目白祭研究発表 2024

立体ダイヤモンドゲーム

理学部数物情報科学科　３年

チーム名：秋桜

担当教員：林忠一郎　先生

目次

1．はじめに …　2

2．平面ダイヤモンドゲーム …　2

3．立体ダイヤモンドゲーム ～3 次元座標版～ …　5

4．立体ダイヤモンドゲーム ～4 次元座標版～ …　10

6．まとめ …　15

7．おわりに …　16

8． 参考文献 …　16

1. はじめに

私は、今回ダイヤモンドゲームについて研究を行いました。ダイヤモンドゲームは、ボードゲームのひとつで、正三角形のマス目上で駒を動かし、自分の駒を全て対角線上の陣地に移動させるゲームです。星形六角形のボードで、1～3 人で遊ぶことができます。今回はダイヤモンドゲームに数学的に座標を入れ、さらに立体化を行いました。中心部分を正六角形から正八面体にし、周辺の 6 つの三角形（星形の尖がった部分）を 8 つの正四面体にして立体化を行い、各マスは正四面体です。平面のダイヤモンドゲームは、座標を全て整数で表現できるようにするために、3 次元空間内で座標を考えました。また、立体ダイヤモンドゲームには 3 次元空間内と 4 次元空間内で成分が全て整数の座標を入れ、実際にゲームを行う場合のルールをその座標を用いて記述しました。なお、n+1 次元空間内で座標を考えてダイヤモンドゲームを n 次元化することも考えられます。

2. 平面ダイヤモンドゲーム

通常の平面上のダイヤモンドゲームは図 1 の黒い直線分たちと青い格子点たちで描かれたような形をしています。各格子点で 3 方向の直線分が交わり、駒は格子点上を移動します。1 マスは正三角形になっています。1 辺の長さが 1 のとき、それを底辺としたときの正三角形の高さは$\frac{\sqrt{3}}{2}$であり、そのため 2 次元平面内では格子点の座標を全て整数で表すことができないため、3 次元空間内で座標を考えます。ここでは紙面の都合等により、少し小さめのダイヤモンドゲームを考えますが、もっと大きくても同様に座標を入れられます。

まず、3 次元空間内の一辺の長さが 4 の立方体の切り口について考えます。8 つの頂点の座標は$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$(ただし、$a\,,b\,,c = 0 \text{ or } 4$)です。切り口は平面であり、直線$x = y = z$ ($\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$を通る直線)に垂直で中心$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$を通る平面での切り口は一辺 $2\sqrt{2}$ の正六角形になります。この六角形の各辺の外側に正三角形をくっつける事でダイヤモンドゲームの盤となる星形六角形を作ります。この範囲の 3 次元座標のすべての成分が整数の点はダイヤモンドゲームの格子点になります。各点の座標は図 3 のようになります。星形正六角形の頂点たちの半分ずつを頂点とする三角形と逆三角形の和集合を考えて、格子点は以下の条件☆をみたす座標の点全てです。

☆$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ただし$a+b+c=6$かつ『「$a \geq 0$かつ$b \geq 0$かつ$c \geq 0$」または「$a \leq 4$かつ$b \leq 4$かつ$c \leq 4$」』かつ$a\,,b\,,c$は整数

特に、星形の尖った先端の各頂点は

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$であり(図１)、中心の座標は$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$となります。（ここで中心が原点を通るように平行移動させることもできます。すると各頂点は

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}、\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}、\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}、\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}、\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}、\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となり、$x+y+z=0$の平面上に星形六角形を作ることもできます。）

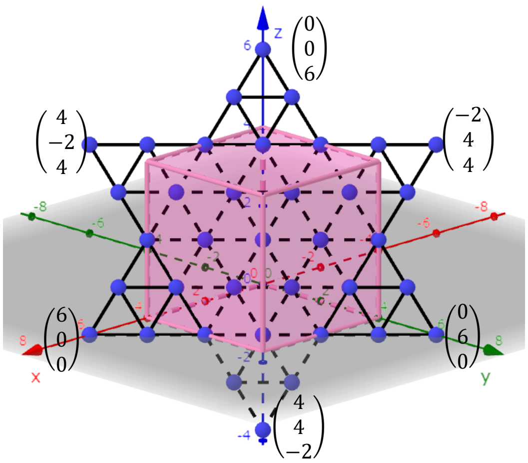

図１　ダイヤモンドゲーム

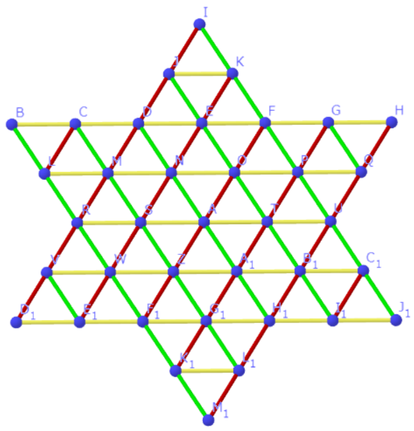

図２　ダイヤモンドゲーム方向

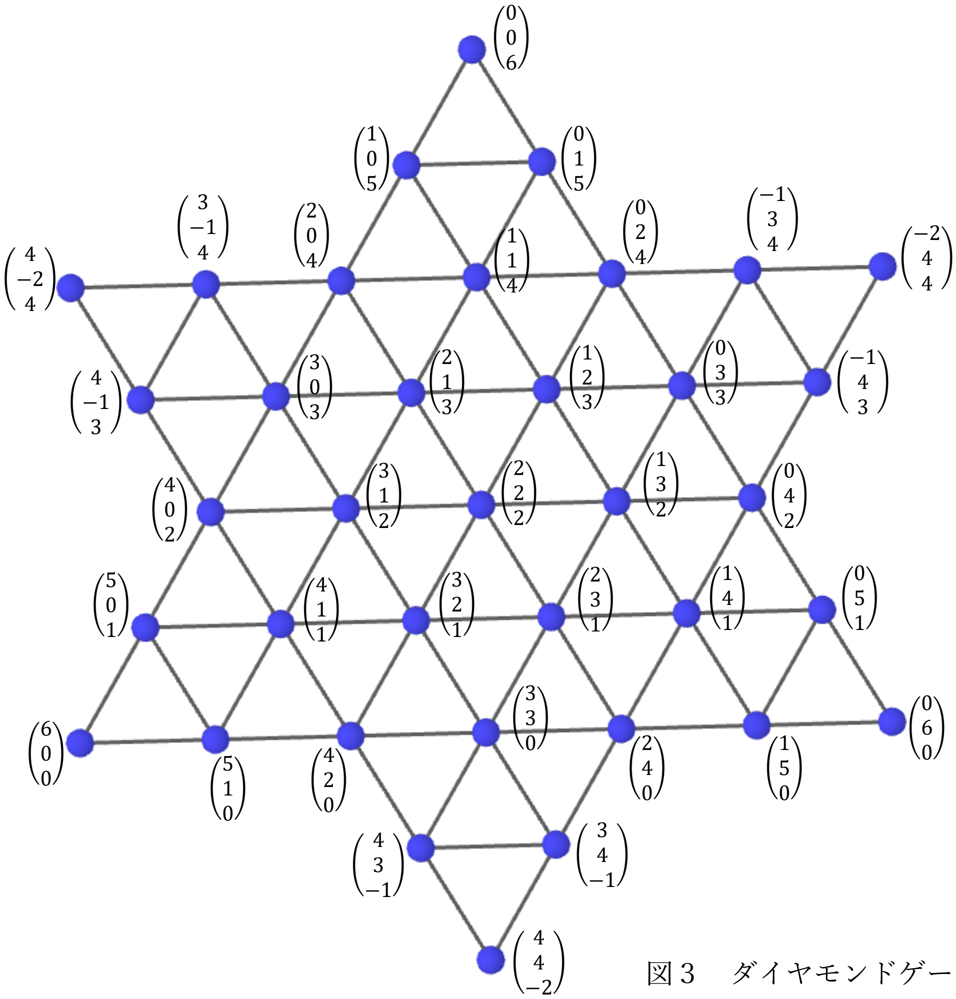

図３　ダイヤモンドゲーム座標

次に、このダイヤモンドゲームの基本ルールについて数式を使って考えていきます。3人でゲームをするとき、X , Y , Z さんと名付けると、X さんは$x < 0$の範囲の 3 つの格子点に駒を初期配置し、最終点に$x > 4$の範囲に駒が収まるように駒を動かします。Y さん、Z さんも同様です。この座標では駒は 1 回のジャンプもしくは隣の格子点への移動で 1 つの座標成分が一定となる直線上を移動することが分かります。

2 次元ダイヤモンドゲームは自分の駒の進める方向は 3 つあります(図 2)。ただし、上記の☆の条件の範囲内に限ります。

まず、隣の格子点への移動を説明します。

緑方向：x座標が一定でyz平面に平行な方向

この方向の隣の格子点へ駒を進めると、$x = 0\,, y = \pm 1\,, z = \mp 1$（複号同順）だけ座標が変化

赤方向：y座標が一定でzx平面に平行な方向

この方向の隣の格子点へ駒を進めると、$x = \pm 1\,, y = 0\,, z = \mp 1$（複号同順）

だけ座標が変化

黄方向：z座標が一定で、xy平面に平行な方向

この方向の隣の格子点へ駒を進めると、$x=\pm1, y=\mp1, z=0$（複号同順）

だけ座標が変化

ただし、移動先にすでに駒があるときはそこへは動かせません。ゲームを行う際、駒はこの３つの方向へ進むことができます。

また、駒を動かすとき、先にいる駒（自分の駒でも他の人の駒でもよい）を飛び越えることができます。例えば緑方向の場合、現在地から見て$x=0, y=\pm1, z=\mp1$ の位置に他の駒がいるとき、$x=0, y=\pm2, z=\mp2$ の位置に他の駒が無ければ一つ駒を飛び越えて$x=0, y=\pm2, z=\mp2$ に移動することができます。これはどの方向においても同じです。ただし、隣り合う２駒以上をまとめて飛び越えることはできません。一手でジャンプを２回以上続けて行う事もでき、ジャンプたちの方向は一定である必要はありません。

3. 立体ダイヤモンドゲーム ～3 次元座標版～

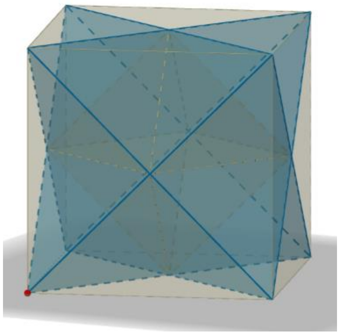

図４　立体ダイヤモンドゲーム

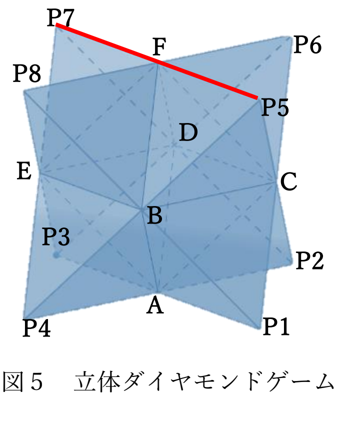

図５　立体ダイヤモンドゲーム

ここでは、立体ダイヤモンドゲームを３次元空間内でどのように表すことができるのかについて考えていきます。2 次元のダイヤモンドゲームの中心部分の正六角形を正八面体に変え、出っ張り部分の６つの正三角形を８つの正四面体に変更して完成する立体ダイヤモンドゲームの形は図４, ５のようになります。また、この図形の各頂点について図５のように記号を付けます。座標を入れるために、中心部の正八面体を立方体の内部に「正八面体の６つの頂点が立方体の６つの面の中心点に接する」ように配置します。正八面体の各面につく出っ張りの各四面体の頂点の１つは立方体の頂点と重なり、３次元空間内で座標を考えられます。この「星形正八面体」は立方体の内側に配置された四面体と「逆四面体」（図５では P1P3P6P8 と P2P4P5P7）の和集合と考えることもできます。四面体や逆四面体の各辺が、立方体の対角線と重なっています。また、立方体の中心を原点として、完成する図の中心が原点となるようにします。本来のダイヤモンドゲームの形に近い各プレイヤー駒数 10 の場合の座標を作成するために、x,y,zともに$-3\le x,y,z\le3$の範囲で立方体を作ります。すると、正四面体や逆四面体の辺（図５の赤い線分）の長さは$6\sqrt{2}$となります。

図５の各頂点の座標は次のようにします。（図６参照。赤が x 軸で手前向き、緑が y 軸

で右向き、青が z 軸で上向き）

$$P1=\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix},P2=\begin{pmatrix}-3\\3\\-3\end{pmatrix},P3=\begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix},P4=\begin{pmatrix}3\\-3\\-3\end{pmatrix},$$

$$P5=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix},P6=\begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix},P7=\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\end{pmatrix},P8=\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix},E=\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix},F=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$$

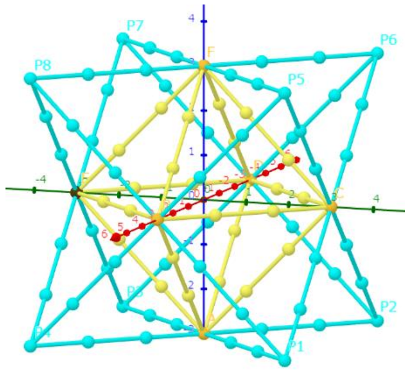

図 6　座標

このとき、中にある正八面体の頂点のうち B,C,D,E は xy 平面上の点となり、この星形正八面体内（表面も含む）の座標成分が 3 つとも整数の点は全て立体ダイヤモンドゲームの格子点とします。式で書くと、次の条件※をみたす点$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$全てです。

条件※

『「$a+b+c\leq 3$かつ$a-b-c\leq 3$かつ$-a+b-c\leq 3$かつ$-a-b+c\leq 3$」または「$-a-b-c\leq 3$かつ$-a+b+c\leq 3$かつ$a-b+c\leq 3$かつ$a+b-c\leq 3$」』かつa,b,cは整数

以下 2 頁弱にわたり、格子点の座標を詳しく観察します。その後で駒の動かし方を書きます。

正八面体や出っ張りの正四面体の各辺の長さは$3\sqrt{2}$です。辺上には辺を 3 等分する 2 つの点が必要となります。それらの点の座標を求めるために、すでに求められた頂点の座標の変化の仕方に着目します。例えば A,B について考えると、y 座標は同じで、x 座標は 0 から 3 へ、z 座標は-3 から 0 へ変化しています。線分 AB を考えるとこの直線は$y=0,x-z=3$であることが分かります。このことから線分 AB 上を 3 等分する 2 点は整数の座標で表せることができ、どの線分でも 1 つの成分が一定で残りの 2 つの成分で直線の式を求められるので、次のように線分を 3 等分する 2 点の座標を求めることができます(図 6)。

AB 上 $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$　AC 上 $\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$　AD 上 $\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}$　AE 上 $\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}$

BF 上 $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$　CF 上 $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$　DF 上 $\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$　EF 上 $\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$

BC 上 $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$　CD 上 $\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$　DE 上 $\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$　EB 上 $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$

P1A 上 $\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$　P2A 上 $\begin{pmatrix}-2\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$　P3A 上 $\begin{pmatrix}-2\\-2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix}$　P4A 上 $\begin{pmatrix}2\\-2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$

$$\text{P1B 上}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}\quad\text{P1C 上}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}\quad\text{P2C 上}\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix}\quad\text{P2D 上}\begin{pmatrix}-3\\2\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\text{P3D 上}\begin{pmatrix}-3\\-2\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\end{pmatrix}\quad\text{P3E 上}\begin{pmatrix}-2\\-3\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\end{pmatrix}\quad\text{P4E 上}\begin{pmatrix}2\\-3\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-3\\-1\end{pmatrix}\quad\text{P4B 上}\begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\text{P5F 上}\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\quad\text{P6F 上}\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}\quad\text{P7F 上}\begin{pmatrix}-2\\-2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}\quad\text{P8F 上}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$\text{P5B 上}\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\quad\text{P5C 上}\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\quad\text{P6C 上}\begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}\quad\text{P6D 上}\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\text{P7D 上}\begin{pmatrix}-3\\-2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}\quad\text{P7E 上}\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\end{pmatrix}\quad\text{P8E 上}\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}\quad\text{P8B 上}\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$$

さらに、1 マスが正三角形となることから、P を頂点とする各正四面体の各面には図 7 の赤い点のように中心に 1 点存在します。

$$\text{P1AB 上}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\quad\text{P1AC 上}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\quad\text{P1BC 上}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\text{P2AC 上}\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}\quad\text{P2AD 上}\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}\quad\text{P2CD 上}\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\text{P3AD 上}\begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix}\quad\text{P3AE 上}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}\quad\text{P3DE 上}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\text{P4AE 上}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}\quad\text{P4AB 上}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}\quad\text{P4EB 上}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\text{P5FB 上}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\quad\text{P5FC 上}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\quad\text{P5BC 上}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\text{P6FC 上}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}\quad\text{P6FD 上}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}\quad\text{P6CD 上}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\text{P7FD 上}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}\quad\text{P7FE 上}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}\quad\text{P7DE 上}\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\text{P8FE 上}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\quad\text{P8FB 上}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\quad\text{P8EB 上}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

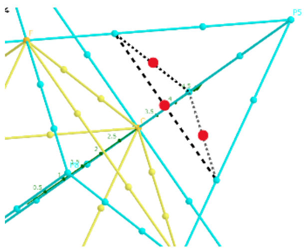

図 7　正四面体各面の中心点

さらに、正八面体の各面にも図 7 の赤い点のように中心点があり、以下のような座標になります。

$$\text{ABC 上}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\text{ACD 上}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix},\text{ADE 上}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\text{AEB 上}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\text{FBC 上}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\text{FCD 上}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\text{FDE 上}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\text{FEB 上}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

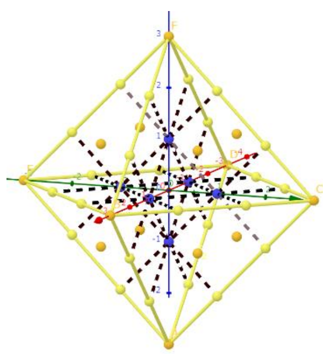

図 8　正八面体中点

最後に正八面体の内部の点の座標を求めていきます。図 8 のように正八面体の内部に辺と平行になるような線分を引いていくと、その交点

(青点)が求めたい点となります。つまり、正八面体の内部には 6 つの点があります。

$$\text{直線 AF 上}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad\text{直線 BD 上}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\quad\text{直線 CE 上}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

これで立体ダイヤモンドゲームの駒を置ける点の座標を全て求めることができました。

駒の動かし方

　次に駒を進められる方向について考えます。この形の立体ダイヤモンドゲームでは、xy 平面に平行な方向(図 9)、yz 平面に平行な方向(図 10)、zx 平面に平行な方向(図 11) で各 2 つずつ方向があるので、全部で 6 方向あります。

（この図で x 軸は左向き、 y 軸は手前向き、 z 軸は上向きです。点 P6 は P7 よりも手前にあります。都合により、この図は図 4,5 と比べて z 軸まわりに上から見て時計回りに 90° 回転されています。）

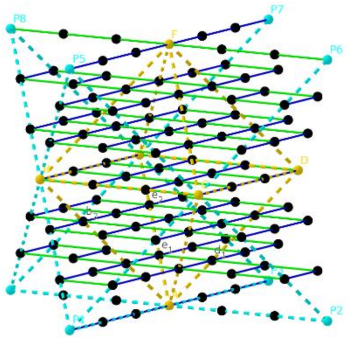

図 9　xy 平面に平行

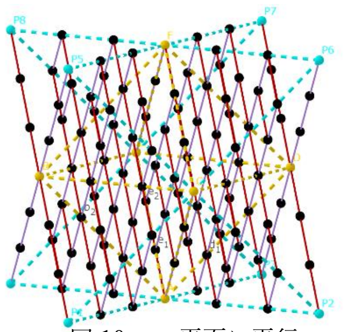

図 10　yz 平面に平行

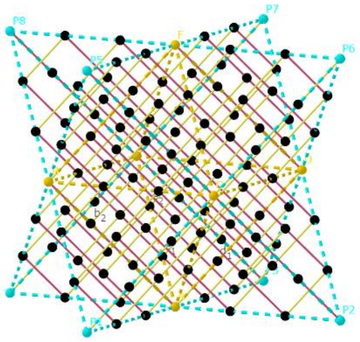

図 11　zx 平面に平行

隣の格子点への駒の動かし方は以下の 6 通りになります。

① 青方向：z 座標が一定　xy 平面に平行で傾きは 1
　1 マス進むと $x=\pm1, y=\pm1, z=0$（複号同順)動く

② 緑方向：z 座標が一定　xy 平面に平行で傾きは- 1
　1 マス進むと $x=\pm1, y=\mp1, z=0$（複号同順)動く

③ 紫方向：x 座標が一定　yz 平面に平行で傾きは 1
　1 マス進むと $x=0, y=\pm1, z=\pm1$（複号同順)動く

④ 赤方向：x 座標が一定　yz 平面に平行で傾きは- 1
　1 マス進むと $x=0, y=\pm1, z=\mp1$（複号同順)動く

⑤ ピンク方向：y 座標が一定　zx 平面に平行で傾きは 1
　1 マス進むと $x=\pm1, y=0, z=\pm1$（複号同順)動く

⑥ 黄方向：y 座標が一定　zx 平面に平行で傾きは- 1
　1 マス進むと $x=\pm1, y=0, z=\mp1$（複号同順)動く

以下の 2 つの条件を満たすと駒を飛び越えることができます。

（青方向の例）

１、現在地$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$に対して$\begin{pmatrix} a \pm 1 \\ b \pm 1 \\ c \end{pmatrix}$(複号同順)の位置に他の駒がある(自分の駒でも他の人の駒でもよい)

２、$\begin{pmatrix} a \pm 2 \\ b \pm 2 \\ c \end{pmatrix}$の位置が条件※をみたしていて、かつ他の駒が無い

この条件を満たすとき現在地にいる駒は、他の駒を飛び越えて、$\begin{pmatrix} a \pm 2 \\ b \pm 2 \\ c \end{pmatrix}$に移動させることができます。他の方向に対しても同様に駒を飛び越えることができます。ただし、2 個以上の並んだ駒をまとめていっぺんに飛び越えることはできませんが、ジャンプは２回以上続けて行う事もでき、その方向は一定である必要はありません。

次に、駒の初期位置についてです。平面ダイヤモンドゲームでは星形正六角形の対角線上に初期位置と目指す位置の二か所の陣地があり、中央の正六角形よりも出っ張った部分です。立体ダイヤモンドゲームでは星形正八面体の対角線上の四面体２つ 1 組が一人の陣地になり、正八面体よりも出っ張った部分です。

① P1 付近→P7 付近　初期位置$x + y - z > 3$にある駒を$x + y - z < -3$の位置に移動

② P3 付近→P5 付近　初期位置$x + y + z < -3$にある駒を$x + y + z > 3$の位置に移動

③ P6 付近→P4 付近　初期位置$x - y - z < -3$にある駒を$x - y - z > 3$の位置に移動

④ P8 付近→P2 付近　初期位置$x - y + z > 3$にある駒を$x - y + z < -3$の位置に移動

以上のように、立体ダイヤモンドゲームでは、この初期位置から、対角線上の陣地に駒を 6 つの方向を使って移動させ、いかに早く陣地にすべての駒を移動できるかを競います。

4. 立体ダイヤモンドゲーム ～4次元座標版～

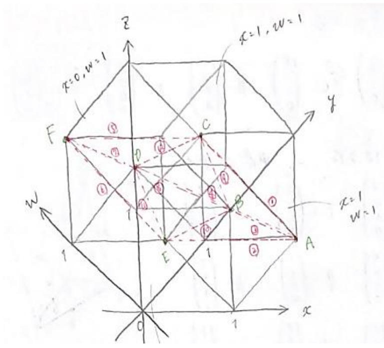

図 12　4 次元立方体

ここでは3次元空間で作成した立体ダイヤモンドゲームを基にn次元化を可能にするための準備として、4次元空間で立体ダイヤモンドゲームの座標を考えます。各プレイヤーの駒数が4の場合と 10 の場合を調べます。前者は星形正八面体の中心点が格子点になりますが、後者は格子点になりません。

まず、4次元空間での立体ダイヤモンドゲームの形を把握するために小さいサイズの場合として各プレイヤーの駒数が4の場合を考えます。

まずは4次元空間の4次元立方体[0,1]×[0,1] ×[0,1] ×[0,1]を考えます(図 12)。紙上で 4 次元を表すため一見立方体には見えにくいですが、この図は一辺の長さを1とした4次元立方体の図です。これの3次元超平面$x+y+z+w=2$による切り口として正八面体を図示します。赤線が辺となり、これらの辺は座標の 4 成分のうち 2 つを一定の値とする2次元平面上にあり、4次元立方体の1つの2次元の面の対角線となっています。そのことから、この正八面体の各頂点の座標を求めます。図のように各頂点をA~Fと置くと(記号は3次元立体ダイヤモンドゲームと対応)、

$$A=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},E=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},F=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

となります。(便宜上3次元の図形をイメージとして利用します。)

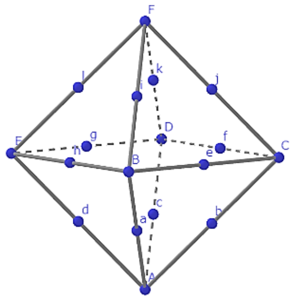

図 13　正八面体(イメージ)

立体ダイヤモンドゲームの形はこの正八面体の各面に正四面体を付けた形です。今回は駒数4つまり、正八面体・正四面体の一辺に3つずつ格子点がある大きさにします。そのためにまず正八面体の座標を2倍します。

$$A=\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\2\end{pmatrix},E=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\end{pmatrix},F=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\end{pmatrix}$$

結論から言うと、立体ダイヤモンドゲームの格子点は以下の条件◎をみたす座標の点全てです。

条件◎

$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ただし、$a+b+c+d=4$

『「$a\geq 0$かつ$b\geq 0$かつ$c\geq 0$かつ$d\geq 0$」または「$a\leq 2$かつ$b\leq 2$かつ$c\leq 2$かつ$d\leq 2$」』

かつa , b , c , dは整数
構成方法を詳しく述べます。
各辺の中点の座標を作ります(図 13)。

$$\text{AB の中点 } a=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\text{AC の中点 b}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix},\text{AD の中点 } c=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\text{AE の中点 } d=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\text{BC の中点 } e=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix},\text{CD の中点 } f=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix},\text{DE の中点 } g=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\text{EB の中点 } h=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\text{BF の中点 } i=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\text{BF の中点 } j=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix},\text{BF の中点 } k=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix},\text{BF の中点 } l=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$$

次に、正四面体上の点の座標について考えていきます。完成した立体ダイヤモンドゲームの形は図 5 のような形です。この図より、正八面体の各辺に付く正四面体の側面が隣の正八面体の面と同一平面上であり、大きい正三角形の形を作れることが分かります(図 14)。このことから正八面体の各面に対応する大きい正三角形上の座標について A~F の座標から考えます。

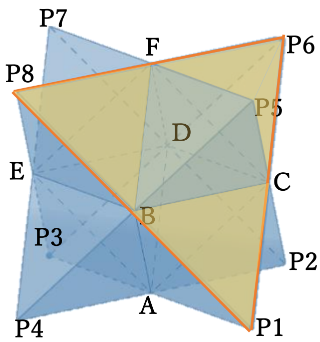

図 14 立体ダイヤモンドゲーム

面 ABC：$w=0\,,x+y+z=4$
面 ACD：$y=2\,,x+z+w=2$
面 ADE：$z=0\,,x+y+w=4$
面 AEB：$x=2\,,y+z+w=2$
面 FBC：$z=2\,,x+y+w=2$
面 FCD：$x=0\,,y+z+w=4$
面 FDE：$w=2\,,x+y+z=2$
面 FEB：$y=0\,,x+z+w=4$
さらに、方向ごとの座標の変化に着目します。
A→B , D→F 方向：$x,w=$一定、$y=-1\,,z=+1$
A→C , E→F 方向：$y,w=$一定、$x=-1\,,z=+1$
A→D , B→F 方向：$y,z=$一定、$x=-1\,,w=+1$
A→E , C→F 方向：$x,z=$一定、$y=-1\,,w=+1$
B→C , E→D 方向：$z,w=$一定、$x=-1\,,y=+1$
C→D , B→E 方向：$x,y=$一定、$z=-1\,,w=+1$
よって、このときすべての「駒を置ける格子点の座標」は成分が全て整数の 4 次元座標で表現できることが分かります。さらに、四面体の頂点の座標は

$$P1=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\-2\end{pmatrix},P2=\begin{pmatrix}0\\4\\0\\0\end{pmatrix},P3=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\2\end{pmatrix},P4=\begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\end{pmatrix},P5=\begin{pmatrix}0\\0\\4\\0\end{pmatrix},P6=\begin{pmatrix}-2\\2\\2\\2\end{pmatrix},P7=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\end{pmatrix},P8=\begin{pmatrix}2\\-2\\2\\2\end{pmatrix}$$

となります。

次に正八面体の内部について考えます。正八面体の向かい合う面は同じ 1 つの成分が一定となる面です。そのことから各成分が一定値である面を考えると面 ABC は $w=0$ の面、それと向かいあう面 FDE は $w=2$ の面、面 ACD は $y=2$ の面、向かい合う面 FEB は $y=0$ の面、面 ADE は $z=0$ の面、向かい合う面 FBC は $z=2$ の面、面 AEB は $x=2$ の面、向かい合う面 FCD は $x=0$ の面であることから、正八面体の内部には$x=1$の面、$y=1$の面、$z=1$の面、$w=1$の面が交わることが分かり、内部には$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$という格子点があると分かります。

ここで、これまで考えてきた駒数 4 の場合から拡張させ、通常の平面ダイヤモンドゲームに近い初期駒数 10 の場合の座標について同様の方法で考えていきます。4 次元立方体を基にした正八面体の座標を 3 倍します。

$$A=\begin{pmatrix}3\\3\\0\\0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}3\\0\\3\\0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}0\\3\\3\\0\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}0\\3\\0\\3\end{pmatrix},E=\begin{pmatrix}3\\0\\0\\3\end{pmatrix},F=\begin{pmatrix}0\\0\\3\\3\end{pmatrix}$$

ことのき、格子点は 3 次元超平面$x+y+z+w=6$上にあり「$x\geq 0$かつ$y\geq 0$かつ$z\geq 0$かつ$w\geq 0$」または「$x\leq 3$かつ$y\leq 3$かつ$z\leq 3$かつ$w\leq 3$」をみたす座標成分が全て整数となるような点$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$の全てとなります。特に、立方体や正八面体の中心点$\begin{pmatrix}3/2\\3/2\\3/2\\3/2\end{pmatrix}$はこの立体ダイヤモンドゲームの格子点になっていないことに注意しましょう。以下、各格子点の座標について述べます。

正八面体の各辺上には 4 つ駒を置くことができるので、各辺に長さを 3 等分にするような 2 点の座標を付け足していきます。

$$\text{AB 上 } b_1=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}3\\1\\2\\0\end{pmatrix}\text{、BF 上 } b_3=\begin{pmatrix}2\\0\\3\\1\end{pmatrix},b_4=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\2\end{pmatrix}$$

$$\text{AC 上 } c_1=\begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix},c_2=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\0\end{pmatrix}\text{、CF 上 } c_3=\begin{pmatrix}0\\2\\3\\1\end{pmatrix},c_4=\begin{pmatrix}0\\1\\3\\2\end{pmatrix}$$

$$\text{AD 上 } d_1=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\1\end{pmatrix}, d_2=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\2\end{pmatrix}\text{、DF 上 } d_3=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\3\end{pmatrix}, d_4=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\text{AE 上 } e_1=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}3\\1\\0\\2\end{pmatrix}\text{、EF 上 } e_3=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\3\end{pmatrix}, e_4=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\text{BC 上 } g=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\0\end{pmatrix}, h=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}\text{、CD 上 } i=\begin{pmatrix}0\\3\\2\\1\end{pmatrix}, j=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\text{DE 上 } k=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\3\end{pmatrix}, l=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\3\end{pmatrix}\text{EB 上 } m=\begin{pmatrix}3\\0\\1\\2\end{pmatrix}, n=\begin{pmatrix}3\\0\\2\\1\end{pmatrix}$$

先ほどと同様にして、次に正八面体につく四面体の表面部分の座標を求めていきます。
面 ABC：$w=0\,, x+y+z=6$
面 ACD：$y=3\,, x+z+w=3$
面 ADE：$z=0\,, x+y+w=6$
面 AEB：$x=3\,, y+z+w=3$
面 FBC：$z=3\,, x+y+w=3$
面 FCD：$x=0\,, y+z+w=6$
面 FDE：$w=3\,, x+y+z=3$
面 FEB：$y=0\,, x+z+w=6$
方向ごとの座標の変化は先ほどと同様なので、このときすべての駒を置ける点の座標は整数の 4 次元座標で表現できることが分かります。各四面体の頂点の座標は次のようになります。

$$P1=\begin{pmatrix}3\\3\\3\\-3\end{pmatrix}, P2=\begin{pmatrix}0\\6\\0\\0\end{pmatrix}, P3=\begin{pmatrix}3\\3\\-3\\3\end{pmatrix}, P4=\begin{pmatrix}6\\0\\0\\0\end{pmatrix}, P5=\begin{pmatrix}0\\0\\6\\0\end{pmatrix}, P6=\begin{pmatrix}-3\\3\\3\\3\end{pmatrix}, P7=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\6\end{pmatrix}, P8=\begin{pmatrix}3\\-3\\3\\3\end{pmatrix}$$

次に正八面体の内部について考えます。正八面体の向かい合う面は同じ 1 つの成分が一定となる面です。そのことから各成分が一定値である面を考えると面 ABC は $w=0$ の面、それと向かいあう面 FDE は $w=3$ の面、面 ACD は $y=3$ の面、向かい合う面 FEB は $y=0$ の面、面 ADE は $z=0$ の面、向かい合う面 FBC は $z=3$ の面、面 AEB は $x=3$ の面、向かい合う面 FCD は $x=0$ の面です。このことから、正八面体の内部には$x=1\,,2$の面、$y=1\,,2$の面、$z=1\,,2$の面、$w=1\,,2$の面があることが分かり、それらの面上の点を求めると、$\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\2\\1\end{pmatrix}$ の 6 点が内

部の点だと分かります。これで 4 次元空間上のダイヤモンドゲームのすべての点の座標を求めることができ、すべての点の成分が整数であることが分かりました。これらの座標の値を基に、立体ダイヤモンドゲーム全体の範囲を考えます。3 次元のときと同様に星形正八面体全体を 2 つの正四面体の和集合としてそれぞれの座標の特徴から範囲を数式化していきます。

四面体 P2P4P5P7 , P1P3P6P8 はどちらも 3 次元超平面$x+y+z+w=6$上にあり・・・(%)、このとき、各成分の値の範囲で次のように二つの四面体を表すことができます。

四面体 P2P4P5P7：「$x \geq 0$かつ$y \geq 0$かつ$z \geq 0$かつ$w \geq 0$」・・・(#)

四面体 P1P3P6P8：「$x \leq 3$かつ$y \leq 3$かつ$z \leq 3$かつ$w \leq 3$」・・・($)

どちらかの 4 面体に属すればよいので(#)または($)

さらに、格子点の座標成分は全て整数・・・(&)

よって、格子点は以下の(¥)をみたす点$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$の全てとなります。

(¥)　(%)かつ「(#)または($)」かつ(&)

最後に駒を動かす方向とルールについて定めます。以下の駒の移動は全て条件(¥)の範囲内で行われます。駒の動かし方は方向が 6 つあり、以下の通りです。

辺 AB 方向：1 マス進むと$x, w = 0$、$y = \pm 1$, $z = \mp 1$（複号同順)動く

辺 AC 方向：1 マス進むと$y, w = 0$、$x = \pm 1$, $z = \mp 1$（複号同順)動く

辺 AD 方向：1 マス進むと$y, z = 0$、$x = \pm 1$, $w = \mp 1$（複号同順)動く

辺 AE 方向：1 マス進むと$x, z = 0$、$y = \pm 1$, $w = \mp 1$（複号同順)動く

辺 BC 方向：1 マス進むと$z, w = 0$、$x = \pm 1$, $y = \mp 1$（複号同順)動く

辺 CD 方向：1 マス進むと$x, y = 0$、$z = \pm 1$, $w = \mp 1$（複号同順)動く

駒を進めるとき、以下の 2 つの条件を満たすと駒を飛び越えることができます。(辺 AB 方向の例)

１、現在地$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$に対して$\begin{pmatrix} a \\ b \pm 1 \\ c \mp 1 \\ d \end{pmatrix}$(複号同順)の位置に他の駒がある(自分の駒でも他の人の駒でもよい)

２、$\begin{pmatrix} a \\ b \pm 2 \\ c \mp 2 \\ d \end{pmatrix}$の位置に他の駒が無い

この条件を満たすとき現在地にいる駒は、他の駒を飛び越えて、$\begin{pmatrix} a \\ b \pm 2 \\ c \mp 2 \\ d \end{pmatrix}$に移動させることができます。他の方向に対しても同様に駒を飛び越えることができます。ただし、

2 個以上の並んだ駒をまとめて飛び越えることはできませんが、ジャンプは 2 回以上続けて行うこともでき、その方向は一定である必要はありません。
次に、駒の初期位置についてです。平面ダイヤモンドゲームでは星形六角形の対角線上に初期位置と目指す位置の二か所の陣地があります。立体ダイヤモンドゲームでは星形正八面体の対角線上の四面体 2 つ 1 組が一人の陣地になります。
⑤　P1 付近→P7 付近　初期位置$w < 0$にある駒を$w > 3$の位置に移動
⑥　P3 付近→P5 付近　初期位置$z < 0$にある駒を$z > 3$の位置に移動
⑦　P6 付近→P4 付近　初期位置$x < 0$にある駒を$x > 3$の位置に移動
⑧　P8 付近→P2 付近　初期位置$y < 0$にある駒を$y > 3$の位置に移動
以上のように、立体ダイヤモンドゲームでは、この初期位置から、対角線上の陣地に駒を 6 つの方向を使って移動させ、いかに早く陣地にすべての駒を移動できるかを競います。

5. まとめ

今回の研究では、ボードゲームであるダイヤモンドゲームを数学的に捉え、座標をもちいて駒の動きなどを観察しました。さらに、拡張して 3 次元空間・4 次元空間での立体ダイヤモンドゲームについても考えました。平面上で行われるダイヤモンドゲームは 1 マスが正三角形であるため、3 次元空間を利用して座標の設定を行いました。格子点は次の条件☆をみたす座標の点全てで、駒を動かす方向や基本ルールについても数式で表現することができました。
☆$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ただし$a + b + c = 6$かつ『「$a \geq 0$かつ$b \geq 0$かつ$c \geq 0$」または「$a \leq 4$かつ$b \leq 4$かつ$c \leq 4$」』かつ$a, b, c$は整数
ここから、立体化し 3 次元空間内と 4 次元空間内それぞれについて格子点の座標や基本ルールについて考えました。星形正八面体を立体ダイヤモンドゲームの全体像とし、3 次元空間内での格子点は次の条件※をみたす点$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$全てです。
※『「$a + b + c \leq 3$かつ$a - b - c \leq 3$かつ$-a + b - c \leq 3$かつ$-a - b + c \leq 3$」または「$-a - b - c \leq 3$かつ$-a + b + c \leq 3$かつ$a - b + c \leq 3$かつ$a + b - c \leq 3$」』かつa, b, cは整数
さらに、ダイヤモンドゲームを n 次元化することを考え、n+1 次元空間内つまり 4 次元空間内での座標についても考えました。4 次元の立体構造を実際に図示することは難しいため 3 次元空間内での星形正八面体を利用して格子点の座標の観察や駒の動かし

方の観察を行いました。4次元空間内での格子点は以下の条件◎をみたす座標の点$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$全てです。

◎$a+b+c+d=4$かつ『「$a \geq 0$かつ$b \geq 0$かつ$c \geq 0$かつ$d \geq 0$」または「$a \leq 2$かつ$b \leq 2$かつ$c \leq 2$かつ$d \leq 2$」』かつa, b, c, dは整数

このようにそれぞれの場合について、格子点の座標範囲を考えることができました。さらに座標の変化の仕方から駒を動かす方向、駒のジャンプなどの基本ルールについても数式を用いて考察することができました。

今回の研究ではダイヤモンドゲームとその拡張版の立体ダイヤモンドゲームについて数学的な観察を行いました。これらの研究内容からプログラムを作成しパソコン上で実際にゲームを行う事も考えられます。

6. おわりに

今回この研究をしてみて、身近にあるゲームを数学的に捉えると面白い面が多くあることが分かりました。ダイヤモンドゲームはオセロや将棋などと違い 1 つのマスが正三角形で六角形をベースとした星形六角形の形をしています。そのため数式で表現するために次元上げを行い 3 次元空間内の一つの平面として捉えることで格子点全ての座標成分を整数で表すことができました。それにより、駒の動かし方や基本操作方法に関する観察が行いやすくなりました。さらに星形正八面として立体化を行いました。3次元での観察では GeoGebra を活用して実際に図形を作成しながら座標の考察等を行い、実際に目で見ながらその特徴を観察することができました。4次元では実際に図示することが難しいため格子点の座標や駒を動かす方向等について考えるのが大変でした。実際の実験は4次元から行いましたが、途中から3次元の観察を先に行い、完成する立体ダイヤモンドゲームの全体像を理解してから、もう一度4次元での表現方法を考えました。実際には、完成した座標とルールをパソコン上でプログラムし、実際にゲームを行える段階までやりたかったのですが、今回は時間の都合もあり、数式化できることまで研究を行いました。また機会があれば、実際にプログラムを作って立体ダイヤモンドゲームで遊べるようにしたいと思いました。

最後まで読んでいただきありがとうございました。

7. 参考文献

荒木一郎、驚くほど”脳力”がアップする!! ダイヤモンド・ゲーム、日本文芸社、2007