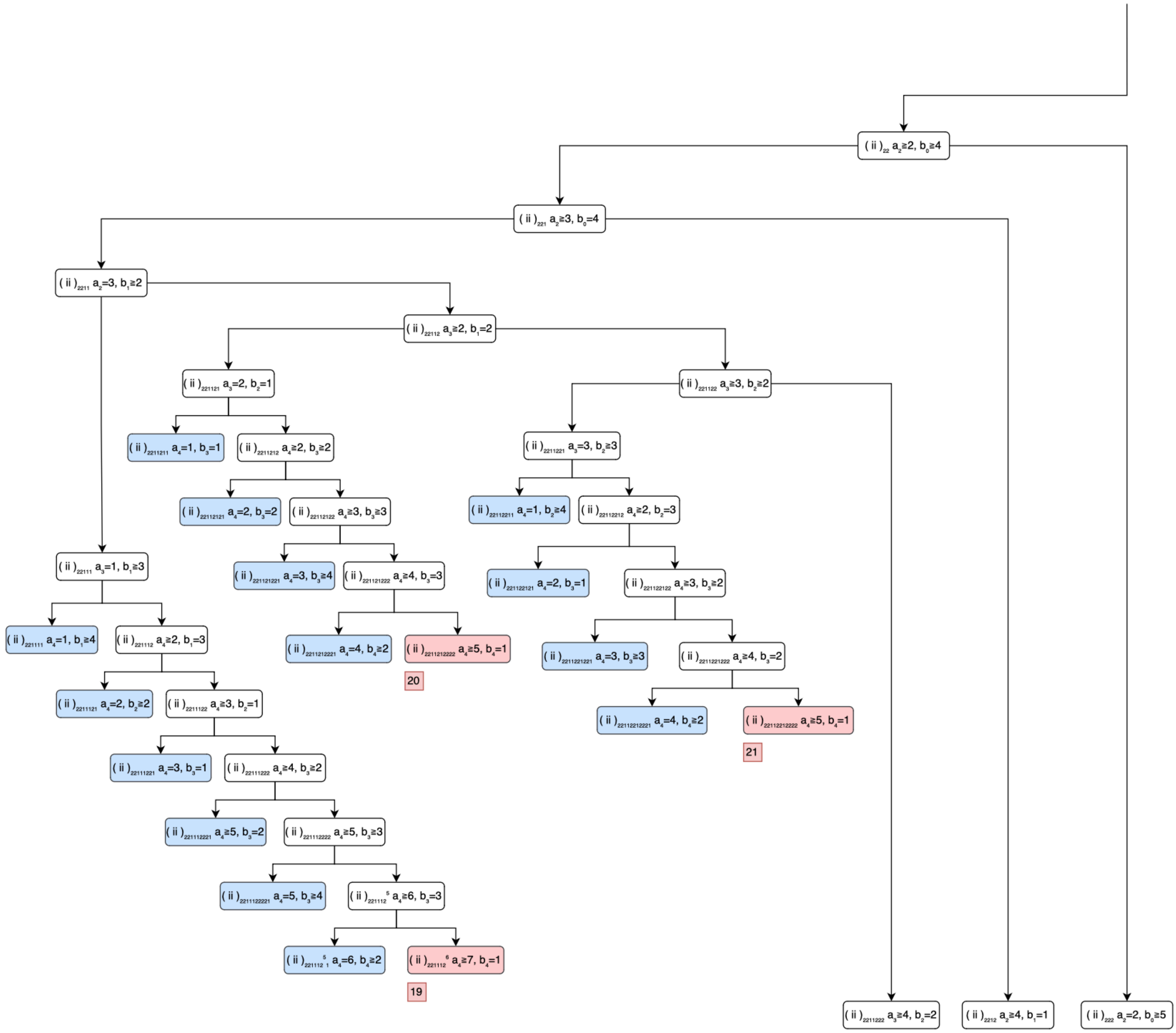
次のページへ続く。

表：Level 5 の偶数・奇数の双子④



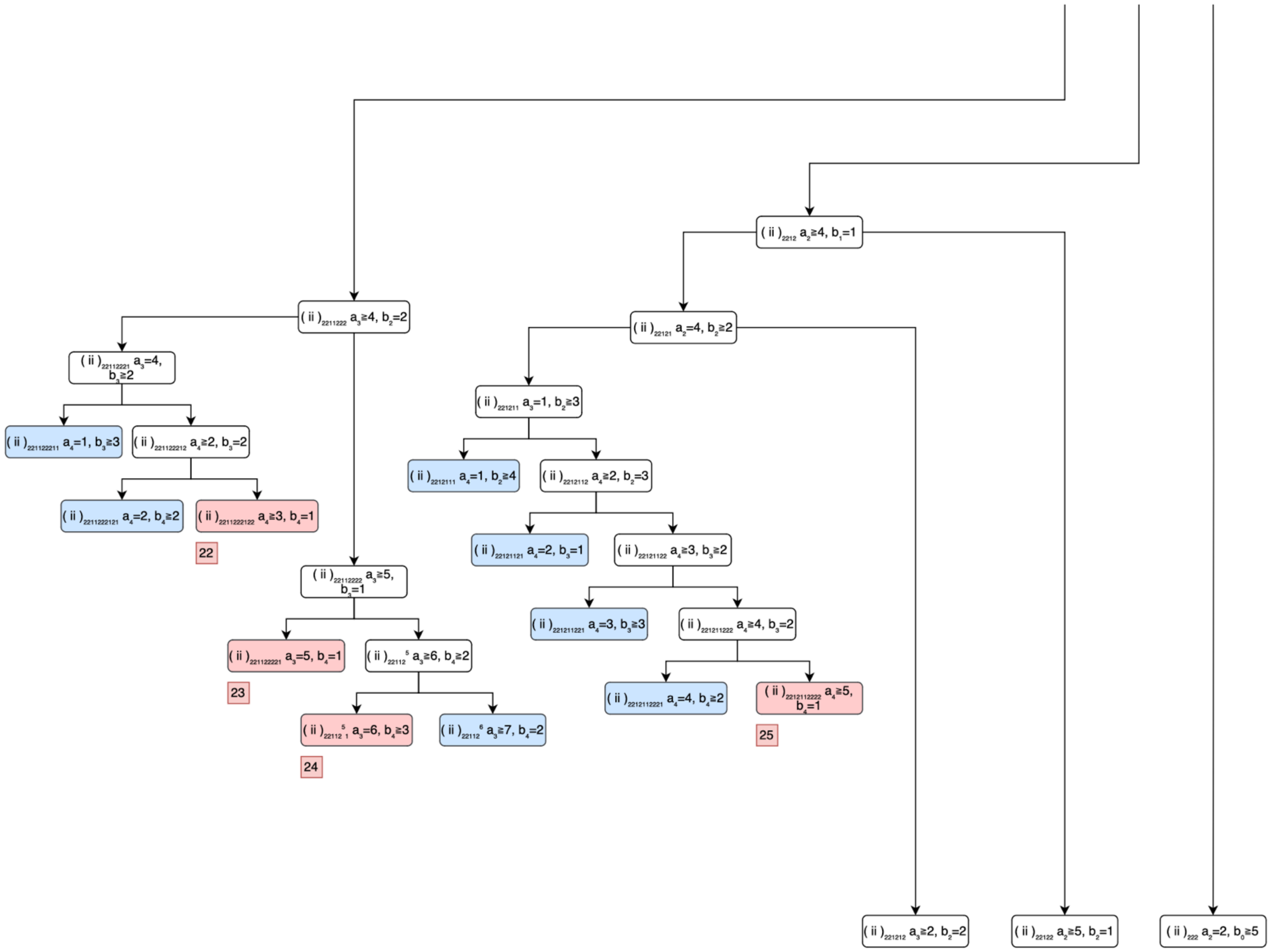
次のページへ続く。

表：Level 5 の偶数・奇数の双子⑤



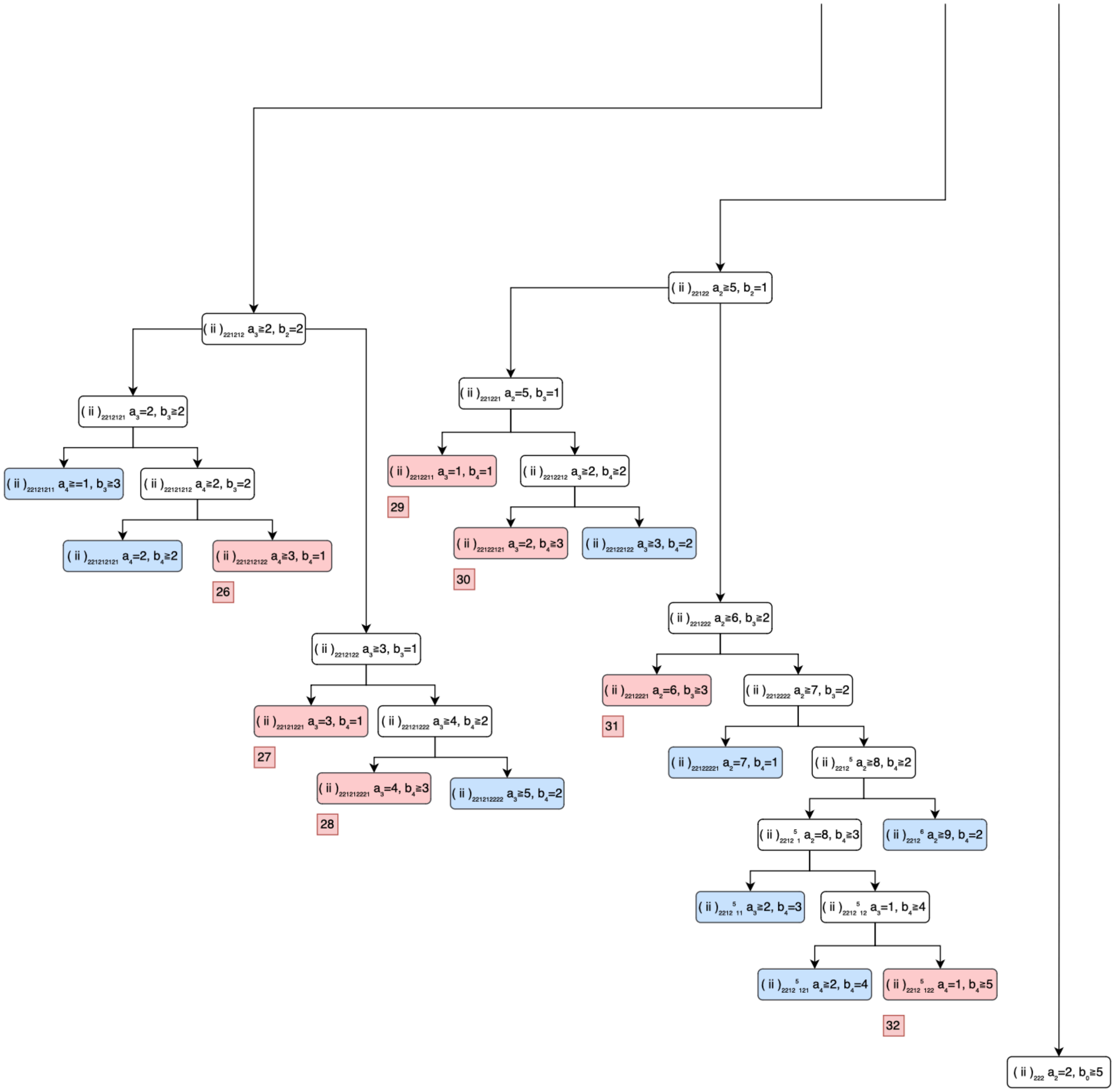
次のページへ続く。

表：Level 5 の偶数・奇数の双子⑥



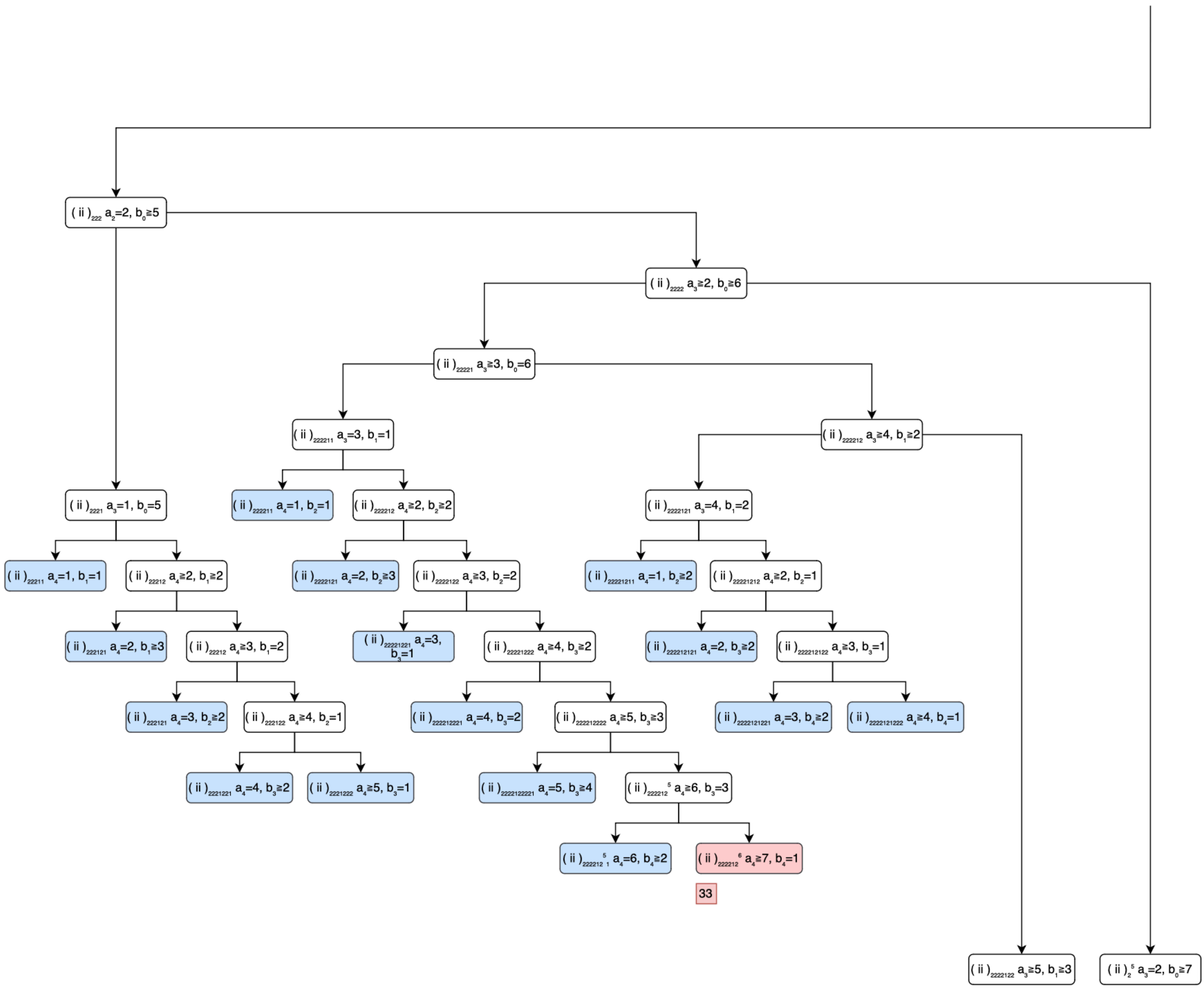
次のページへ続く。

表：Level 5 の偶数・奇数の双子⑦



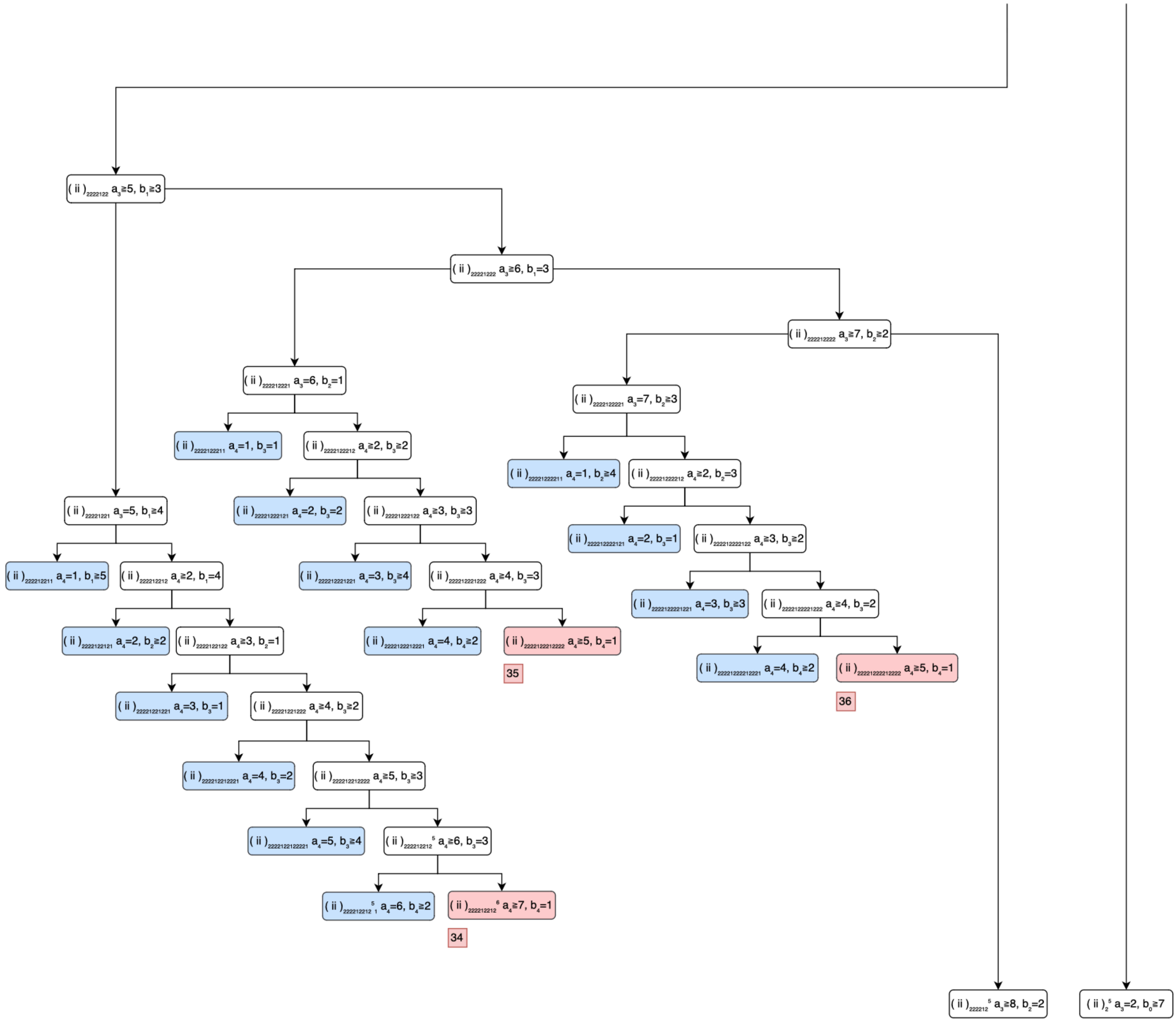
次のページへ続く。

表：Level 5 の偶数・奇数の双子⑧



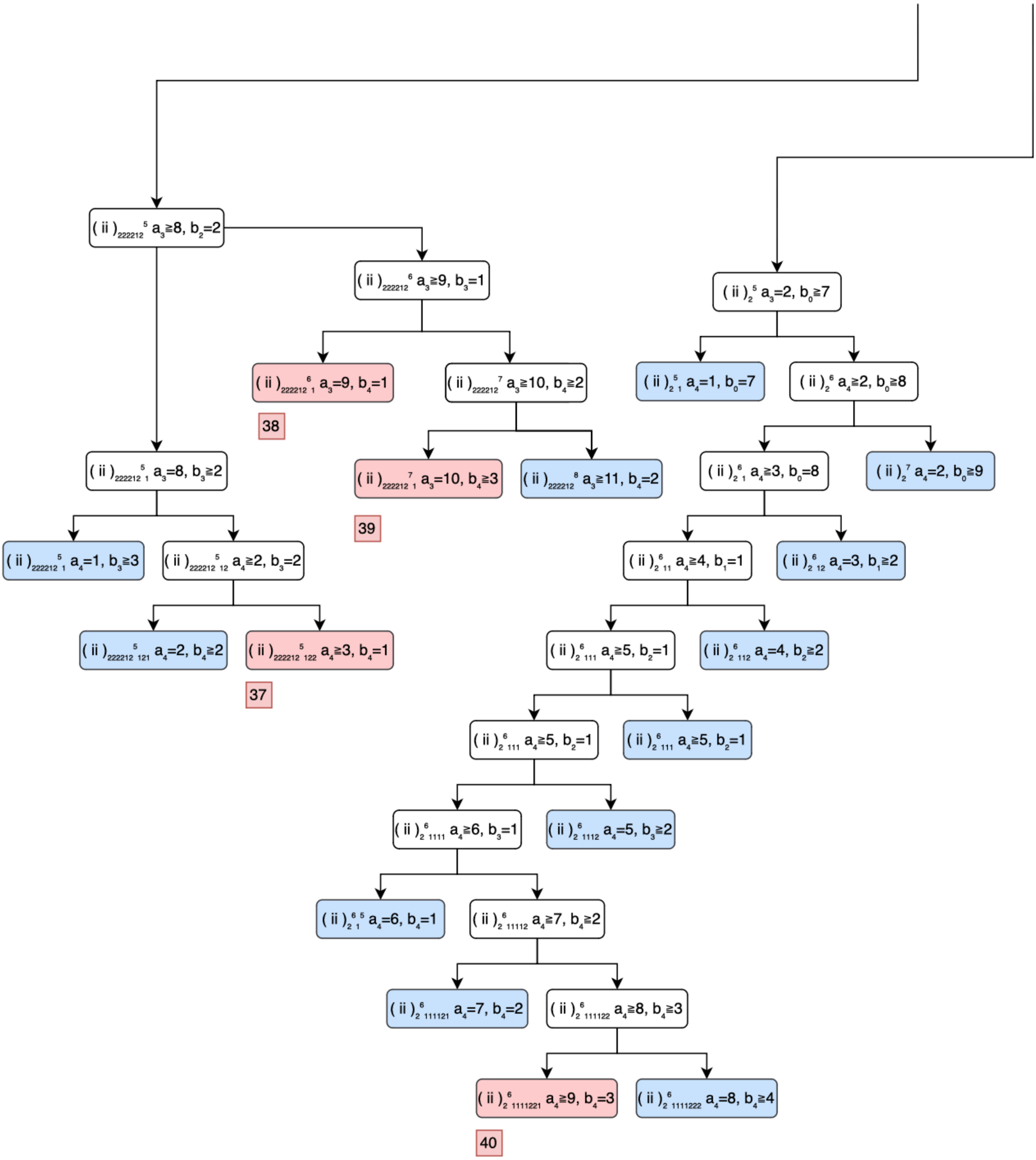
次のページへ続く。

表：Level 5 の偶数・奇数の双子⑨

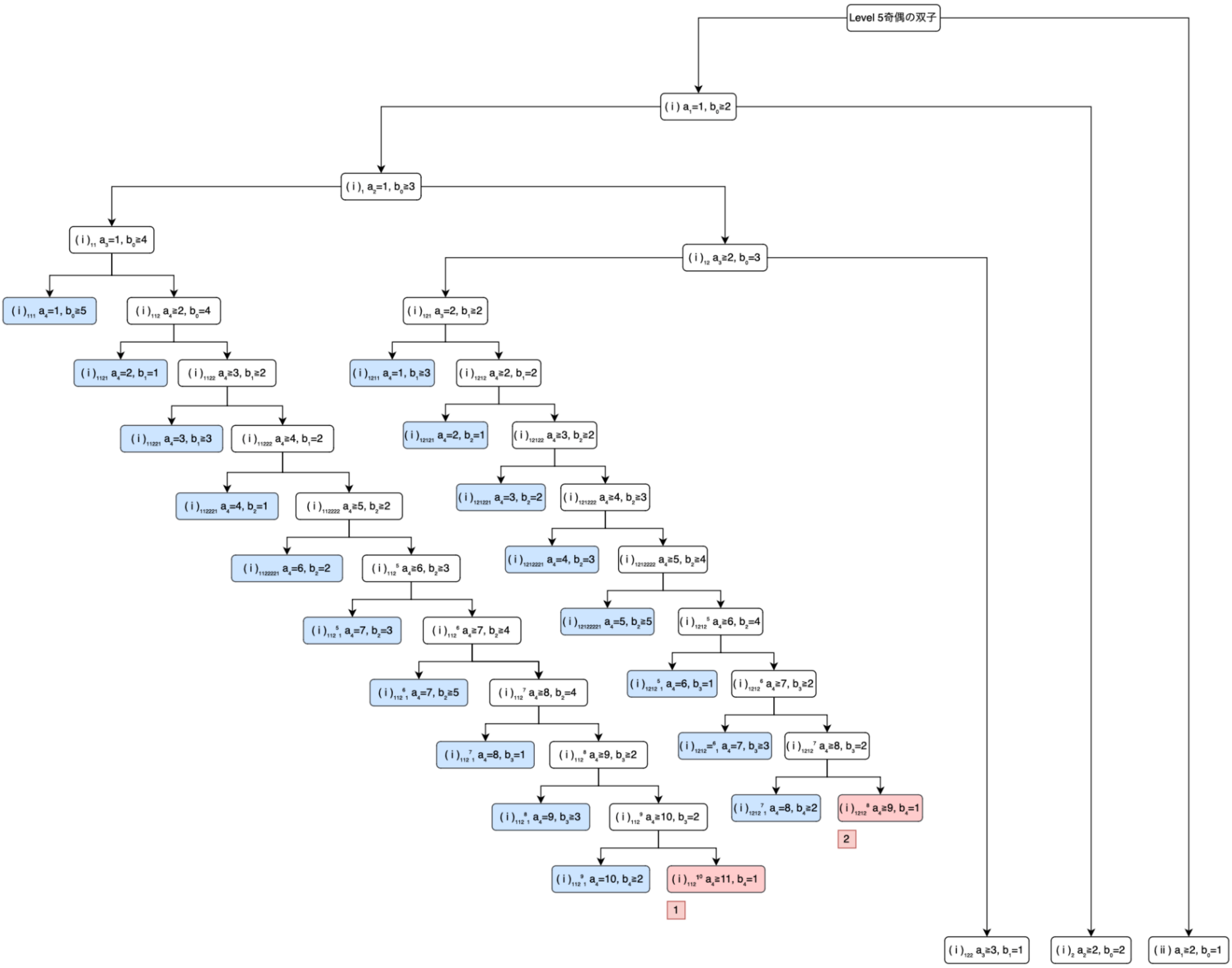


次のページへ続く。

表：Level 5 の偶数・奇数の双子⑨

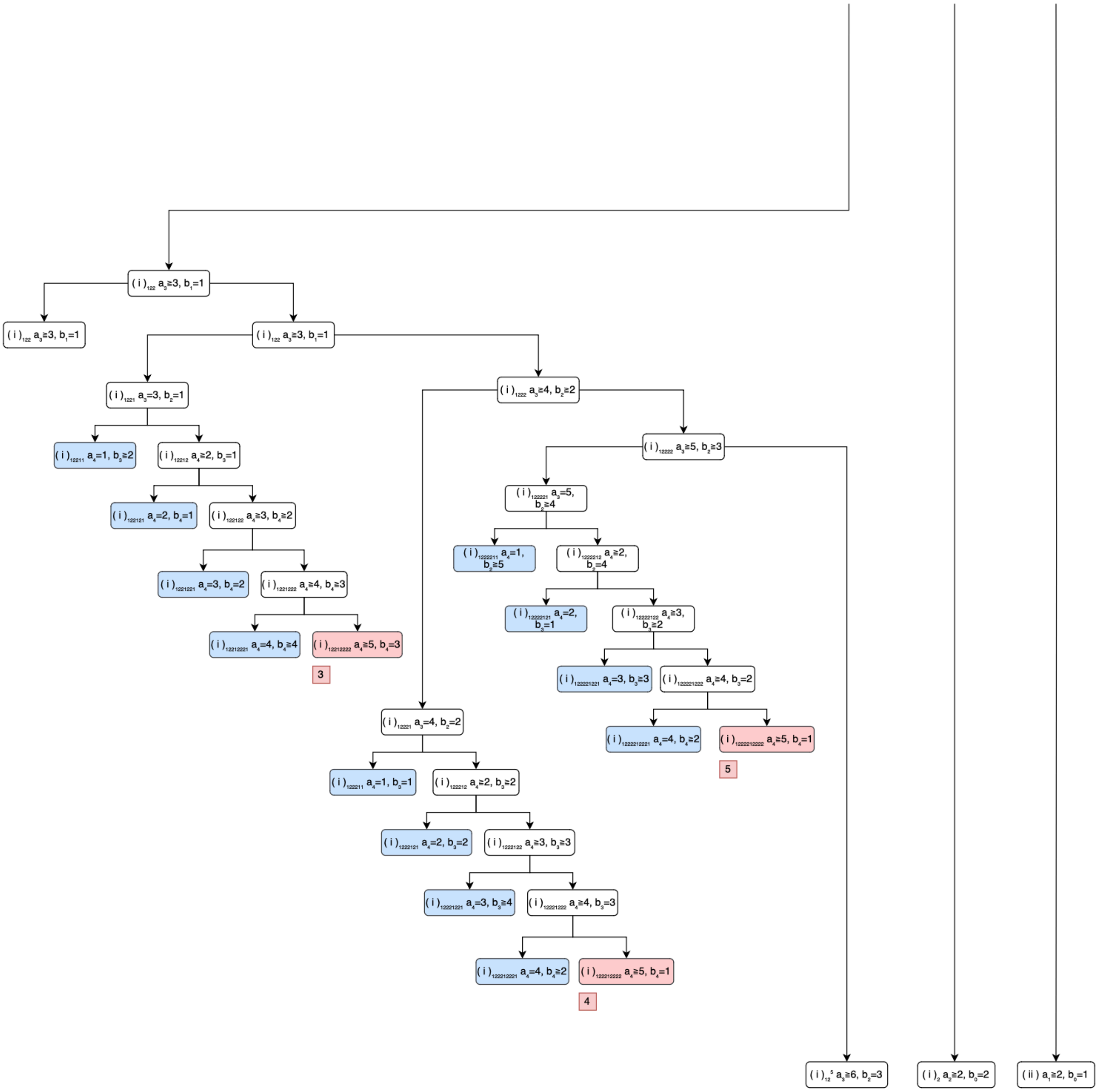


表：Level 5 の奇数・偶数の双子①



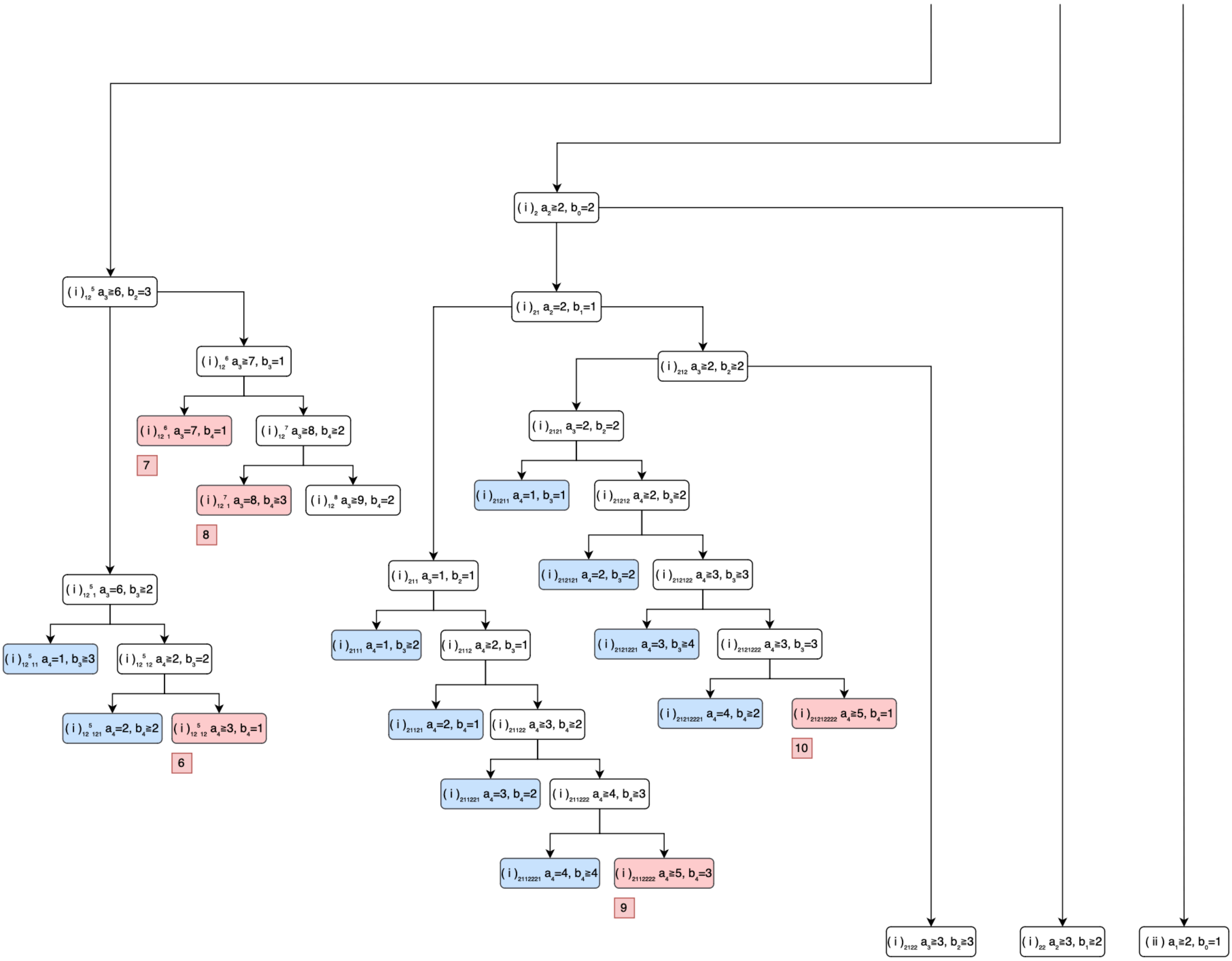
次のページへ続く。

表：Level 5 の奇数・偶数の双子②



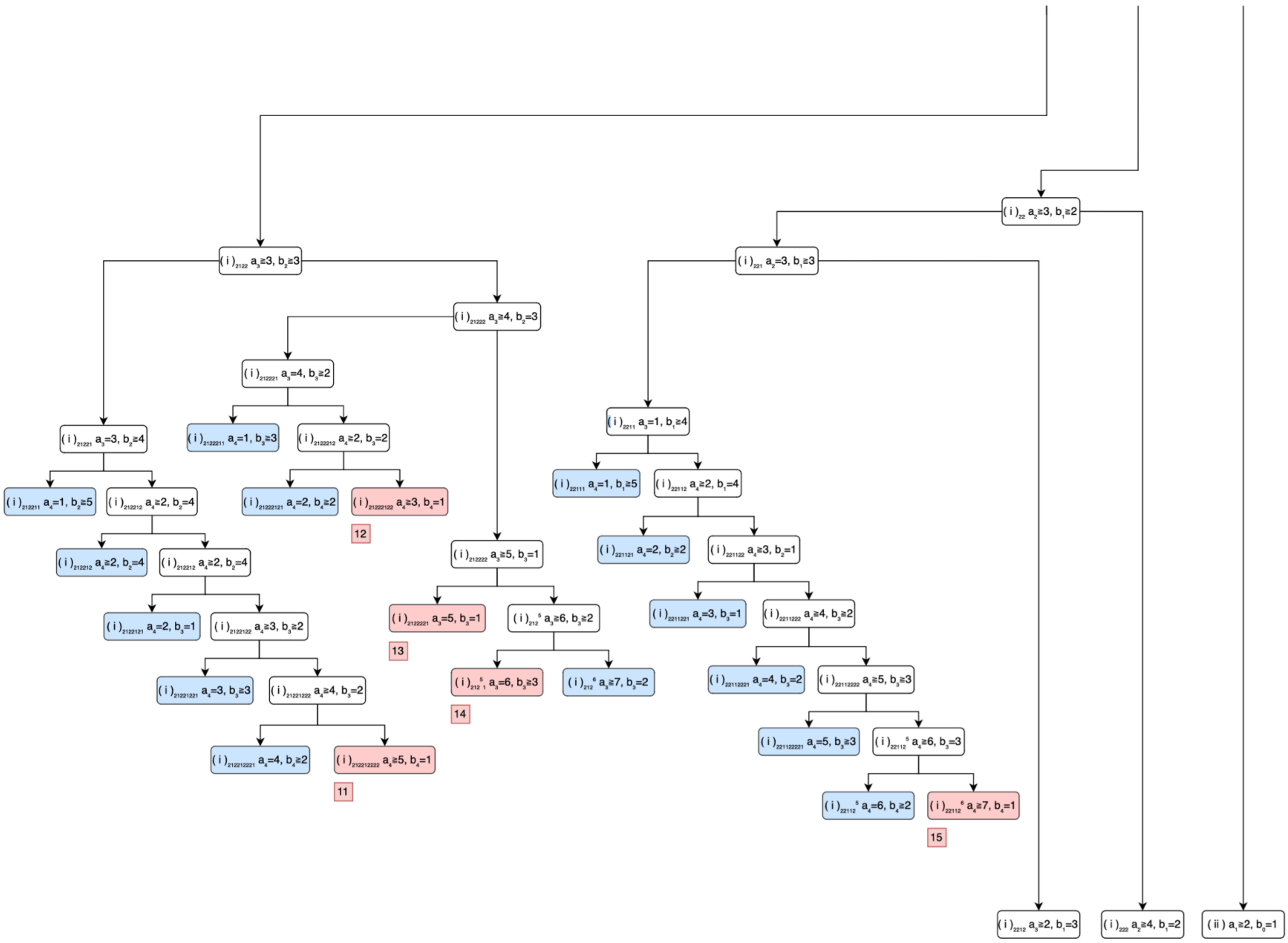
次のページへ続く。

表：Level 5 の奇数・偶数の双子③



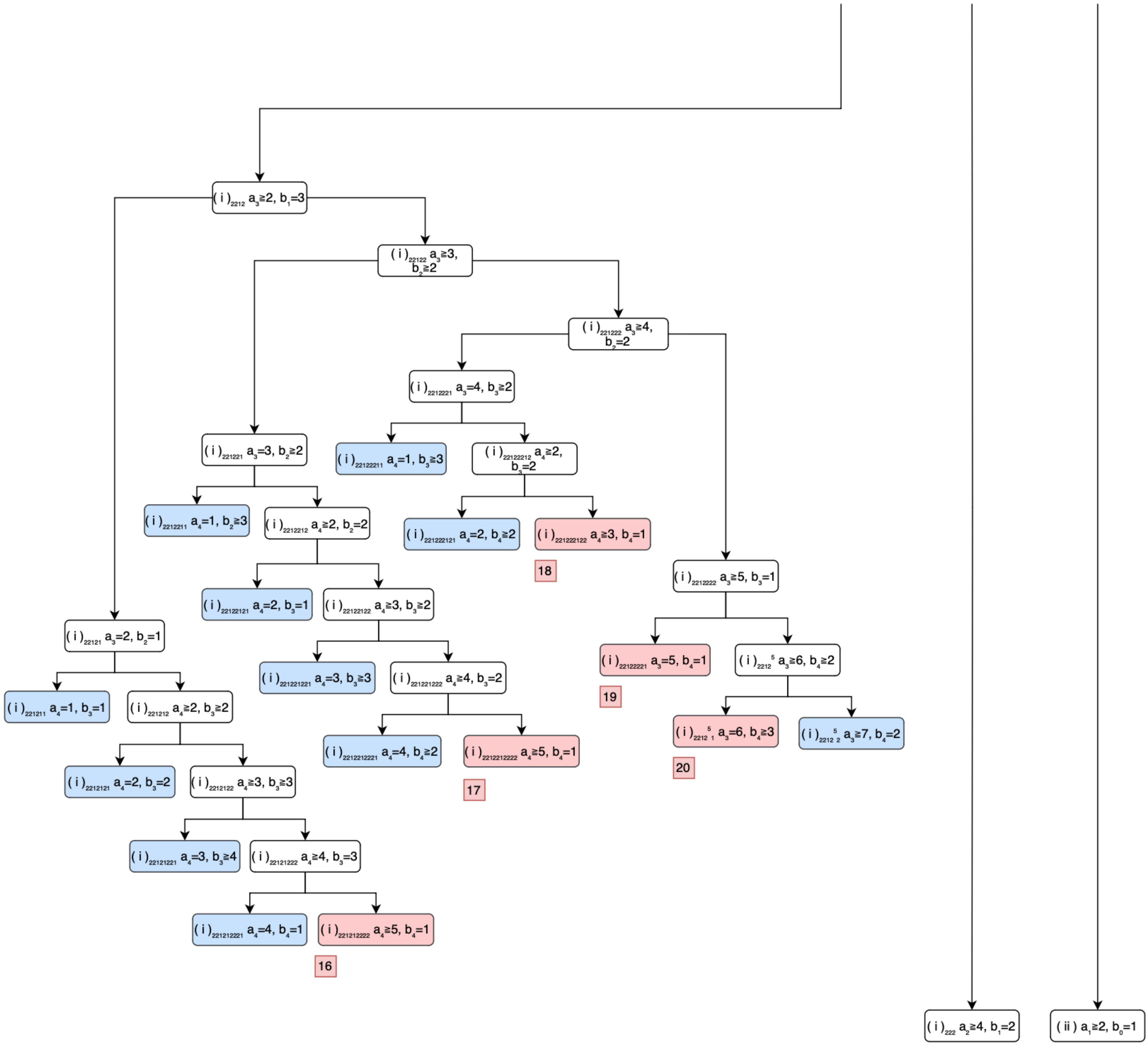
次のページへ続く。

表：Level 5 の奇数・偶数の双子④



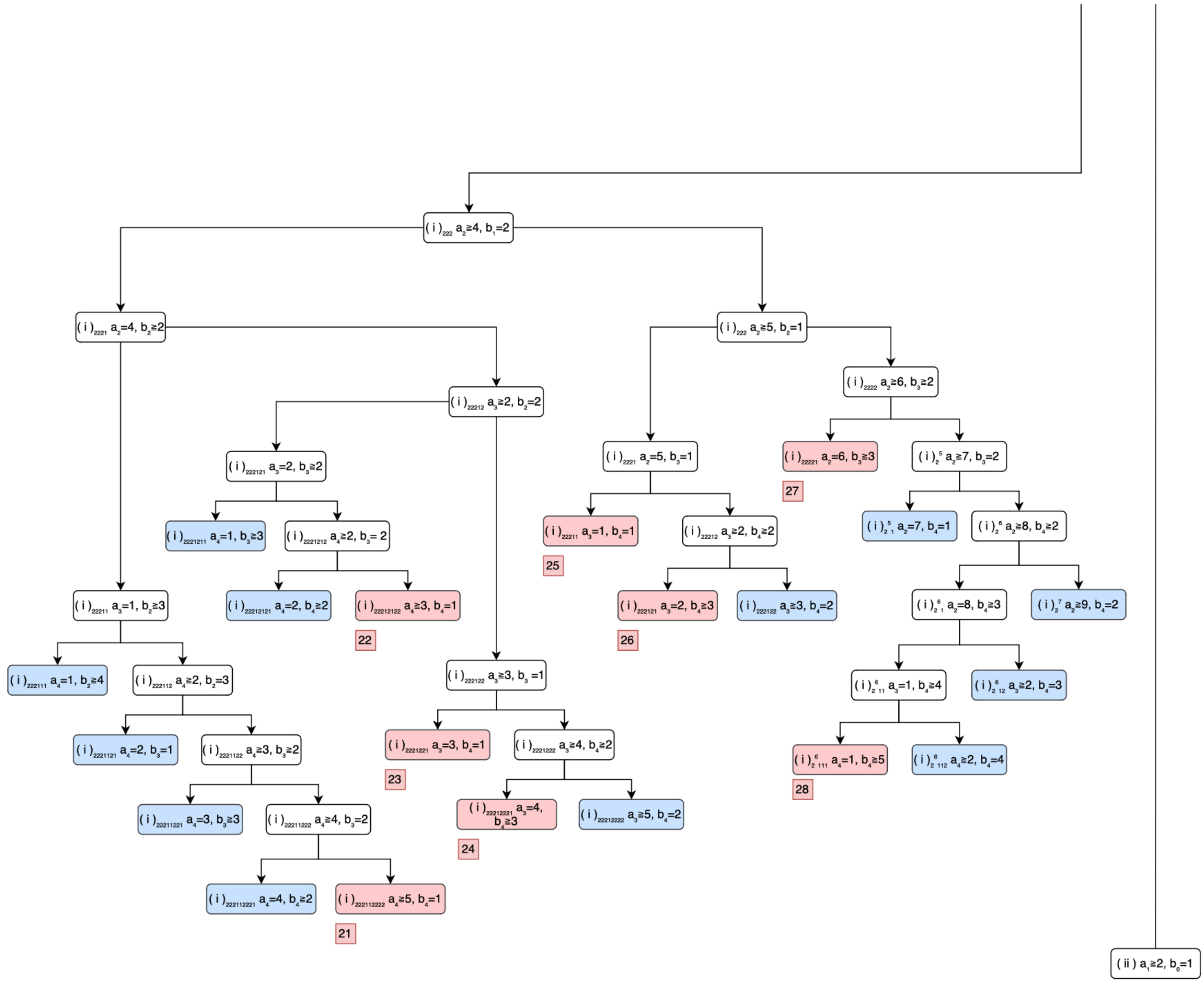
次のページへ続く。

表：Level 5 の奇数・偶数の双子⑤



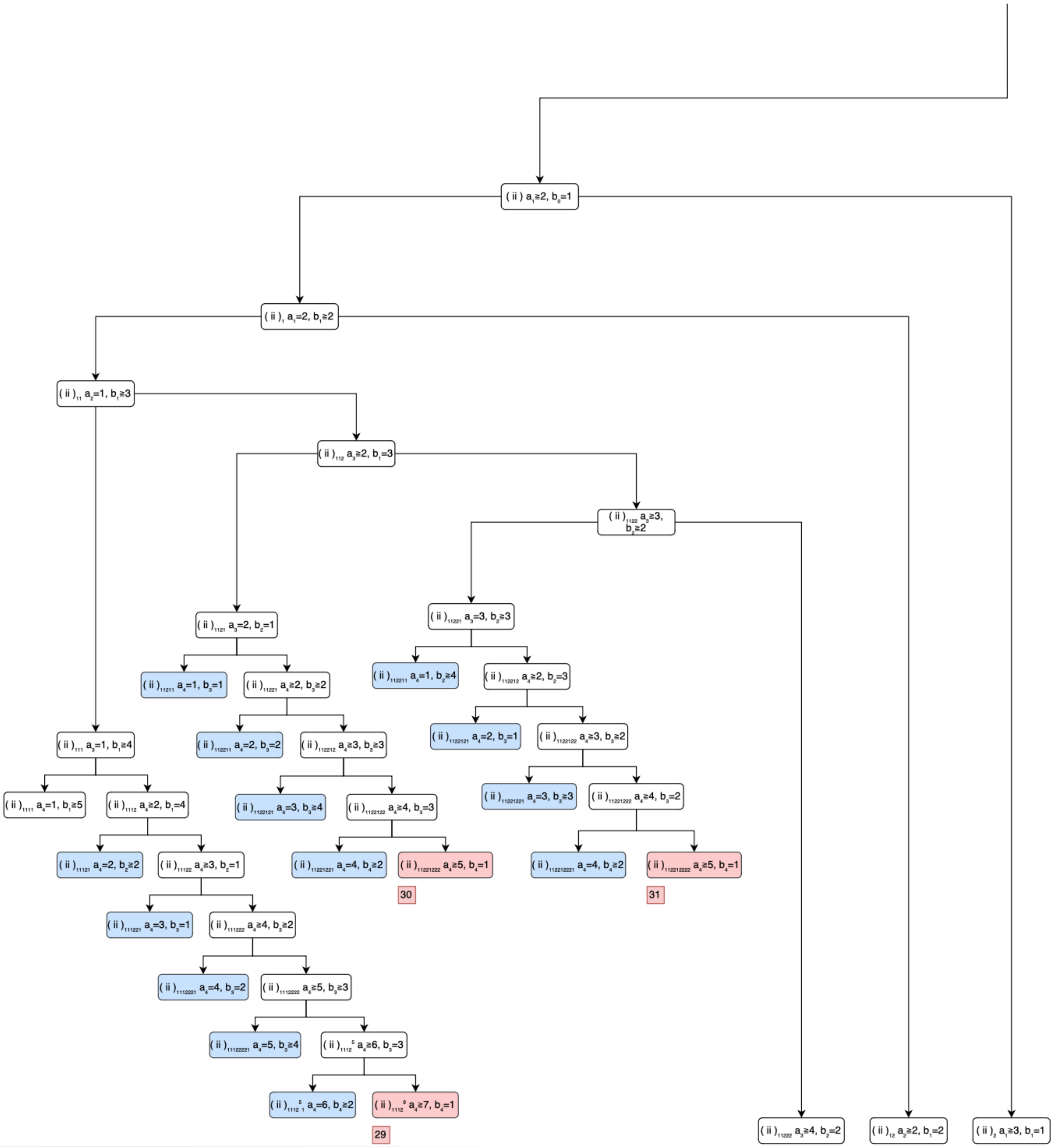
次のページへ続く。

表：Level 5 の奇数・偶数の双子⑥



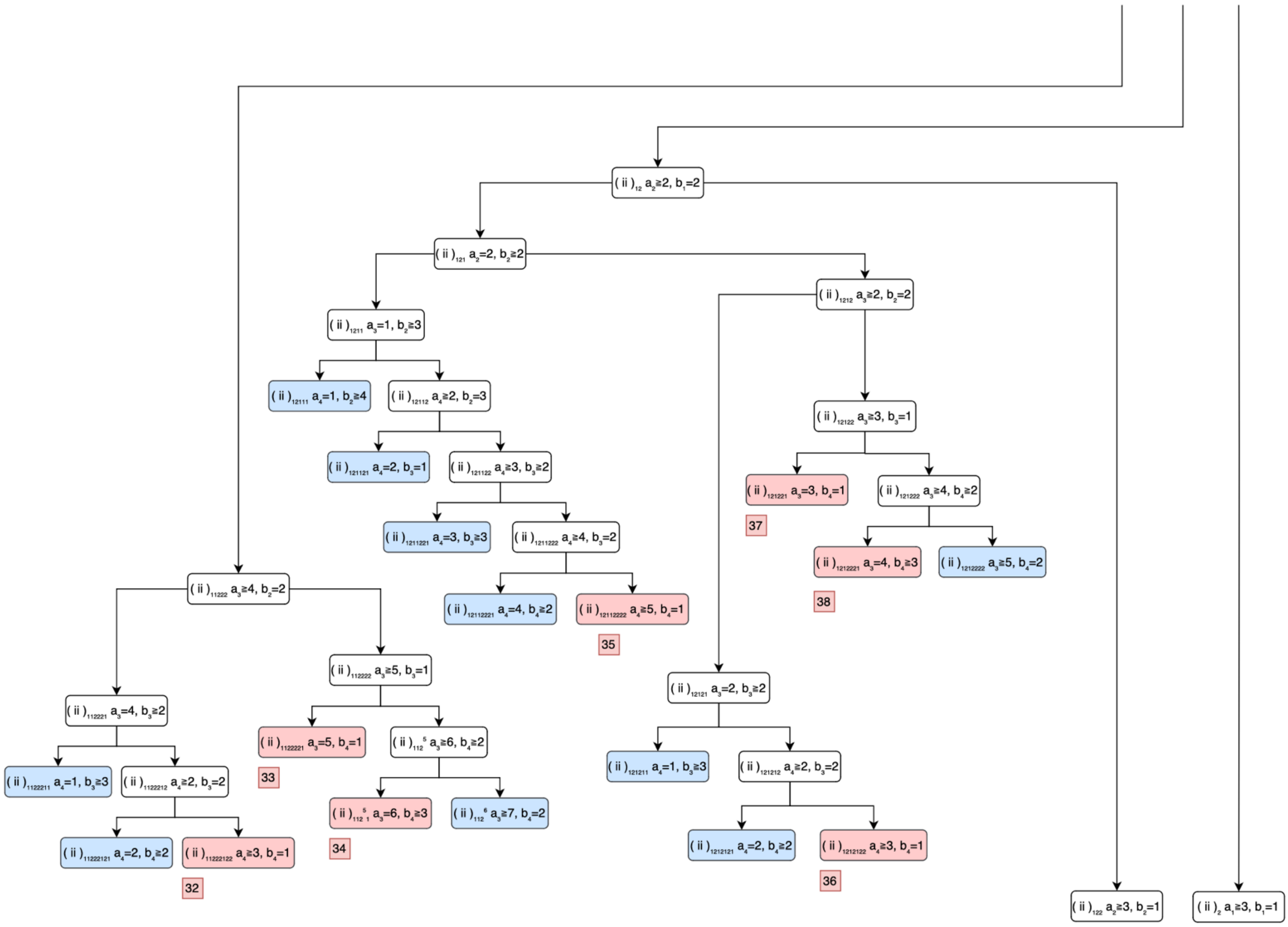
次のページへ続く。

表：Level 5 の奇数・偶数の双子⑦



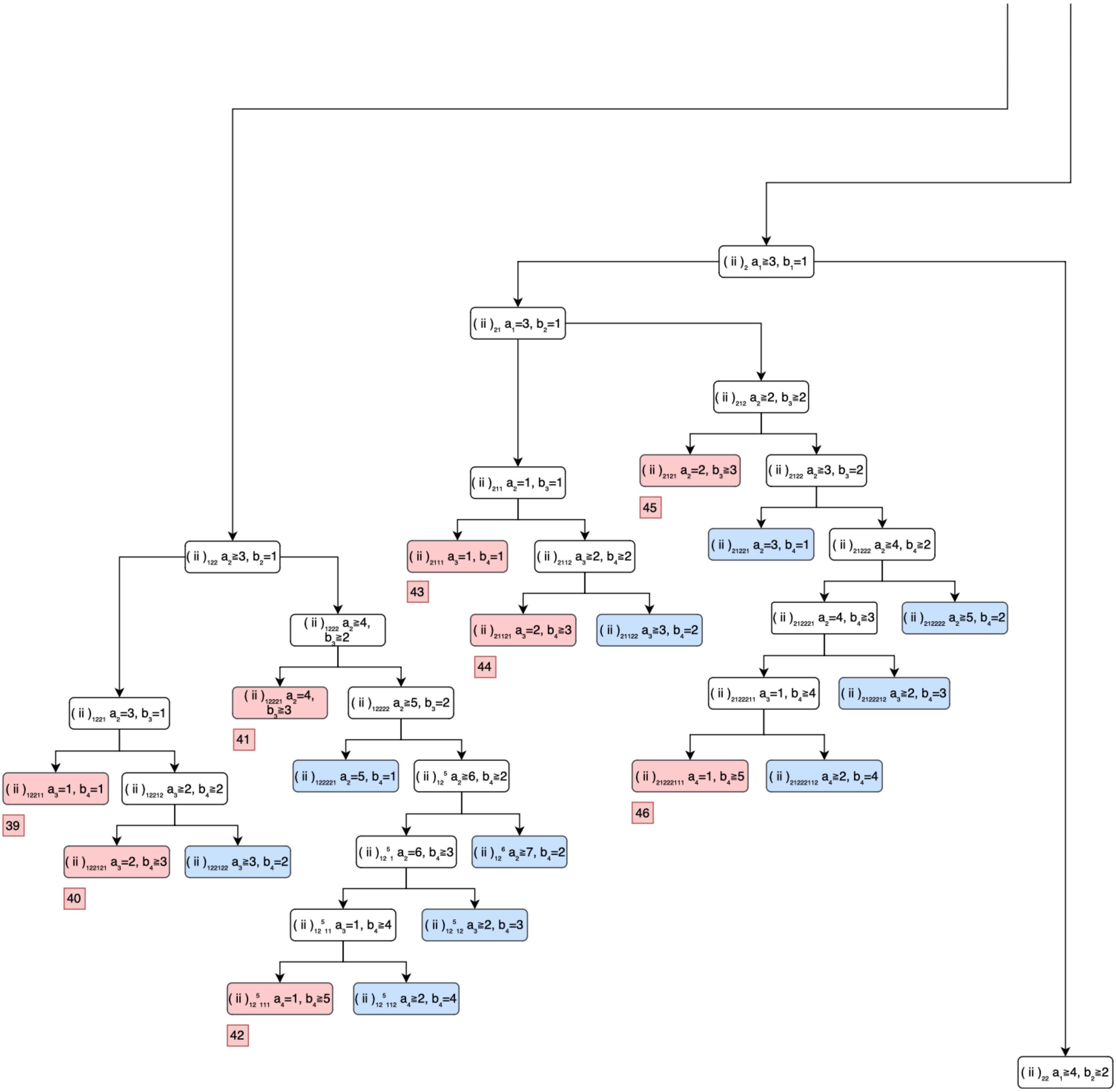
次のページへ続く。

表：Level 5 の奇数・偶数の双子⑧



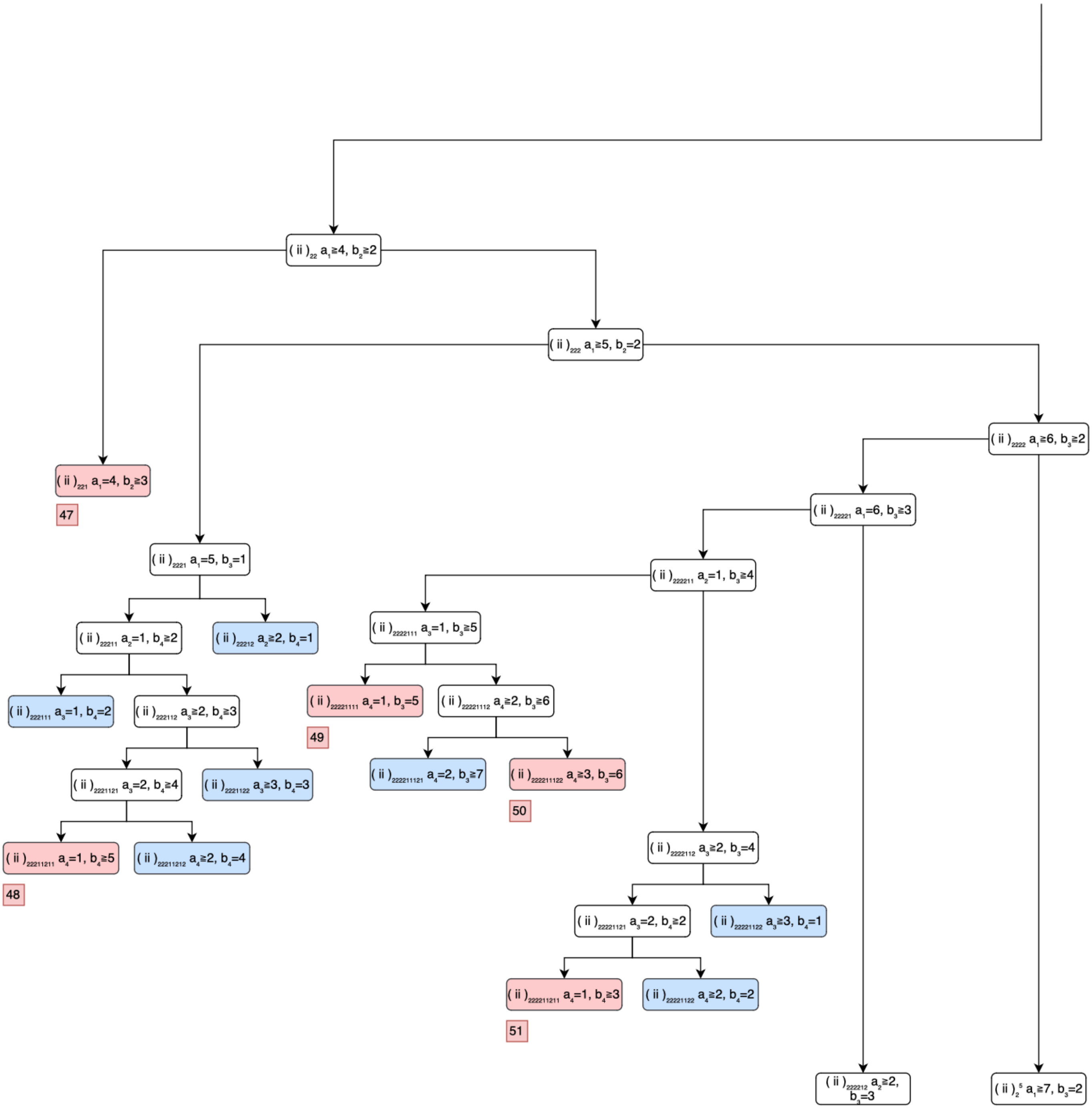
次のページへ続く。

表：Level 5 の奇数・偶数の双子⑨

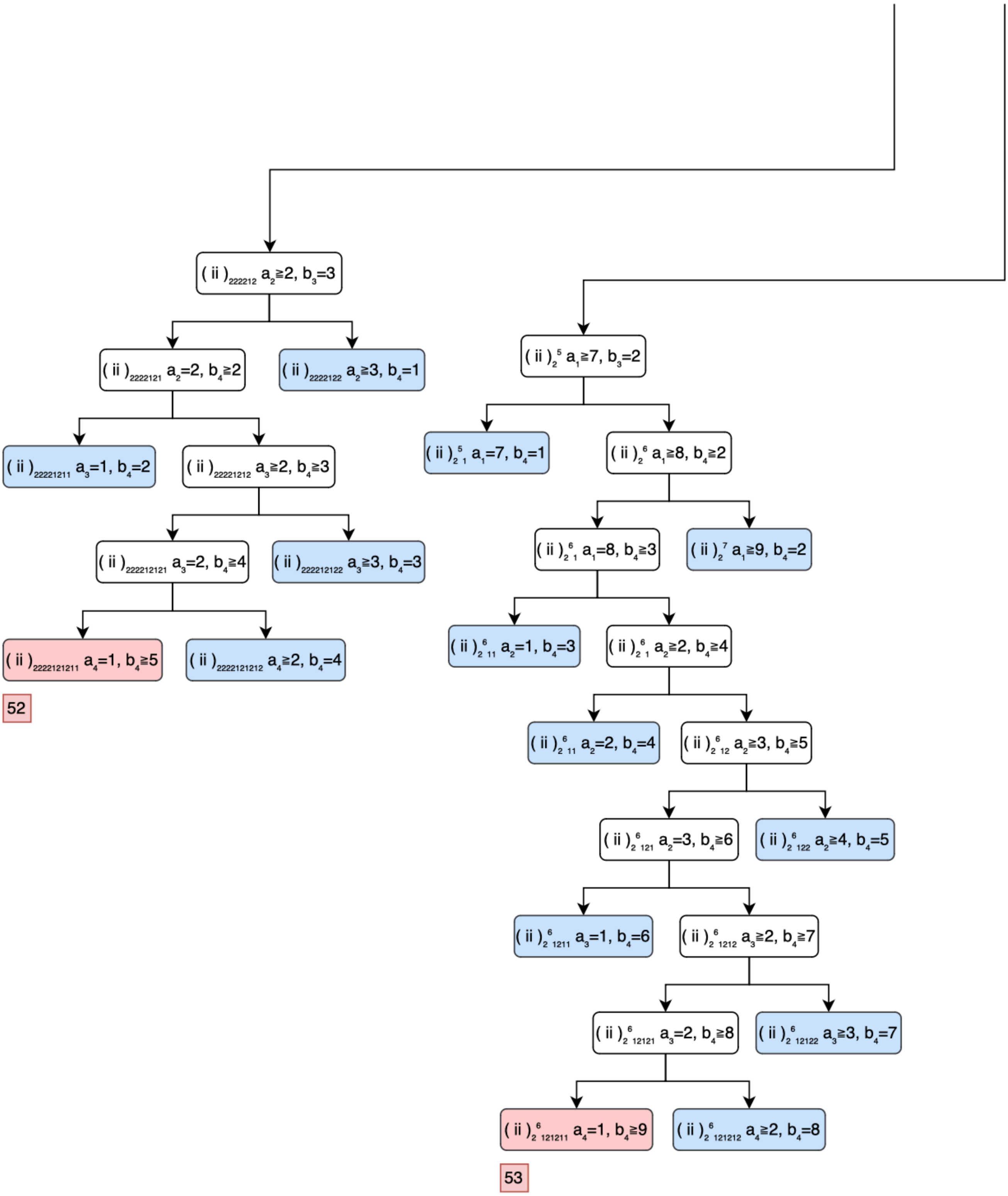


次のページへ続く。

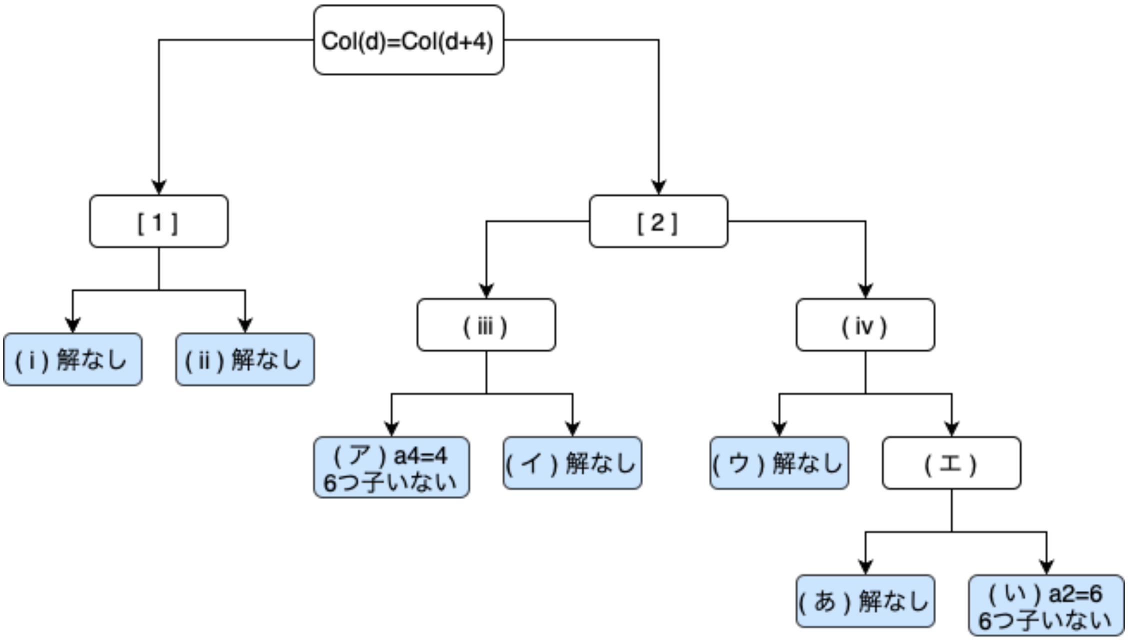
表：Level 5の奇数・偶数の双子⑩



表：Level 5の奇数・偶数の双子⑪

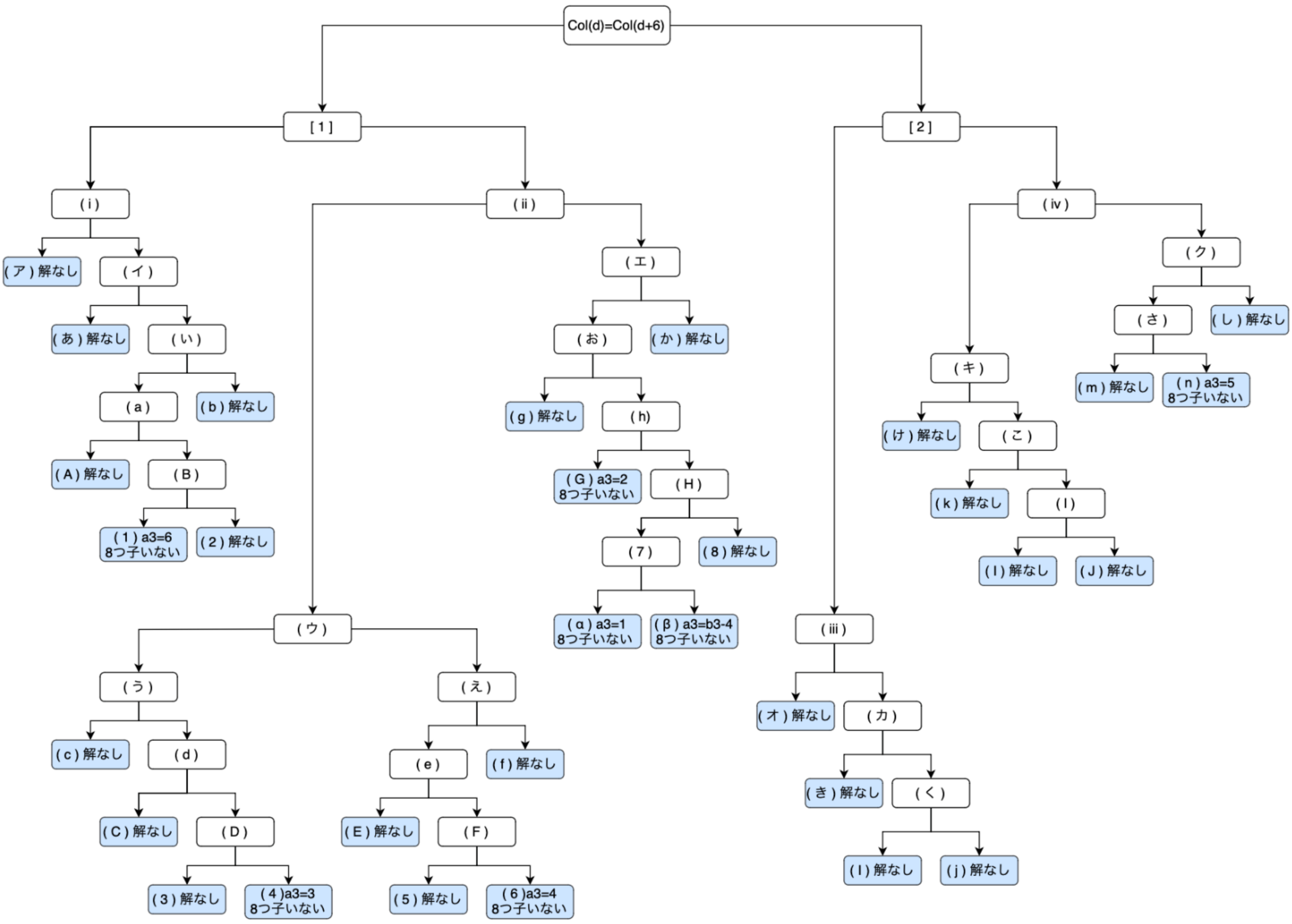


表：Level 3 の 6 つ子が存在しないことの分岐



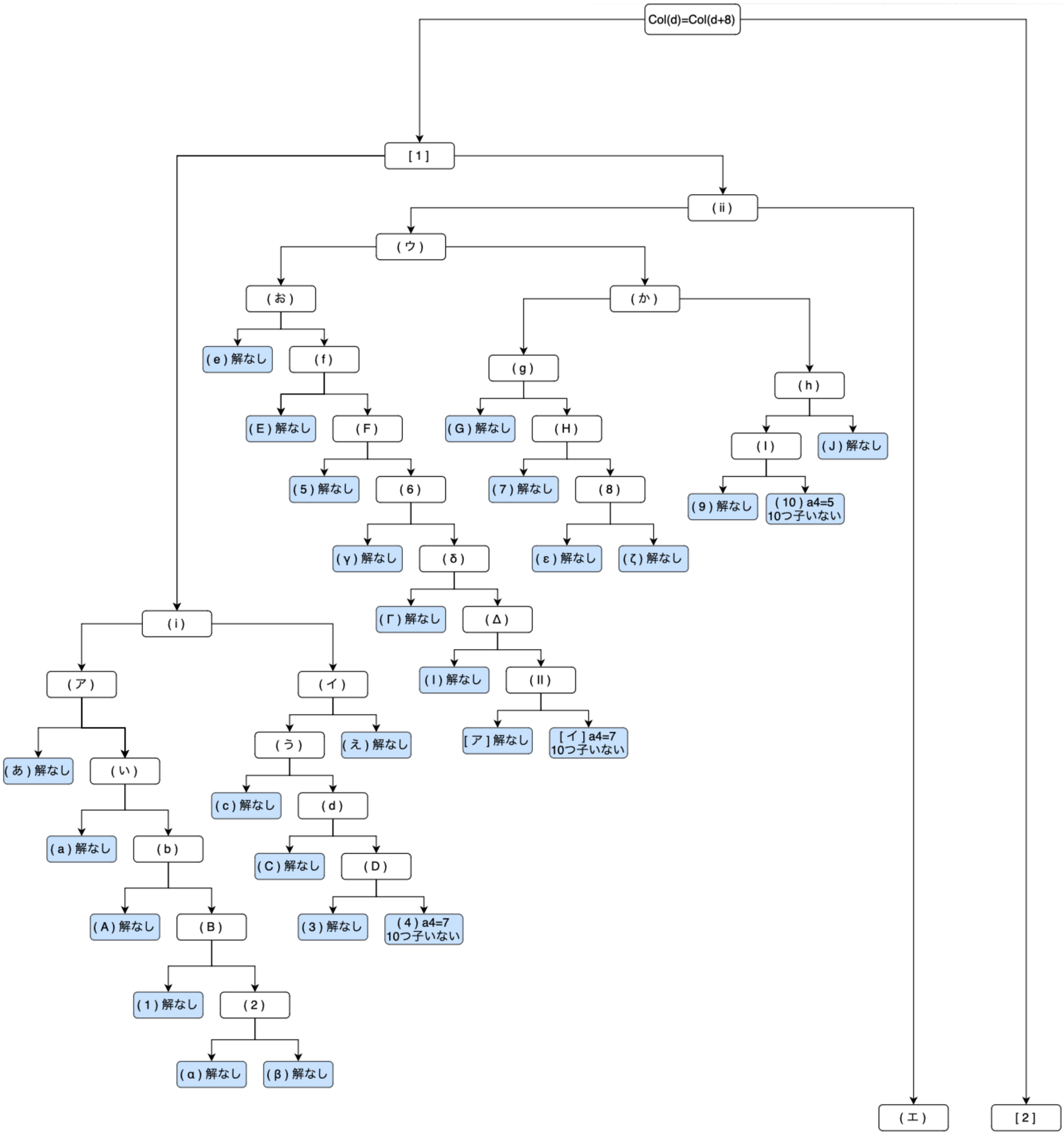
いずれの場合も「解なし」となったため、Level 3 の 6 つ子は存在しない。

表：Level 4の8つ子が存在しないことの分岐



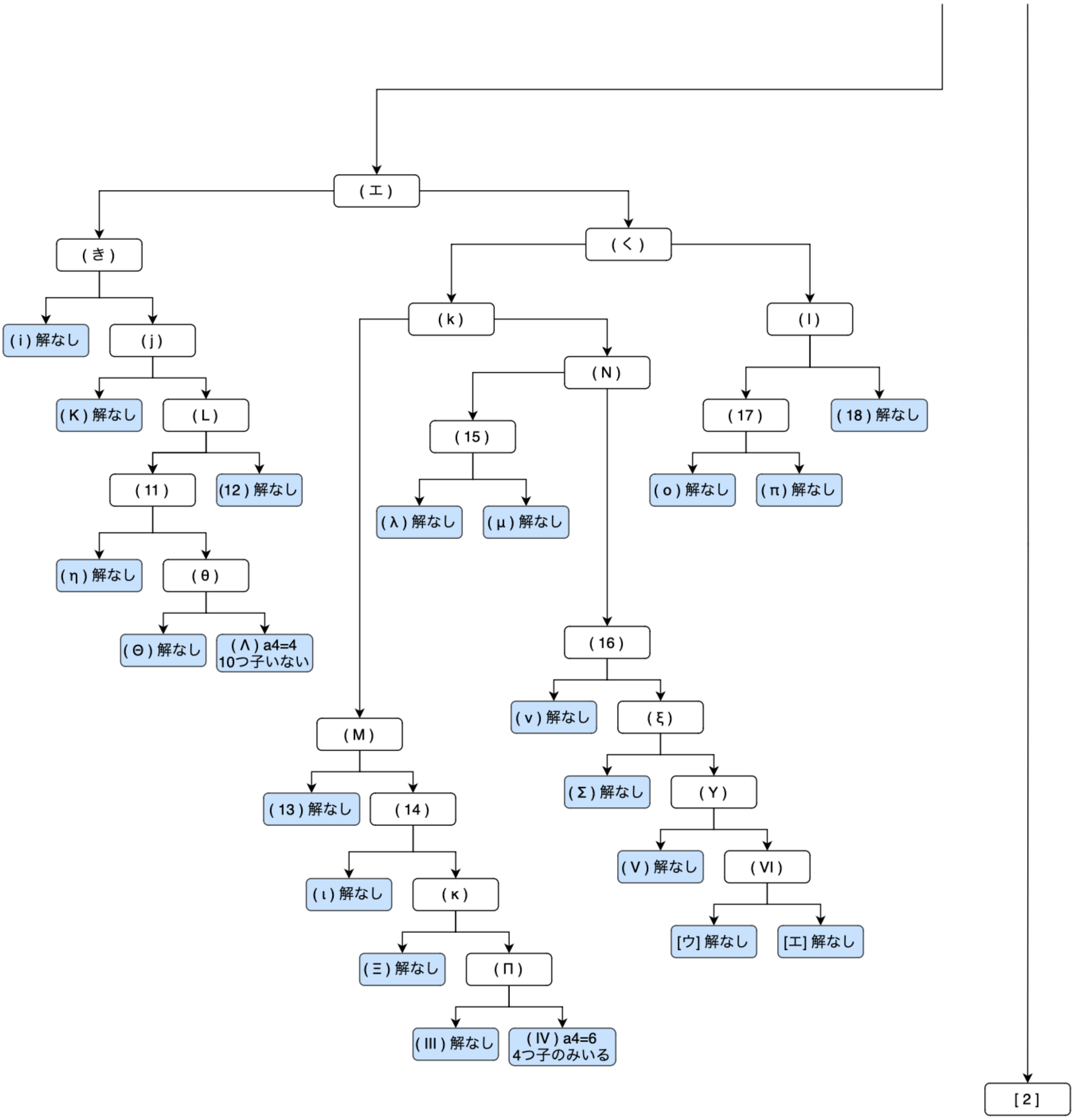
いずれの場合も「解なし」となったため、Level 4の8つ子は存在しない。

表：Level 5 の 10 つ子が存在しないことの分岐①



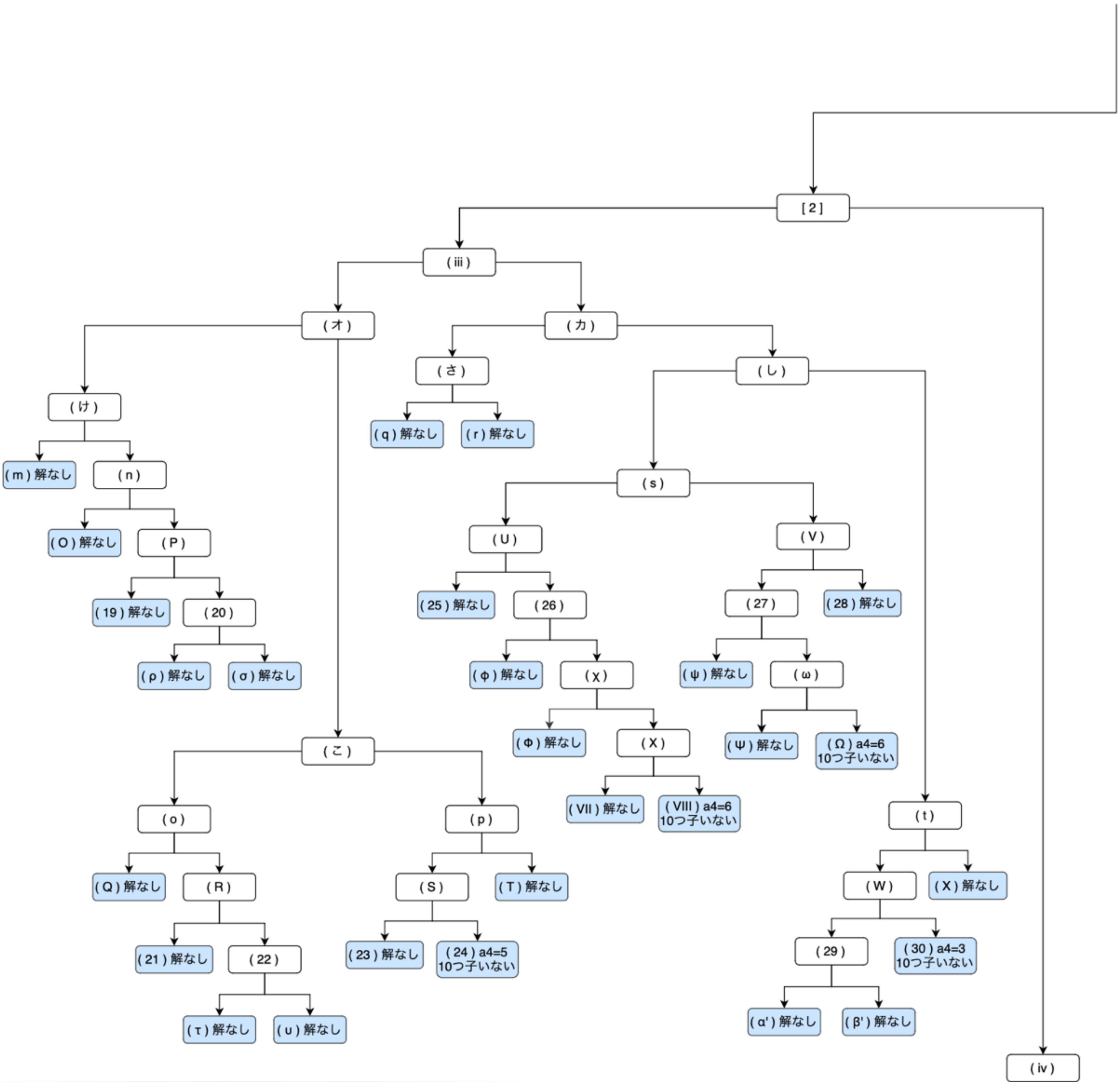
次のページへ続く。

表：Level 5 の 10 つ子が存在しないことの分岐②



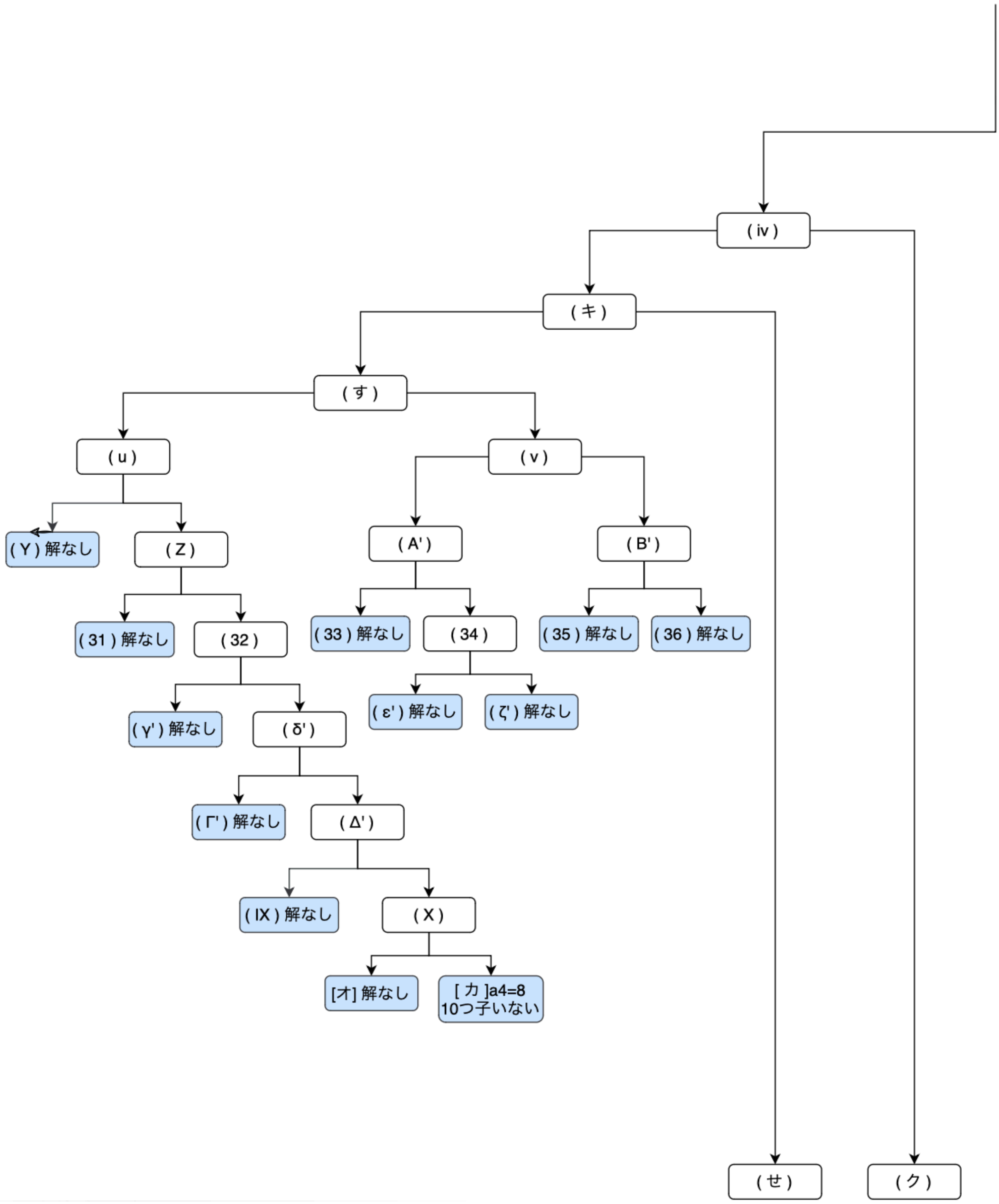
次のページへ続く。

表：Level 5 の 10 つ子が存在しないことの分岐③



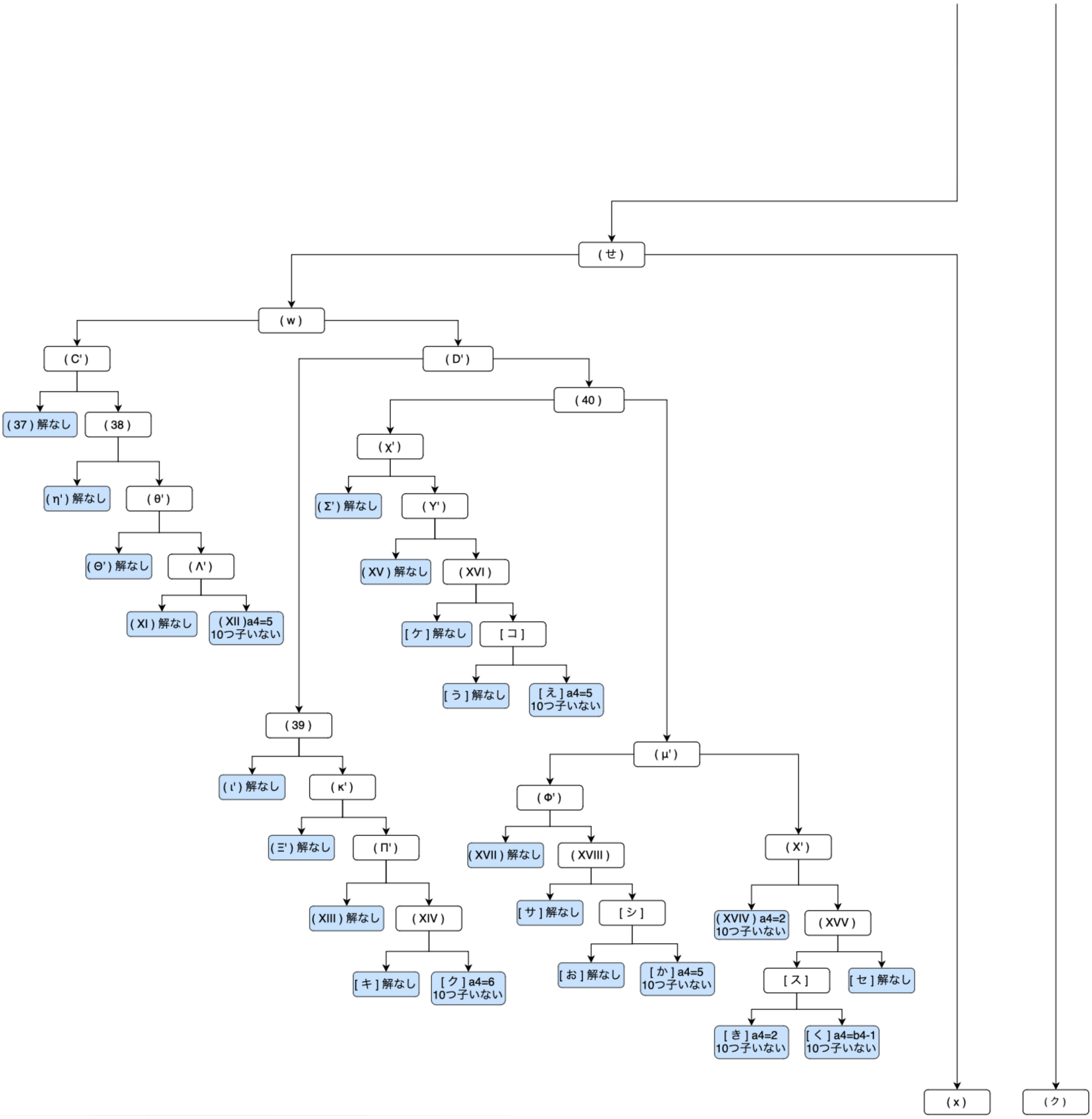
次のページへ続く。

表：Level 5 の 10 つ子が存在しないことの分岐④



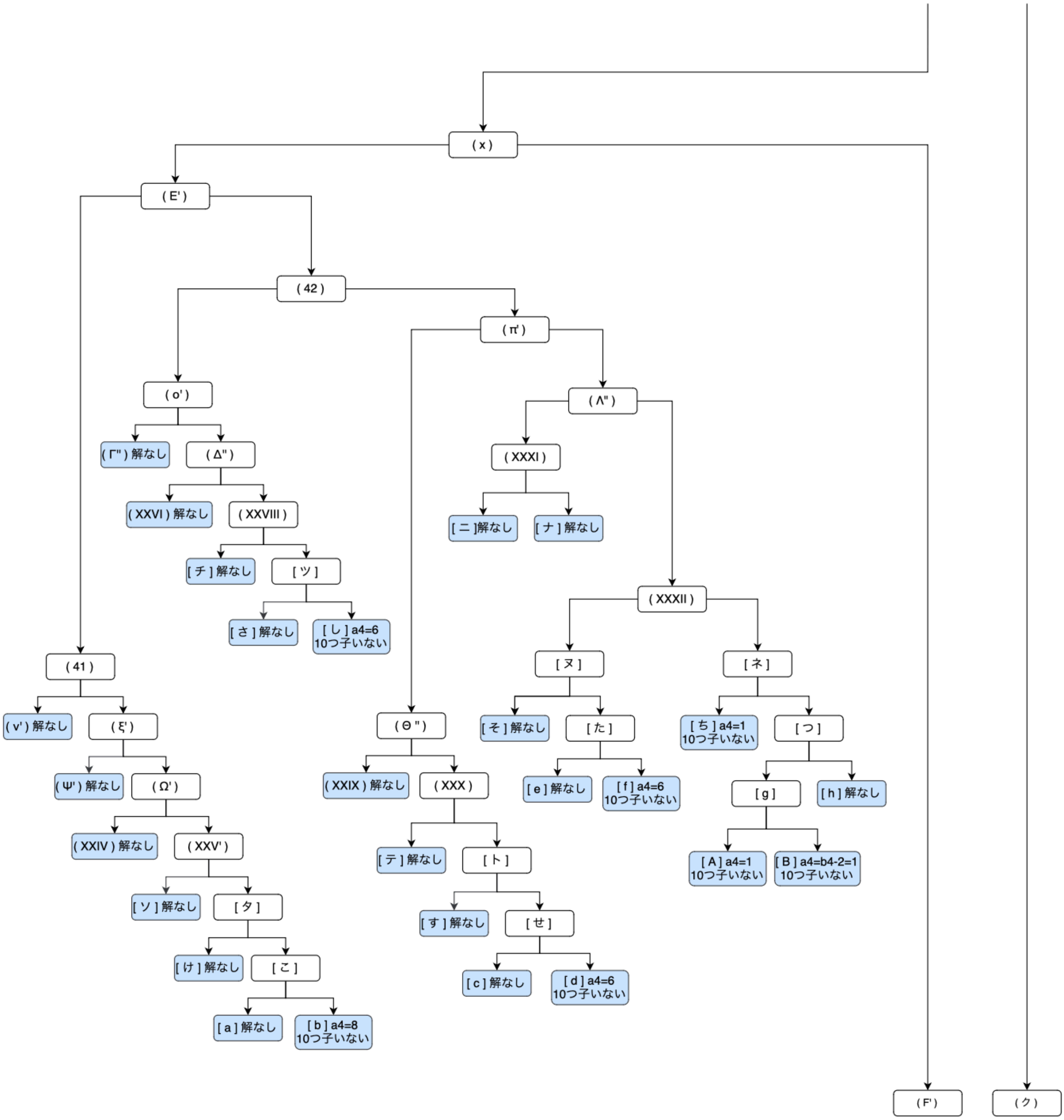
次のページへ続く。

表：Level 5 の 10 つ子が存在しないことの分岐⑤



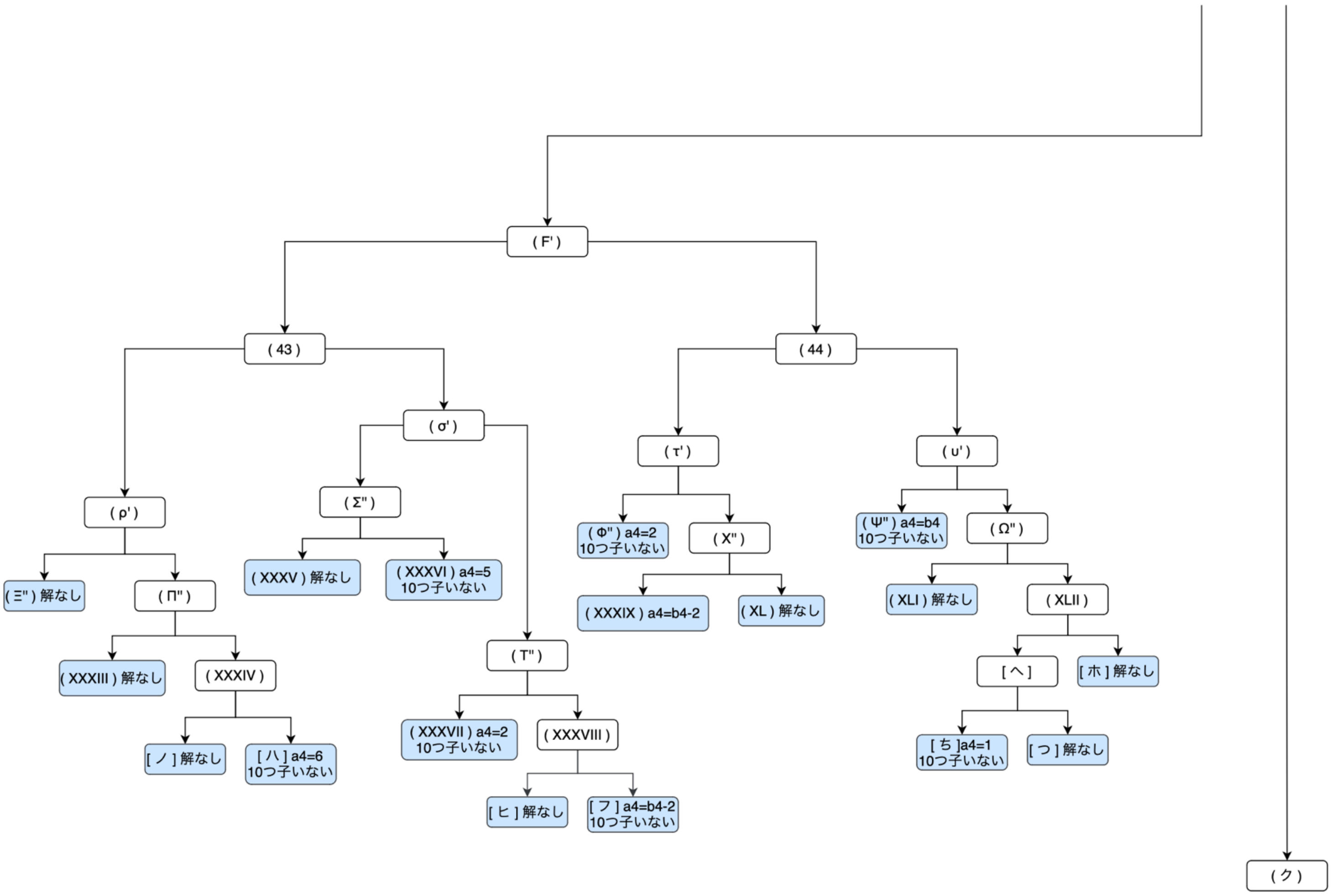
次のページへ続く。

表：Level 5 の 10 つ子が存在しないことの分岐⑥



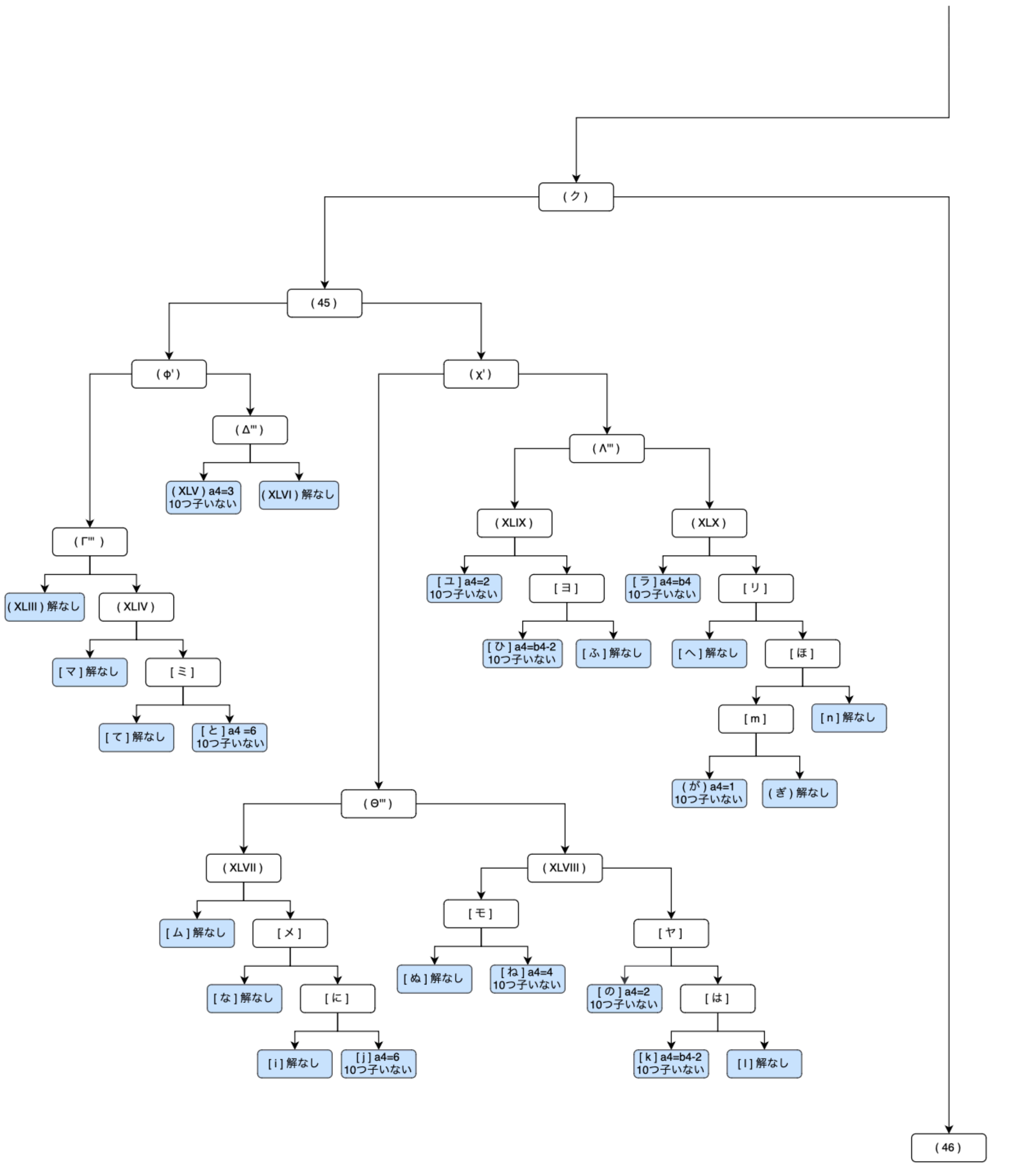
次のページへ続く。

表：Level 5 の 10 つ子が存在しないことの分岐⑦



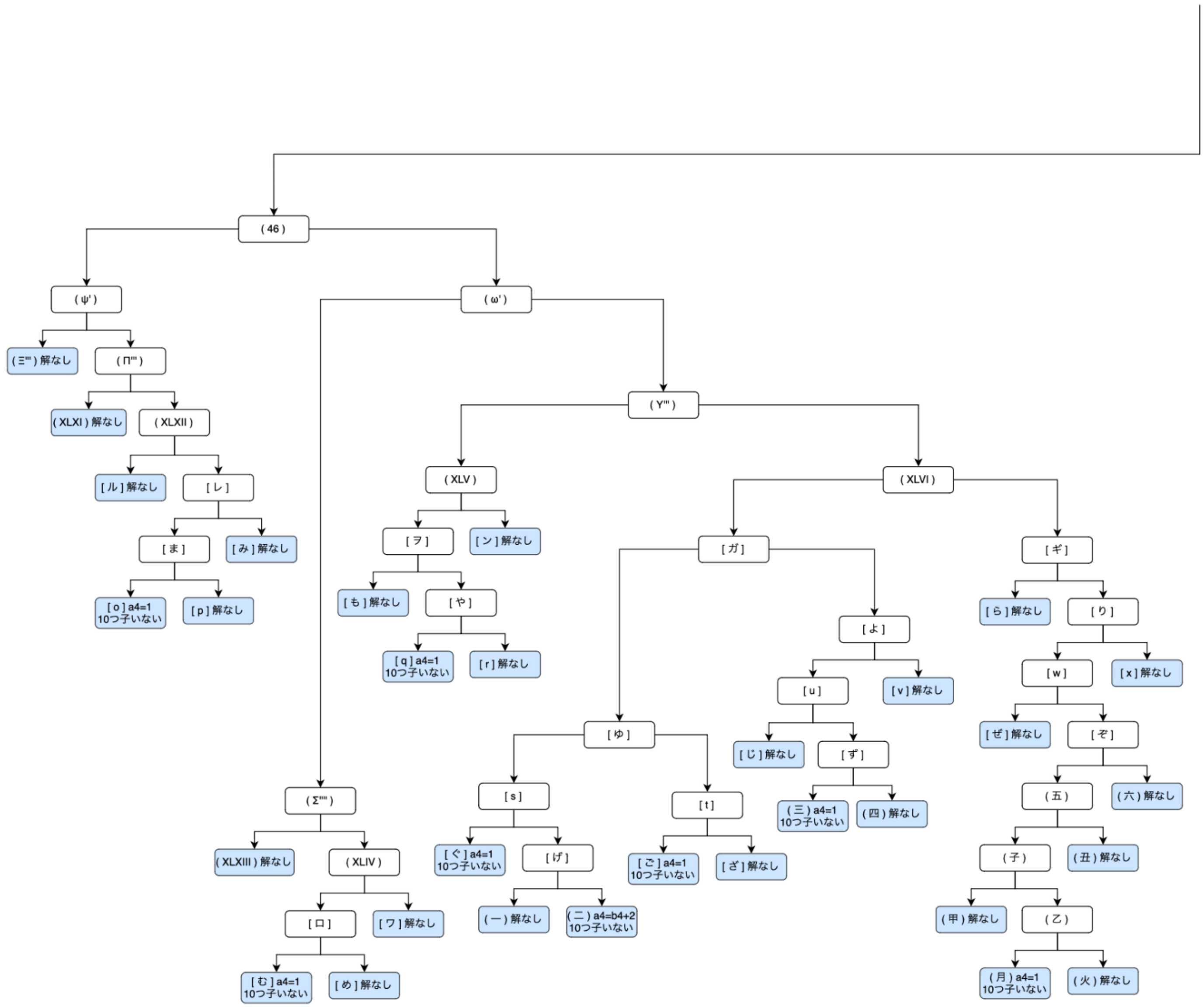
次のページへ続く。

表：Level 5 の 10 つ子が存在しないことの分岐⑧



次のページへ続く。

表：Level 5 の 10 つ子が存在しないことの分岐⑨



いずれの場合も「解なし」となったため、Level 5 の 10 つ子は存在しない。