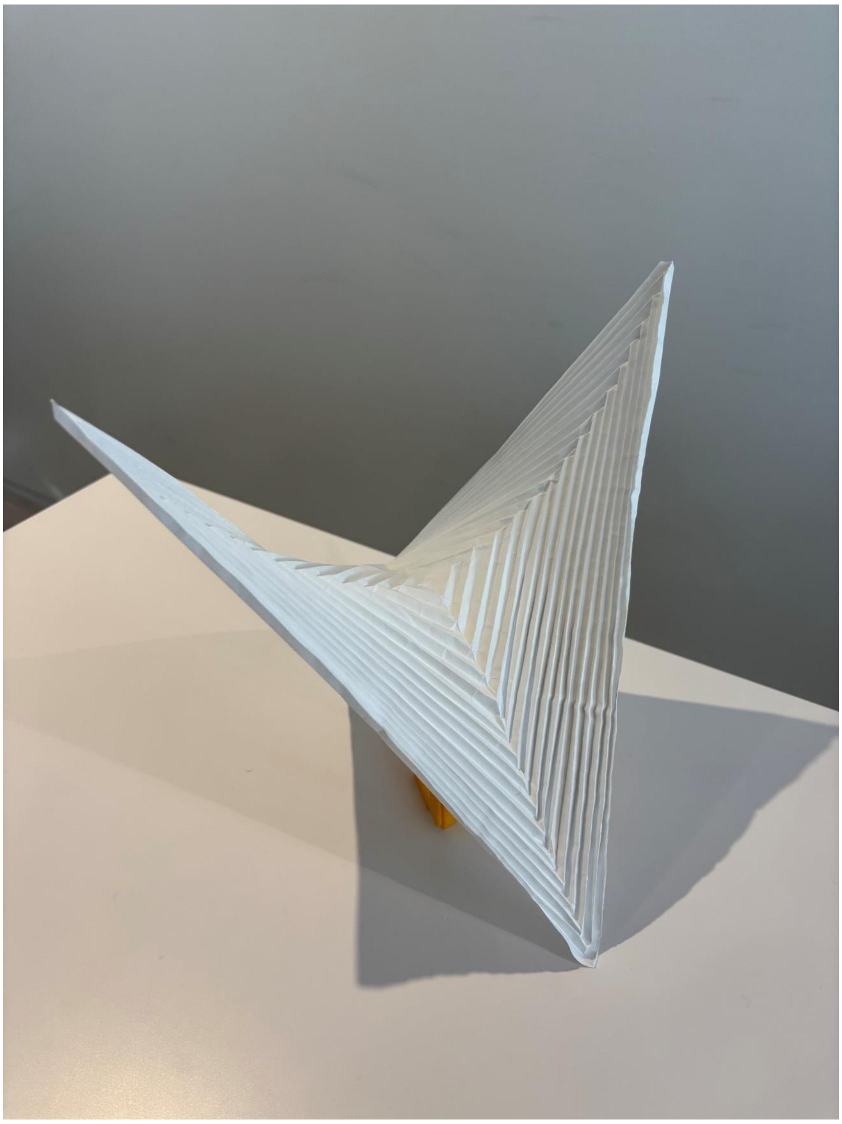


関数を持ち運ぼう

グループ名：M.I

アドバイザー:
藤田 玄先生
賈 伊陽先生

目次

１．はじめに

折り紙は古来より伝わる日本の伝統的な文化のひとつである。神事や礼法、芸術などさまざまな場面で親しまれてきた文化であるが、近年は数学の研究分野のひとつとしても挙げられるようになった。折り紙を幾何学な視点から研究し、工学などの分野で利用することもある。例えば、宇宙ヨットの太陽光パネルを折りたたみ、宇宙空間で展開する際に利用された「ミウラ折り」などが一例として挙げられる。

また、このように日常生活で折り方を利用するだけでなく、折り紙を平坦に折ることができるか判別するといった「平坦折り」についての研究も行われている。先ほど取り上げた「ミウラ折り」も平坦折りの一種であり、私たちが普段目にする折り紙は平坦折りできるものも多い。平坦折りについての定理も存在し、折り紙は数学的にみても興味深い研究分野のひとつなのである。

私は折り紙と数学の関係について調べていく中で『格子からみる数学』という書籍に出会い、そこに記載されていた「関数を近似する曲面を折り紙で折る方法」について興味を持った。実際に自分で折り紙を折ってみて、平らな一枚の紙を折るだけで曲面が作れるという点や、その曲面が関数を近似しているという点に驚いた。さらに、折った曲面を関数のグラフと比較し、曲面が関数を近似していることを確認した。

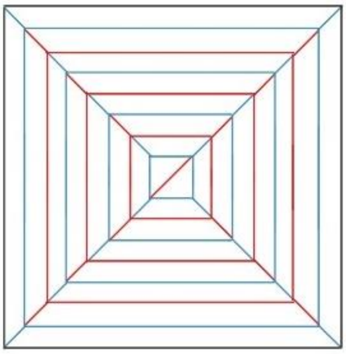
また、折った曲面を持ち運ぶために小さく折り畳む方法を模索していくうちに、いくつかの曲面は平坦に折り畳むことができることに気がついた。これらが数学的に平坦折り可能であることを示すため、平坦折りに関するいくつかの定理を用いて証明を行った。

２．曲面の折り方

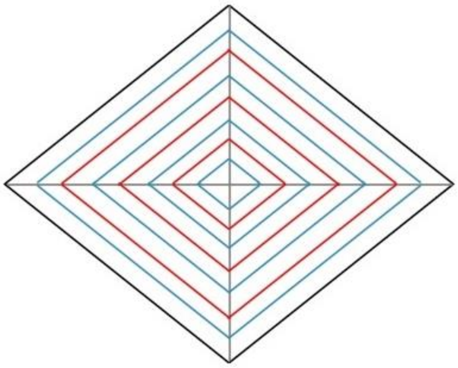
今回、正方形、ひし形、長方形、六角形、八角形、の５種類の紙を使用して、いくつかの曲面を制作した。これらの折り方について説明する。

まず、以下にそれぞれの展開図を示した。赤線は山折り、青線は谷折りを示している。

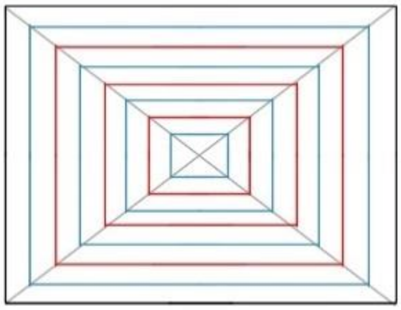
《正方形》



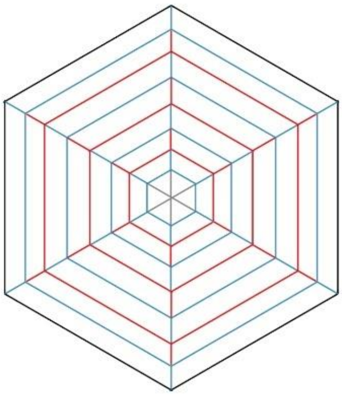
《ひし形》



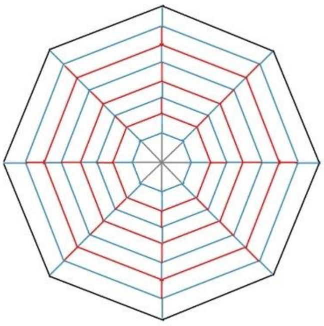
《長方形》



《六角形》



《八角形》



次に折り方について説明する。例として正方形の紙を用いた場合の折り方を示す。

①　正方形の対角線を折り、正方形の中心(対角線の交点)に印をつける。

②中心の点から各辺に垂線を下ろすように線を引く。このとき、線は両面に引くことに注意する。

③ ②で引いた線を基準にして、対角線によって４分割された三角形の高さを２等分するように折る。なお、このときの折り線は最後に山折り、谷折りに折りなおすため、軽く折る程度にする。

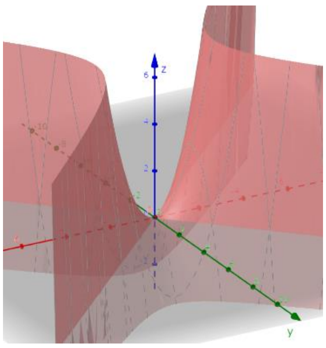
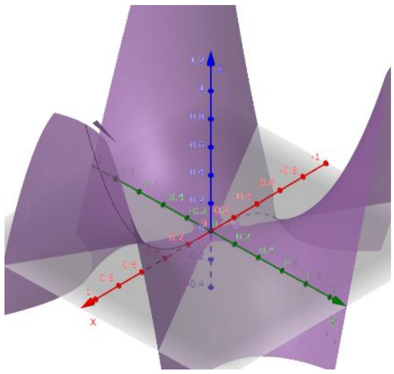
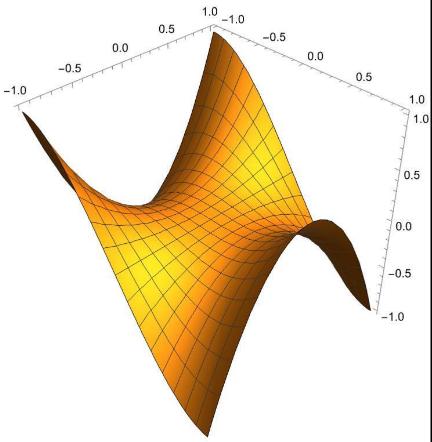
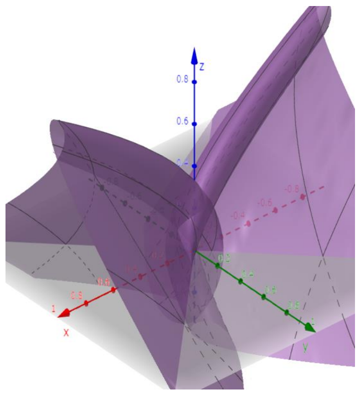
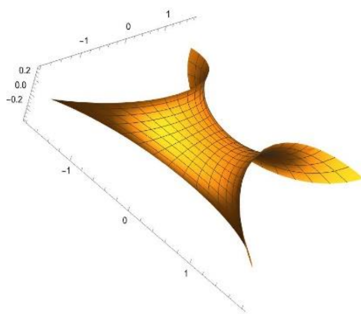
④ ③の折り線を基準にして、対角線によって４分割された三角形の高さを４等分するように折る。

⑤ 以降、④の作業を繰り返していき、三角形の高さを８等分、16 等分、32 等分のように、細かく分割するような折り線を追加していく。
⑥最後に展開図に従って山折り、谷折りを折りなおすと、紙が自然とゆがみ曲面を形成する。

３.折った曲面と関数の関係

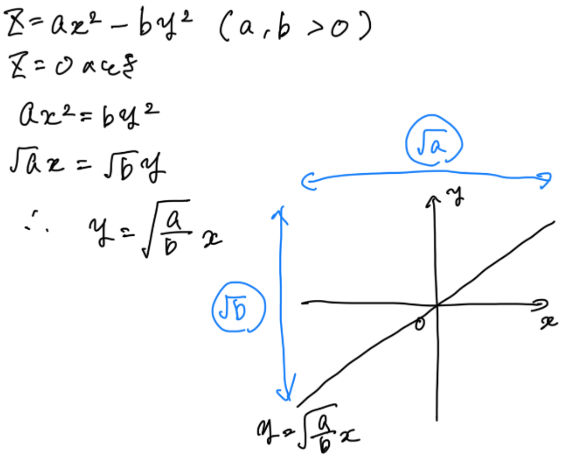
3-1 折った曲面が近似する関数

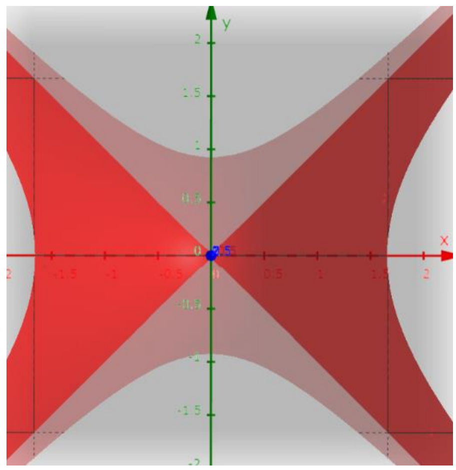
『格子からみえる数学』を参照すると、正方形、六角形、八角形の紙を用いた曲面はそれぞれ以下のような関数を近似していることが述べられている。

	正方形	六角形	八角形
関数のグラフ		  (下)原点付近を拡大した画像	  (下)原点付近を拡大した画像
式	$z=x^2-y^2$	$z=x^3-3xy^2$	$\left(u\frac{1-u^2}{3+v^2}, \frac{1-v^2}{3+u^2}, \frac{u^2-v^2}{3}\right)$ (u, v は実数値の媒介変数とする)

正方形を用いた曲面は二次双曲面、六角形を用いた曲面はモンキーサドル、八角形を用いた曲面はエネパー曲面と呼ばれる局面を近似していることが分かる。

また、長方形、菱形を曲面になるように折ったものに関しては、正確にはどんな関数を近似しているか分からない。長方形は曲面を横から見た際にみえる曲線が左右非対称であり、『格子からみえる数学』にも詳しい説明がなかったため近似している関数を特定できなかった。菱形については、近似している関数を求めるため、『格子からみえる数学』を参考に以下のような計算を行う。





以上の計算より、菱形の対角線の長さを$\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ と置いたとき、

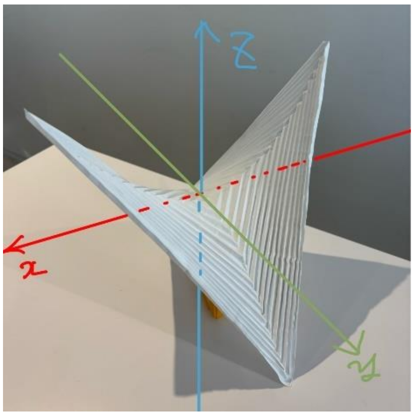
$$z=ax^2-by^2$$

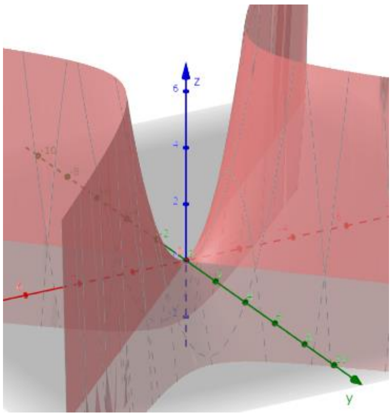
を近似していることが予想された。しかし、曲面の見た目からは具体的な関数を特定することができなかったため、こちらも正確には近似している関数を調べることはできなかった。

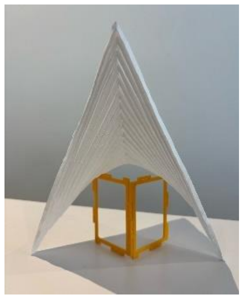
3-2 折った曲面と実際のグラフの比較

次に、正方形、六角形、八角形の紙を用いた曲面など、近似している関数がわかった曲面とその関数のグラフを比較した。比較しやすいように、実際の写真に xyz 軸を書き込んだ画像を記載している。

① 正方形

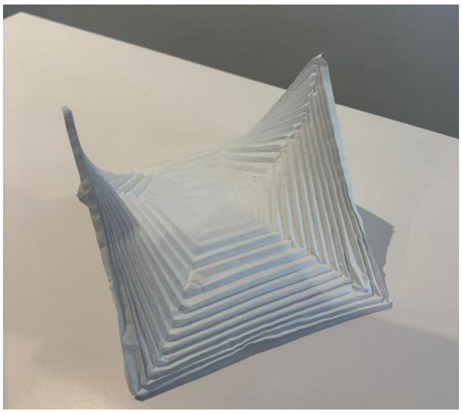


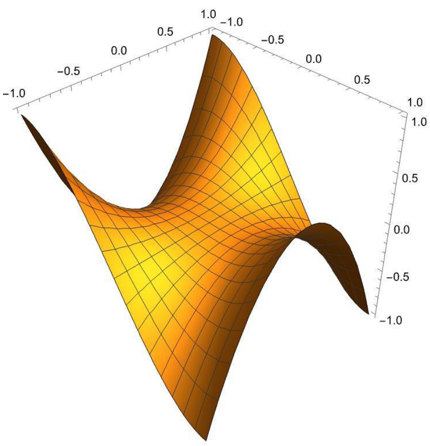




ｚ軸に対して垂直でｙ軸に対して平行になる向きから見ると、実際に折ったものとGeoGebraで表示したグラフを比較するとｚ＞0、z＜0における曲線がほぼ一致することがわかる。これらの曲線はz＞0においてはｚ＝x^2、ｚ＜０においてはｚ＝$-x^2$を表していることがわかる。

②六角形





六角形を用いた曲面は、

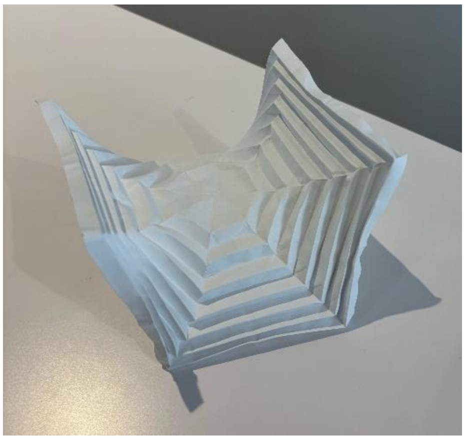
$$z = x^3 - 3xy^2$$

の式で表される、モンキーサドルという関数を近似していることが分かる。

この曲面は写真に示したように同じ折り方でも２通りの形を作ることができる。
写真の右側のような形が、モンキーサドルを近似していると推測される。

② 八角形



八角形を用いた曲面は、

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{u}\frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{u}^{2}}{\mathbf{3}+\boldsymbol{v}^{2}}$$

$$\mathbf{y} = -\boldsymbol{v}\frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{v}^{2}}{\mathbf{3}+\boldsymbol{u}^{2}}$$

$$\mathbf{z} = \frac{\boldsymbol{u}^{2}-\boldsymbol{v}^{2}}{\mathbf{3}}$$

(u, v は実数値の媒介変数とする)

の式で表される、エネパー曲面という関数を近似していることが分かる。

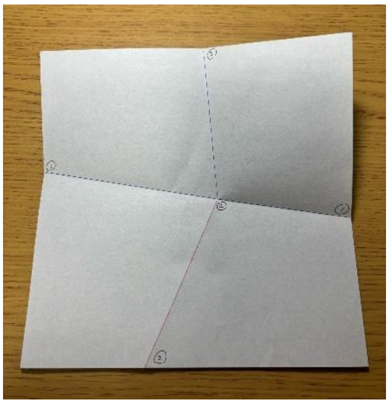
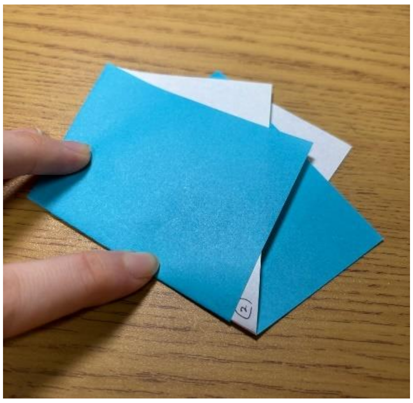
 

この曲面は写真に示したように同じ折り方でも２通りの形を作ることができる。写真の右のような形が、エネパー曲面を近似している。

4. 折った曲面と平坦折りの関係

4-1. 平坦折りとは（平坦折りの定義）

まず、平坦折りとはどのような折り方なのかという定義について説明する。折り紙数学の分野では、平坦折りとは「折り目に沿って折ったとき、紙が平らになるような折り方」であると定義されている。例えば、図に示したように、直線の折り目に沿って紙全体が平らになるような折り方は平坦折りであるということができる。

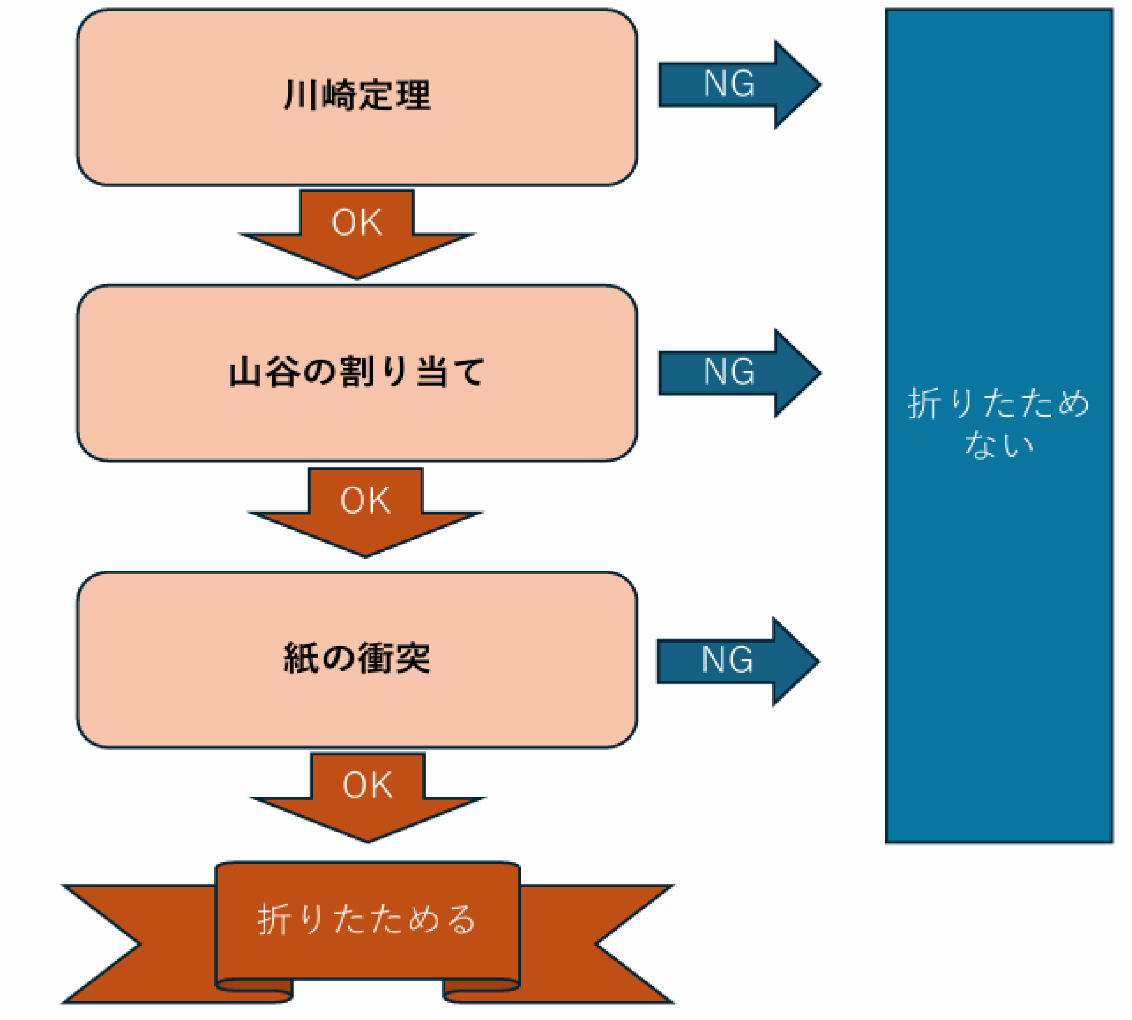
 

さらに、平坦折りは「局所平坦折り」と「大域的平坦折り」の２つに分類することができる。局所平坦折りは、ある１頂点の周りで平坦折りになっていることを指し、大域的平坦折りは頂点の周りだけでなく紙全体で平坦折りになっていることを指す。局所平坦折りは後ほど紹介する「川崎定理」が必要十分条件となっており、局所平坦折りが可能かどうかの判別はあまり難しくない。一方、大域平坦折りはコンピューターには判別が難しいた

め、人の手で実際に折ってみて紙が衝突しないかなどの条件を満たすか確認する方法で判別する。

4-2 平坦折りが可能になる条件

平坦折りが可能かを判別するには、いくつかの条件がある。具体的には、図のようなフローチャートに従って条件を満たしているかを検証することで判別することができる。



フローチャートに記載されている「川崎定理」とは、以下のような定理である。

・川崎定理

各頂点周りのなす角を 1 つ飛ばしで足し合わせたとき、その和が 180° になる。

また、平坦折り可能なのかの判別には使用できないものの、平坦折り可能ならばその条件を満たす条件（必要条件）として、「前川定理」「大小大定理」が挙げられる。それぞれの定理は以下の通りである。

・前川定理

平坦折りできるならば、山折り線と谷折り線の数の差は± 2になる。

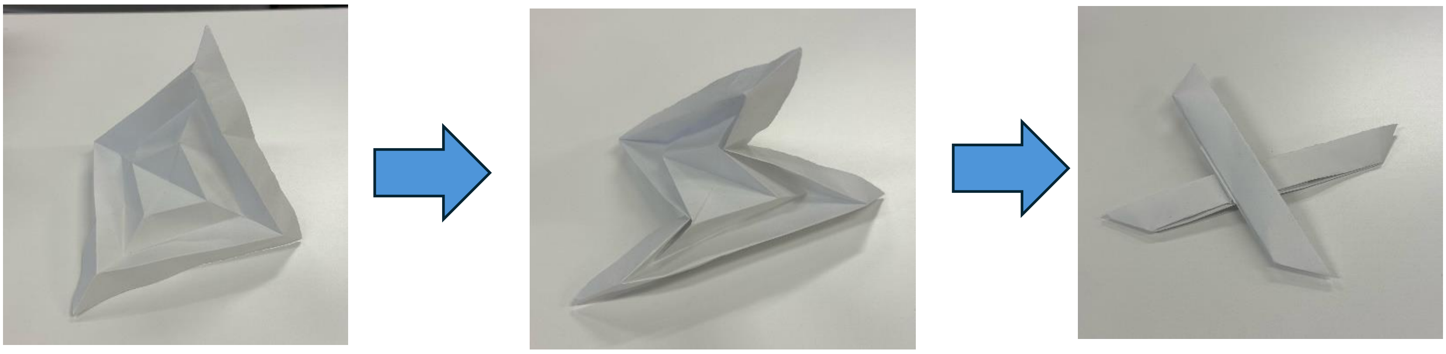
・大小大定理

平坦折り可能な山谷付き展開図においてある角θが極小ならば、角θの境界にある2つの折り紙の山谷は異なる。

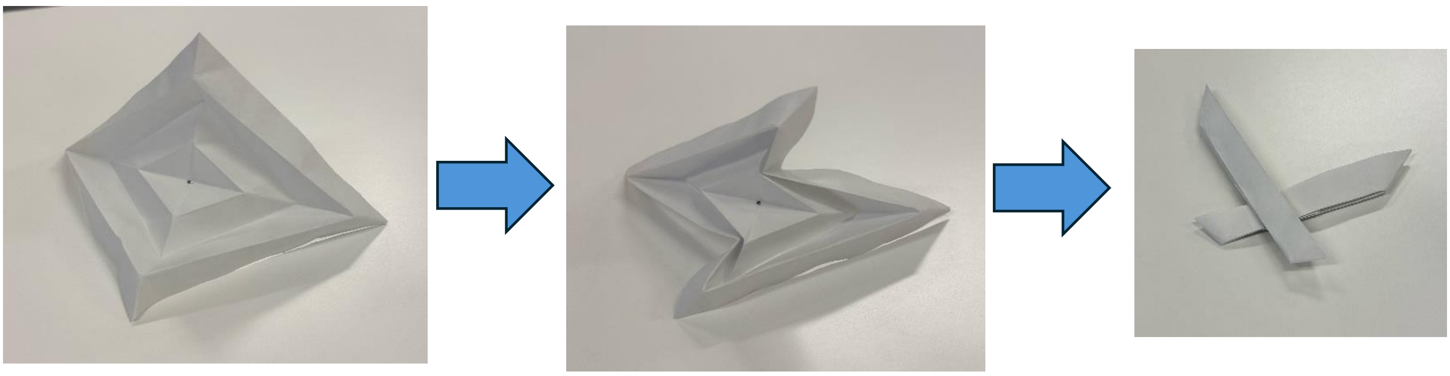
4-3 平坦折りできる曲面について

　折り紙で曲面を制作する過程で、正方形、菱形の紙を用いた曲面は折り線を追加することで平坦折りできることがわかる。

《正方形》

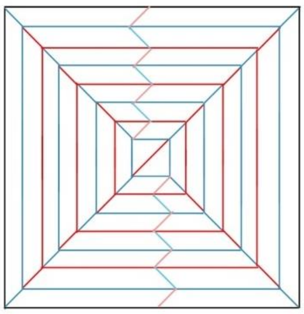


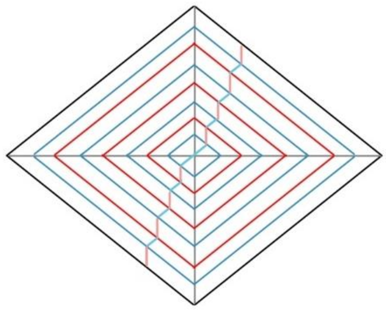
《菱形》



また、平坦折りできるように折り目を追加したときの展開図を以下に示す。

《正方形》　　　　　　　　　　　　　　　　　　　《菱形》

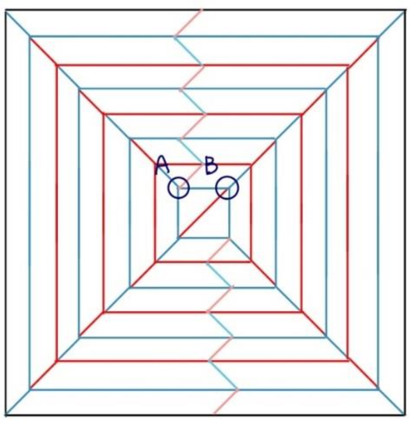


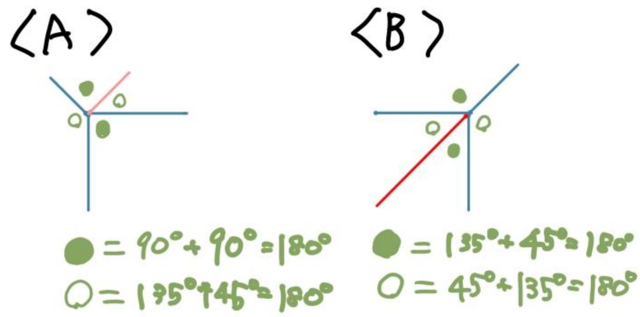


折り畳んだ曲面を横から見ると分かるように、実際には紙の厚みがあるため完全に平坦に折れる訳ではない。紙の厚さが無視できる場合は平坦折りができることを示すために、4-2 で述べた方法に従って、正方形と菱形が平坦折りできることの証明を行った。

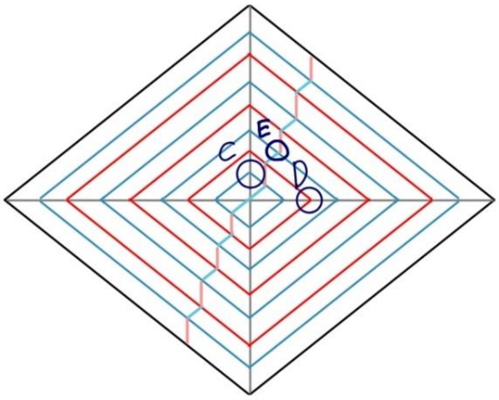
①川崎定理を満たしているか

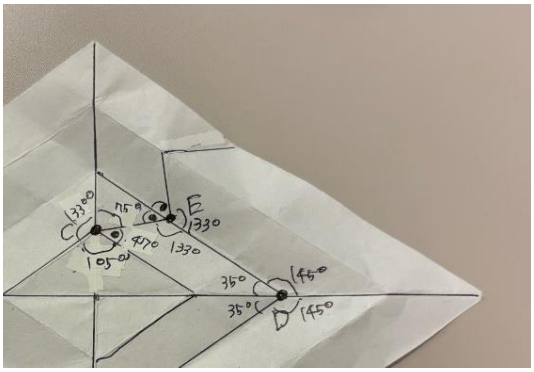
《正方形》





《菱形》





C:

75°　+105°　=180°

47°　+133°　=180°

D:

35°　+145°　=180°

E:

47°　+133°　=180°

展開図中には山谷を無視すると同じパターンの折り線で分割された頂点が繰り返されているため、特定の点を A、B、C、D、E とおきそれぞれの頂点が川崎定理を満たしているか確認した。上に示したように、どの頂点についてもなす角を一つ飛ばしで足し合わせた和が 180°　となるため、川崎定理を満たしている。

③　山谷の割り当て

山谷つきの展開図を書けるかを示す。これは先ほどの展開図が示すように、山谷つきの展開図を以下のように書くことができる。

④　紙の衝突

平坦折りできた状態の画像を記載して紙が衝突していないことを示す。先ほどの写真が示すように、正方形、菱形を用いた曲面は紙が衝突することなく平坦折りができるため、これを満たしている。

5. 参考文献

・岡本健太郎「アートで魅せる数学の世界」技術評論社（2021）

・枡田幹也、福川由貴子「格子からみえる数学」日本評論社（2013）