4 次元の正多面体

チーム名　4 次元正多面体
担当教員　林　忠一郎先生

この記事は一松信先生の「高次元の多面体」という本の方針に沿って、
４次元正多面体の諸量を計算しています。
自分なりに説明や途中計算を詳しく書きました。

１． ４次元正多面体の必要条件

準備

1-１． ３次元正多面の必要条件

凸多面体の各面が全てp角形で、各頂点にq個ずつ面が会しているものを考える。$p \geq 3, q \geq 3$であることに注意する。頂点、辺、面の総数をそれぞれV, E, Fとし、それらをp, qの式で求める。

凸多面体の任意の辺は、２つの面の辺が共通しているので

$$pF = 2E$$

凸多面体の任意の点は、q個の面の点が共通しているので

$$qV = pF$$

以上をまとめて

$$pF = 2E = qV \tag{1}$$

ここでオイラーの公式

$$F + V = E + 2 \tag{2}$$

を、(1)に代入すると

$$pF = 2(F + V - 2)$$
$$4 = 2F + 2V - pF$$

ここで(1)より$V = \frac{pF}{q}$を代入すると

$$4 = 2F + \frac{2pF}{q} - pF = F\left(2 + \frac{2p}{q} - p\right)$$

両辺を$2pF$で割ると

$$\frac{4}{2pF} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}$$

ここで$\frac{4}{2pF} > 0$であるから、必要条件

$$(\lambda \coloneqq)\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} > 0 \tag{3}$$

を得る。

ここで$\lambda = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}$とすると

$$\frac{4}{2pF} = \lambda$$

式(1)より

$$\frac{4}{2(2E)} = \lambda$$
$$\frac{1}{E} = \lambda$$
$$E = \frac{1}{\lambda}$$

式(1)に$E = \frac{1}{\lambda}$を代入すると

$$pF = \frac{2}{\lambda}$$
$$F = \frac{2}{p\lambda}$$

また式(1)に$E=\frac{1}{\lambda}$を代入すると

$$qV=\frac{2}{\lambda}$$
$$V=\frac{2}{q\lambda}$$

まとめて

$$V=\frac{2}{q\lambda},\qquad E=\frac{1}{\lambda},\quad F=\frac{2}{p\lambda} \tag{4}$$

を得る。λはp,qの式だから、V,E,F全てがp,qの式で書けたことになる。

ここで(3)を満たす$p\geq 3, q\geq 3$の組を全て求める。

$p=3$のとき

式(3)に代入すると

$$0<\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}=\frac{1}{q}-\frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{q}>\frac{1}{6}$$
$$q<6$$

以上より$q=3,4,5$

$p=4$のとき

式(3)に代入すると

$$0<\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}=\frac{1}{q}-\frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{q}>\frac{1}{4}$$
$$q<4$$

以上より$q=3$

$p=5$のとき

式(3)に代入すると

$$0<\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}=\frac{1}{5}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}=\frac{1}{q}-\frac{3}{10}$$
$$\frac{1}{q}>\frac{3}{10}$$
$$q<\frac{10}{3}$$

以上より$q=3$

$p\geq 6$のとき

式(3)より$\frac{1}{p}\leq\frac{1}{6}$だから

$$0<\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\leq\frac{1}{6}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}=\frac{1}{q}-\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{q}>\frac{1}{3}$$
$$q<3$$

以上より条件を満たすqはない。

以下シュレーフリの記号(p,q)で正多面体を表す。
(3,3)のとき
式(3)より

$$\lambda = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{\lambda} = 6$$

式(4)より

$$V = \frac{2}{q\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{2}{q} = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$$

$$E = \frac{1}{\lambda} = 6$$

$$F = \frac{2}{p\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{2}{p} = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$$

(3,4)のとき
式(3)より

$$\lambda = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{\lambda} = 12$$

式(4)より

$$V = \frac{2}{q\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{2}{q} = 12 \cdot \frac{2}{4} = 6$$

$$E = \frac{1}{\lambda} = 12$$

$$F = \frac{2}{p\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{2}{p} = 12 \cdot \frac{2}{3} = 8$$

(3,5)のとき
式(3)より

$$\lambda = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{\lambda} = 30$$

式(4)より

$$V = \frac{2}{q\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{2}{q} = 30 \cdot \frac{2}{5} = 12$$

$$E = \frac{1}{\lambda} = 30$$

$$F = \frac{2}{p\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{2}{p} = 30 \cdot \frac{2}{3} = 20$$

(4,3)のとき
式(3)より

$$\lambda = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{\lambda}=12$$

式(4)より

$$V=\frac{2}{q\lambda}=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{2}{q}=12\cdot\frac{2}{3}=8$$

$$E=\frac{1}{\lambda}=12$$

$$F=\frac{2}{p\lambda}=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{2}{p}=12\cdot\frac{2}{4}=6$$

(5,3)のとき

式(3)より

$$\lambda=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{\lambda}=30$$

式(4)より

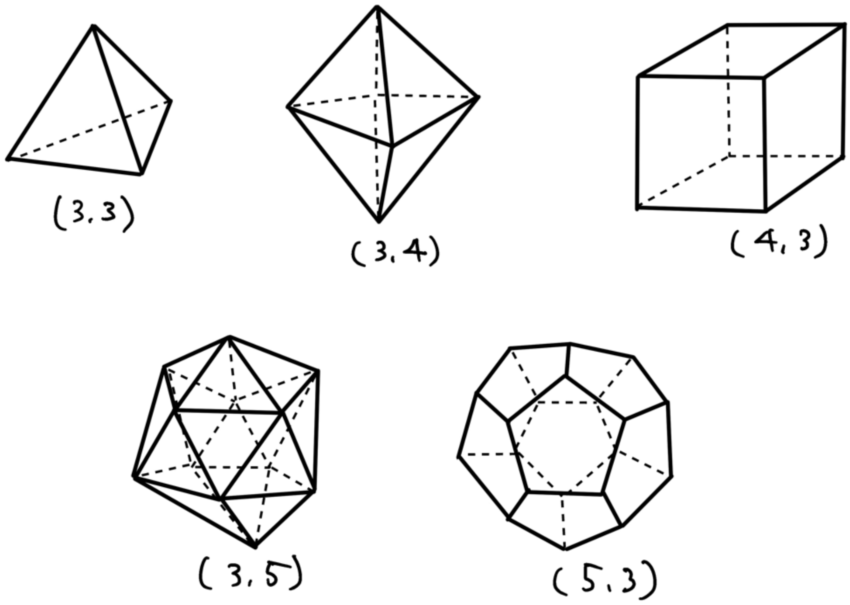
$$V=\frac{2}{q\lambda}=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{2}{q}=30\cdot\frac{2}{3}=20$$

$$E=\frac{1}{\lambda}=30$$

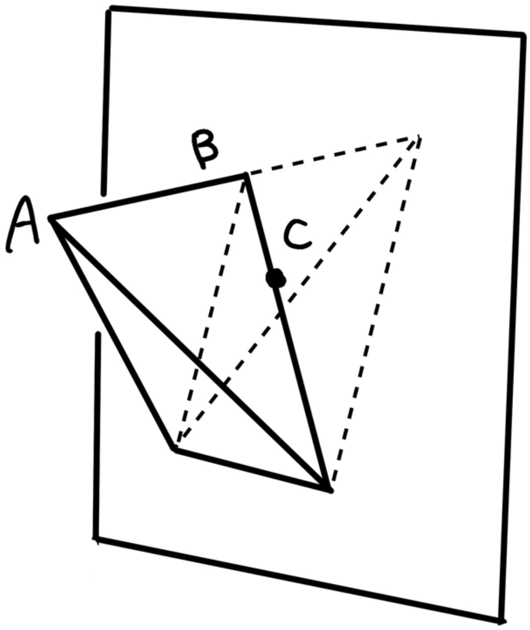
$$F=\frac{2}{p\lambda}=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{2}{p}=30\cdot\frac{2}{5}=12$$

表１-１．３次元正多面体

p	q	$\frac{1}{\lambda}$	V	E	F	名称
3	3	6	4	6	4	正四面体
3	4	12	6	12	8	正八面体
3	5	30	12	30	20	正二十面体
4	3	12	8	12	6	正六面体(立方体)
5	3	30	20	30	12	正十二面体



1-2．　3次元正多面体の諸量



p=5の図，図3

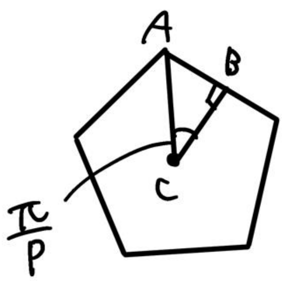
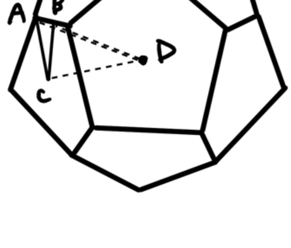
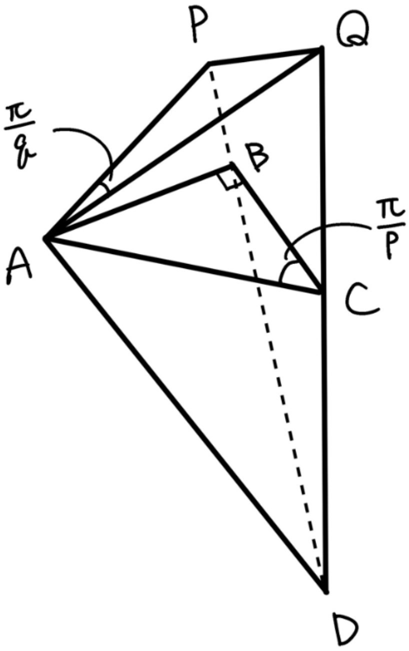
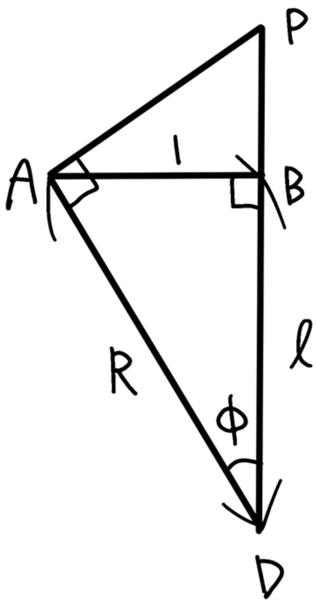


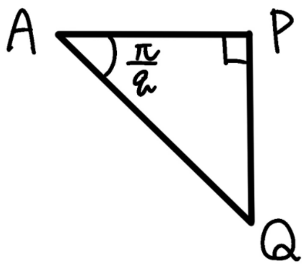
図4



　正多面体の表面の各面の中心(Cとおく)、その一辺の中点(Bとおく)、その辺の一端の頂点(Aとおく)をとり、基本線分AB, AC, BCを作る(図ア参照)。基本線分からなる三角形ABCを正多面体の全体の中心Dと結んでできる基本単体(四面体ABCD)を使う(図イ参照)。これは線分CDが面ABCと垂直、線分ABが面BCDと垂直な形である。点Aを通って線分DAに垂直な平面をとり、線分DB, DCの延長との交点をP, Qとすると$\angle \mathrm{QAP} = \frac{\pi}{q}$である。(∵)線分ADの方向から眺めて一周$2\pi$ラジアンを$2q$等分したから。)
AB $= 1$として、他の線分の長さや大きさを考える。







$$\angle \mathrm{ACB} = \frac{2\pi}{2p} = \frac{\pi}{p}, \quad \mathrm{BC} = \cot\left(\frac{\pi}{p}\right), \quad \mathrm{AC} = \csc\left(\frac{\pi}{p}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}$$

$\angle \mathrm{PAD} = \frac{\pi}{2}, \angle \mathrm{ABP} = \frac{\pi}{2}$に注意して$\angle \mathrm{ADP} = \phi$とおくと、

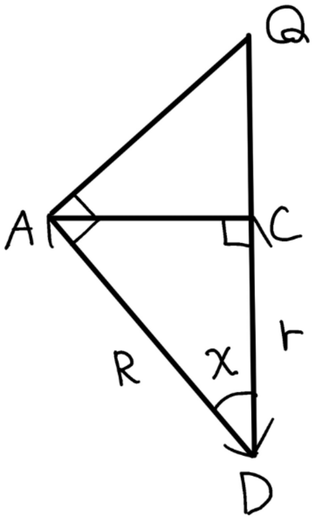
$$\mathrm{AP} = \sec\phi = \frac{1}{\cos\phi}$$

さらに下記の計算によって

$$\mathrm{AQ} = \frac{1}{\cos\chi \sin\left(\frac{\pi}{\mathrm{p}}\right)}$$

を得る。

（AQの算出）



$\angle\mathrm{ADC}=\chi$とおく、線分CD ⊥面ABCより$\angle\mathrm{ACD}=\frac{\pi}{2}$に注意して

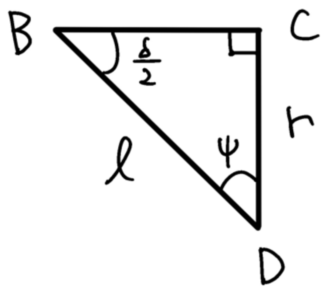
$$\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AD}}=\tan\chi$$

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}=\sin\chi$$

$$\mathrm{AD}=\frac{\mathrm{AC}}{\sin\chi}=\frac{\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{\mathrm{p}}\right)}\right)}{\sin\chi}$$

$$\mathrm{AQ}=\tan\chi\cdot\mathrm{AD}=\tan\chi\cdot\frac{\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{\mathrm{p}}\right)}\right)}{\sin\chi}=\frac{\sin\chi}{\cos\chi}\cdot\frac{1}{\sin\chi}\cdot\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{\mathrm{p}}\right)}=\frac{1}{\cos\chi\sin\left(\frac{\pi}{\mathrm{p}}\right)}$$

■



$\angle\mathrm{BDC}=\psi,\angle\mathrm{DBC}=\frac{\delta}{2}$とおく、△ BCDが$\angle\mathrm{BCD}=\frac{\pi}{2}$の直角３角形なので

$\frac{\delta}{2}=\frac{\pi}{2}-\psi\ldots$(ア)である。

$\mathrm{AD}=R,\mathrm{CD}=r,\mathrm{BD}=l$とすると

この

∠BCDは直角なので$\cos\psi=\frac{r}{l}$、∠ABDは直角なので$\cos\phi=\frac{l}{R}$、∠ACDは直角なので$\cos\chi=\frac{r}{R}$

これより

$$\cos\chi=\cos\phi\cos\psi \qquad (5)$$

((5)の算出)

(左辺)= $\cos\chi=\frac{r}{R}$

(右辺)= $\cos\phi\cos\psi=\frac{l}{R}\cdot\frac{r}{l}=\frac{r}{R}$

よって(左辺)=(右辺)

■

ABC を含む面をF、AB を含む辺を共有する面をF'とする。

F'の中心をC'とし、

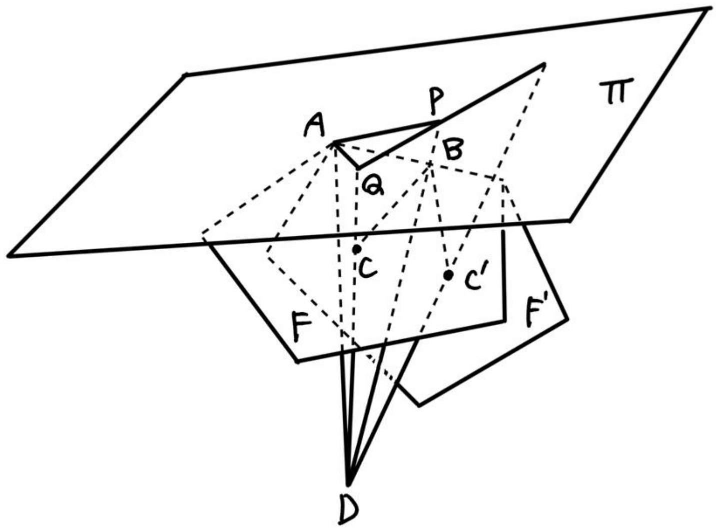
直線DC'が「点 A を通り線分 DA と垂直な平面Π」と交わる点をQ'とする。

△ DCB は線分 AB に垂直であり、△ $DC'B$も線分ABに垂直であるから、点D, Q, P, Q'は全て同一平面上にある。

特に、点Pは平面Π上の線分QQ'上にある。

対称性より、平面Π上で、線分QQ'は線分APと直交する。

したがって∠APQは直角である。



$$\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)=\frac{AP}{AQ}$$

$$=\frac{\frac{1}{\cos\phi}}{\left(\frac{1}{\cos\chi\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\right)} \qquad (5)より$$

$$=\frac{\frac{1}{\cos\phi}}{\left(\frac{1}{\cos\phi\cos\psi\sin\left(\frac{\mathrm{\pi}}{\mathrm{p}}\right)}\right)}$$
$$=\cos\psi\sin\left(\frac{\mathrm{\pi}}{\mathrm{p}}\right)$$

より

$$\cos\psi=\frac{\cos\left(\frac{\mathrm{\pi}}{\mathrm{q}}\right)}{\sin\left(\frac{\mathrm{\pi}}{\mathrm{p}}\right)}$$

次に

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)&=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)\qquad (\because)\,(\text{ア}))\\&=\sin\frac{\pi}{2}\cos\psi-\cos\frac{\pi}{2}\sin\psi\\&=1\cdot\cos\psi-0\cdot\sin\psi\\&=\cos\psi\end{aligned}$$

よって

$$\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)=\cos\psi=\frac{\cos\left(\frac{\mathrm{\pi}}{\mathrm{q}}\right)}{\sin\left(\frac{\mathrm{\pi}}{\mathrm{p}}\right)}\tag{6}$$

（ここまでの知識で 1.3 節　4 次元正多面体の種類と 2.0 節　頂点数、辺数、面数、胞数の比を読むこともできる。）

ところで、

$$\sin\psi=\frac{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\tag{7}$$

（(7)の算出）

$$\begin{aligned}\sin\psi&=\sqrt{1-\cos\psi^2}\qquad (6)\text{より}\\&=\sqrt{1-\left(\frac{\cos\left(\frac{\mathrm{\pi}}{\mathrm{q}}\right)}{\sin\left(\frac{\mathrm{\pi}}{\mathrm{p}}\right)}\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\mathrm{\pi}}{\mathrm{q}}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}\\&=\frac{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\end{aligned}$$

■

$$\mathrm{DP}=R\sec\phi,\qquad \mathrm{DQ}=R\sec\chi,\qquad \mathrm{PQ}=\mathrm{AQ}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)=\mathrm{DQ}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)$$

から

$$R = \csc\phi = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}} \tag{8}$$

（(8)の算出）

まず$R=\csc\phi$を求める

$$\sin\phi = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} = \frac{1}{R}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{1}{\sin\phi} = \csc\phi$$

次に、$\mathrm{DQ} = R\sec\chi$，　$\mathrm{AQ}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{q}\right) = \mathrm{DQ}\cdot\sin\psi$より

$$\mathrm{AQ}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{q}\right) = R\sec\chi\cdot\sin\psi$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{\mathrm{AQ}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sec\chi\sin\psi}$$

$$\mathrm{AQ} = \frac{1}{\cos\chi\sin\left(\frac{\pi}{\mathrm{p}}\right)} \text{ より}$$

$$\begin{aligned}
R &= \frac{\left(\frac{1}{\cos\chi\sin\left(\frac{\pi}{\mathrm{p}}\right)}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)}{\sec\chi\sin\psi} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\cos\chi\sin\left(\frac{\pi}{\mathrm{p}}\right)\cdot\frac{1}{\cos\chi}\cdot\sin\psi} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\mathrm{p}}\right)\sin\psi} \qquad \text{(7)より} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\left(\sin\left(\frac{\pi}{\mathrm{p}}\right)\cdot\frac{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}
\end{aligned}$$

■

$$\cos\phi = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)} \tag{9}$$

（(9)の算出）

まず$1-\sin^2\phi$を求める、式(8)より

この記事は

$$1-\sin^2\phi = 1-\frac{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}$$
$$=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)-1+\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}$$
$$=\frac{1-1+\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}=\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}$$

$\cos\phi=\sqrt{1-\sin^2\phi}$であるから

$$\cos\phi=\sqrt{1-\sin^2\phi}$$
$$=\sqrt{\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}$$

■

$$r=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}} \tag{10}$$

（(10)の算出）

$$r=\sqrt{R^2-\mathrm{AC}^2}\cdots\cdots(\mathcal{A})$$
$$\mathrm{AC}=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\text{と式(8)より}$$

$$(\mathcal{A})=\sqrt{\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}-\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}$$
$$=\sqrt{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-1+\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\left(1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}$$
$$=\sqrt{\frac{\left(1-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)\left(1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\right)-1+\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\left(1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}$$
$$=\sqrt{\frac{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-1+\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\left(1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\left(1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}$$

■

$$\sec\chi = \frac{R}{r} = \tan\left(\frac{\pi}{p}\right)\tan\left(\frac{\pi}{q}\right) \tag{11}$$

((11)の算出)

まず$\sec\chi = \frac{R}{r}$を求める

$\cos\chi = rR$

$$\Leftrightarrow \sec\chi = \frac{1}{\cos\chi} = \frac{R}{r}$$

$$l = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)^2-\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)^2}} \tag{12}$$

((12)の算出)

$l = \sqrt{R^2-1}$であるから、式(8)より

$$l = \sqrt{R^2-1}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}\right)^2-1}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}-1}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)-1+\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-1+\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)^2-\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)^2}}$$

■

1-３． ４次元正多面体の種類

(p,q)で表される３次元多面体Pを各辺上にr個ずつ集めてできる４次元正多面体を(p,q,r)と表す。

一般に$(\mathrm{n}-1)$次元の正多面体が$(\mathrm{n}-2)$個の整数列$(p_1,p_2,\dots,p_{n-2})$で表されたとき、それを超平面要素にもち、３次元低い各構成要素上にp_{n-1}個ずつ超平面が会するようなn次元の正多面体を$(p_1,p_2,\dots,p_{n-1})$で表す。これを逆順にした$(p_{n-1},p_{n-2},\dots,p_2,p_1)$で表される正多面体は、もとの正多面体の表面の各超平面の中心を結んでできることができ、これをもとの正多面体の**双対正多面体**という。

二面角とは３次元多面において二つの面がなす角である。３次元正多面体(p,q)が辺にいくつ会することができるのか知りたい。

凸４次元正多面体の必要条件の一つは二面角δのr倍が2π未満であることであり、

$$r\delta<2\pi$$
$$\Rightarrow\frac{\delta}{2}<\frac{\pi}{r}$$

$r\geq 3$より

$$\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)<\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)$$

この条件と式(6)より

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\mathrm{p}}\right)}<\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)<\sin\left(\frac{\pi}{\mathrm{p}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)\tag{13}$$

表１-１の全ての組み合わせ$(p,q)=(3,3),(4,3),(3,4),(5,3),(3,5)$について、(13)を満たす$r\geq 3$を求める。

$p=3,q=3$のとき

式(13)より

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)<\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)$$
$$\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)$$
$$\frac{\sqrt{3}}{3}<\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)$$
$$\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)<\frac{\pi}{r}$$

$$\text{およそ}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\approx 35.26°\text{であるから}$$

$$35.26°<\frac{180°}{r}$$
$$35.26°\cdot r<180°$$

上記をみたすrは

$$r = 3, 4, 5$$

$p = 4, q = 3$のとき
式(13)より

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) < \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)$$
$$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{r}\right)$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(\frac{\pi}{r}\right)$$
$$\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{r}$$
$$r < 4$$

上記をみたすrは

$$r = 3$$

$p = 3, q = 4$のとき
式(13)より

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) < \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{r}\right)$$
$$\frac{\sqrt{6}}{3} < \sin\left(\frac{\pi}{r}\right)$$
$$\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) < \frac{\pi}{r}$$

およそ $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \approx 54.74°$であるから

$$54.74° < \frac{180°}{r}$$
$$54.74° \cdot r < 180°$$

上記をみたすrは

$$r = 3$$

$p = 5, q = 3$のとき
式(13)より

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) < \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)$$
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)} < \sin\left(\frac{\pi}{r}\right)$$
$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}\right) < \frac{\pi}{r}$$

およそ $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}\right) \approx 58.28°$であるから

$$58.28° < \frac{180°}{r}$$
$$58.28° \cdot r < 180°$$

上記をみたすrは

$$r = 3$$

$p = 3, q = 5$のとき

式(13)より

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) < \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{r}\right)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} < \sin\left(\frac{\pi}{r}\right)$$
$$\sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{3}\right) < \frac{\pi}{r}$$

およそ $\sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{3}\right) \approx 69.09°$であるから

$$69.09° < \frac{180°}{r}$$
$$69.09° \cdot r < 180°$$

上記をみたすrは存在しない

以上より$(p, q, r) = (3,3,3), (3,3,4), (3,3,5), (4,3,3), (3,4,3), (5,3,3)$の六組が条件を満たす。

２．４次元正多面体の可能性

２－０．頂点数、辺数、面数、胞数の比

今、４次元正多面体の種類を求めた。以下３次元正多面体を胞と呼ぶ。各４次元正多面体の頂点の数N_0、辺の数N_1、面の数N_2、胞の数N_3の数を求めたい。

以下、３次元正多面体(p, q)の辺数を$E = E(p, q)$とする。式(4)より

$$\frac{1}{E(p,q)} = \lambda = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} \tag{14}$$

式(1)より

$$pF = 2E = 2E(p,q)$$
$$F = \frac{2E(p,q)}{p} \ldots (\text{イ})$$

つまり、一つの胞に$\frac{2E(p,q)}{p}$個の面がある。各面は二つの胞で共有しているので

$$N_3 \cdot \frac{2E(p,q)}{p} = 2N_2 \tag{15}$$

各面はp本の辺で構成され、各辺はr個の面で共有しているので

$$pN_2 = rN_1 \tag{16}$$

４次元正多面体(p,q,r)の各頂点に$\frac{2E(r,p)}{r}$個の辺が会する。ここで$\frac{2E(r,p)}{r}$は双対４次元正多面体(r,p,q)の各胞(r,q)の面の数である（(イ)参照)。各辺の端点は2個ずつなので

$$\frac{2N_0E(r,q)}{r} = 2N_1 \tag{17}$$

これらより

$$N_0 : N_1 : N_2 : N_3 = \frac{1}{E(r,q)} : \frac{1}{r} : \frac{1}{p} : \frac{1}{E(p,q)} \tag{18}$$

（(18)の算出）

式(17)より

$$N_0 = \frac{rN_1}{E(r,q)} \dots (\mathcal{B})$$

式(16)より

$$N_1 = \frac{pN_2}{r} \dots (\mathcal{C})$$

式(15)より

$$N_2 = \frac{N_3E(p,q)}{p} \dots (\mathcal{D})$$

$(\mathcal{B})$に$(\mathcal{C})$を代入すると

$$N_0 = \frac{r \cdot \frac{pN_2}{r}}{E(r,q)} = \frac{pN_2}{E(r,q)} \dots (\mathcal{E})$$

$(\mathcal{E})$に$(\mathcal{D})$を代入すると

$$N_0 = \frac{p \cdot \frac{N_3E(p,q)}{p}}{E(r,q)} = \frac{N_3E(p,q)}{E(r,q)} \dots (\mathcal{F})$$

$(\mathcal{B}), (\mathcal{E}), (\mathcal{F})$より

$$\begin{aligned} N_0 : N_1 : N_2 : N_3 &= N_0 : \frac{E(r,q)}{r}N_0 : \frac{E(r,q)}{p}N_0 : \frac{E(r,q)}{E(p,q)}N_0 \\ &= 1 : \frac{E(r,q)}{r} : \frac{E(r,q)}{p} : \frac{E(r,q)}{E(p,q)} \\ &= \frac{1}{E(r,q)} : \frac{1}{r} : \frac{1}{q} : \frac{1}{E(p,q)} \end{aligned}$$

■

ここで式(18)を用いて各(p,q,r)のN_0, N_1, N_2, N_3の比を求める。

$(p,q,r) = (3,3,3)$のとき、式(14)より

$$\frac{1}{E(p,q)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{E(r,q)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

よって式(18)より

$$N_0 : N_1 : N_2 : N_3 = \frac{1}{6} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 1 : 2 : 2 : 1$$

$(p,q,r)=(3,3,4)$のとき、式(14)より

$$\frac{1}{E(p,q)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{E(r,q)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

よって式(18)より

$$N_0:N_1:N_2:N_3=\frac{1}{12}:\frac{1}{4}:\frac{1}{3}:\frac{1}{6}=1:3:4:2$$

$(p,q,r)=(3,3,5)$のとき、式(14)より

$$\frac{1}{E(p,q)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{E(r,q)}=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{30}$$

よって式(18)より

$$N_0:N_1:N_2:N_3=\frac{1}{30}:\frac{1}{5}:\frac{1}{3}:\frac{1}{6}=1:6:10:5$$

$(p,q,r)=(4,3,3)$のとき、式(14)より

$$\frac{1}{E(p,q)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$
$$\frac{1}{E(r,q)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

よって式(18)より

$$N_0:N_1:N_2:N_3=\frac{1}{6}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{12}=2:4:3:1$$

$(p,q,r)=(3,4,3)$のとき、式(14)より

$$\frac{1}{E(p,q)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$
$$\frac{1}{E(r,q)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

よって式(18)より

$$N_0:N_1:N_2:N_3=\frac{1}{12}:\frac{1}{3}:\frac{1}{3}:\frac{1}{12}=1:4:4:1$$

$(p,q,r)=(3,3,5)$のとき、式(14)より

$$\frac{1}{E(p,q)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{E(r,q)}=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{30}$$

よって式(18)より

$$N_0:N_1:N_2:N_3=\frac{1}{30}:\frac{1}{5}:\frac{1}{3}:\frac{1}{6}=1:6:10:5$$

表２－１

p	q	r	$N_0 : N_1 : N_2 : N_3$
3	3	3	$\frac{1}{6}:\frac{1}{3}:\frac{1}{3}:\frac{1}{6} = 1:2:2:1$
3	3	4	$\frac{1}{12}:\frac{1}{4}:\frac{1}{3}:\frac{1}{6} = 1:3:4:2$
3	3	5	$\frac{1}{30}:\frac{1}{5}:\frac{1}{3}:\frac{1}{6} = 1:6:10:5$
4	3	3	$\frac{1}{6}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{12} = 2:4:3:1$
3	4	3	$\frac{1}{12}:\frac{1}{3}:\frac{1}{3}:\frac{1}{12} = 1:4:4:1$
5	3	3	$\frac{1}{30}:\frac{1}{5}:\frac{1}{3}:\frac{1}{6} = 1:6:10:5$

ここで４次元の凸多面体に関するオイラーの公式は

$$N_0 + N_2 = N_1 + N_3$$

である。

これに$(\mathcal{B}), (\mathcal{E}), (\mathcal{F})$をオイラーの公式に代入すると

$$N_0 + \frac{E(r,q)}{p} N_0 = \frac{E(r,q)}{r} N_0 + \frac{E(r,q)}{E(p,q)} N_0$$

$$1 + \frac{E(r,q)}{p} = \frac{E(r,q)}{r} + \frac{E(r,q)}{E(p,q)}$$

$$\frac{1}{E(r,q)} + \frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{E(p,q)}$$

式(14)より

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}$$

のように自明な式に退化し、情報は得られない。

以下、式(18)の比例定数を$\Lambda = \Lambda(r,p,q)$とする。すなわち

$$N_0 = \frac{\Lambda}{E(r,q)}, \quad N_1 = \frac{\Lambda}{r}, \quad N_2 = \frac{\Lambda}{p}, \quad N_3 = \frac{\Lambda}{E(p,q)},$$

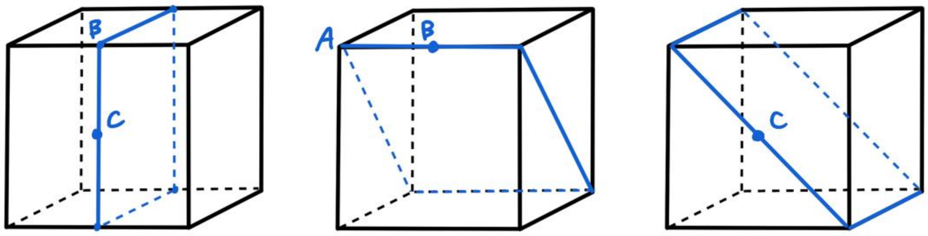
となる定数Λを考える。

この比例定数を求めていく。

準備

2-１．スタインバーグの公式とペトリー多角形

しばらく、３次元正多面体の話をする。



3次元正多面体は3次元空間内の幾つかの平面に関して面対称である、その枚数をmとする。

正多面体の表面の各面の中心(C とおく)、その一辺の中点(B とおく)、その辺の一端の頂点(A とおく)をとり、基本線分 AB,AC,BC を作ると、各基本線分を含む対称面が一枚ずつ定まる。対称面による切り口のw角形の辺は、それが正多面体の辺なら中点で(AB)、面の対称線なら面の中心で二分される(AC,BC)。従ってこのw角形は常に$2w$本の基本線分からなるので、基本線分からm枚の対称面が$2w$個ずつ生じる。一方、基本線分は各面の中心から$2p$本出ていて(AC,BC)、これらが$2pF$本ある。式(1)より$2pF = 2(2E) = 4E$本。さらに各辺が2等分されて合計$2E$本あるので(AB)、総数$6E$本あり、$6E$個の対称面が$2w$枚ずつ重なって合計m枚になって

$$2wm = 6E$$
$$\Leftrightarrow wm = 3E \dots (a)$$

となる。

対称面はすべて3次元正多面体の中心を通り、互いに交わる。

その交線は正多面体の表面と2点で交わり、それは頂点、辺の中点、面の中心のいずれかである。2つの対称面の組は組み合わせの計算より合計$\frac{m(m-1)}{2}$組あり、表面との交点はのべ全部で$m(m-1)$個ある。そのうち面の中心はp枚の対称面が通るので$\frac{p(p-1)}{2}$回重複し、頂点はq枚の対称面が通るので$\frac{q(q-1)}{2}$回重複して数えられている。辺の中心は、辺を含むものと、それに直交するものと2枚が通るだけで1回しか生じない。これらを加えて

$$m(m-1) = \frac{Fp(p-1)}{2} + \frac{Vq(q-1)}{2} + E$$

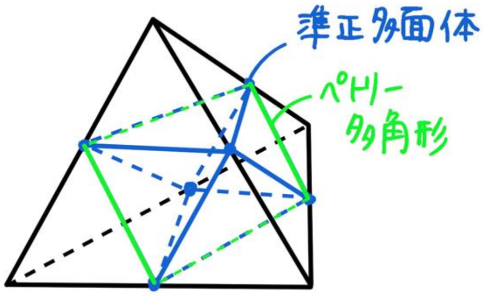
を得る。式(1)より

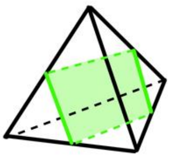
$$m(m-1) = \frac{2E(p-1)}{2} + \frac{2E(q-1)}{2} + E$$
$$= E(p-1+q-1+1) = E(p+q-1) \dots (b)$$

となる。さらに(a)を代入すると

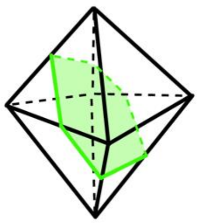
$$m(m-1) = \frac{wm}{3}(p+q-1) \qquad \text{両辺に}\frac{3}{m}\text{かける}$$
$$\Leftrightarrow 3(m-1) = w(p+q-1) \dots (c)$$

ここでペトリー多角形について論ずる。正多面体(p,q)の各辺の中点を結ぶと正p角形F個、正q角形V個で囲まれた準正多面体を得る。この対称面として、準正多面体の辺をつないで、正多角形ができる。これをペトリー多角形といい、この面をペトリー面という。

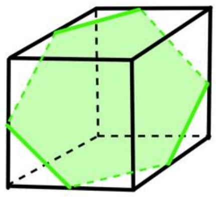




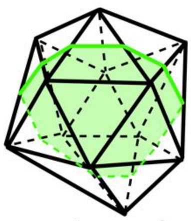
(3, 3)



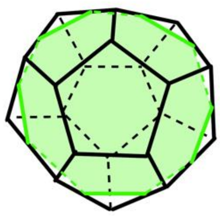
(3, 4)



(4, 3)



(3, 5)



(5, 3)

ペトリー多角形の辺数をh、その個数をnとする。今、１つのペトリー多角形P_0に着目し、それを固定して考える。それは他の任意のペトリー多角形と正多面体(p,q)の中心点を通る線分で交わり、線分の端点は準正多面体の中心点対称な２つの頂点である。P_0の各頂点に対して、そこで交わるペトリー多角形が１つずつ存在し、中心点対称な頂点のところで交わっているペトリー多角形と同一なので、下記(d)の１つ目の等式が従う。また準正多面体の各辺に対して、それを辺とするペトリー多角形はただ一つ存在し、準正多面体の辺の数は準正多面体の辺の数の２倍だから、(d)の２番目の等式が従う。

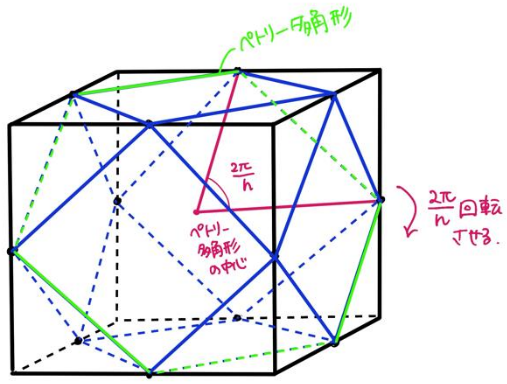
$$n = \left(\frac{h}{2}\right) + 1, \quad \frac{nh}{2} = E \ldots (d)$$

これらより

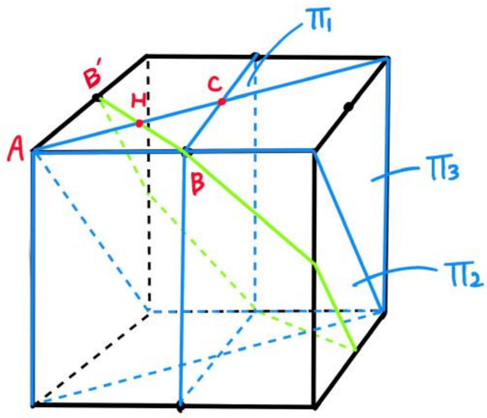
$$\frac{\left(\left(\frac{h}{2}\right)+1\right)h}{2}=E \qquad \text{両辺を 4 倍}$$

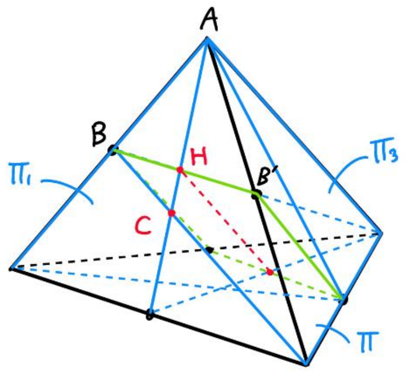
$$\Leftrightarrow h(h+2)=4E \ldots (e)$$

　ペトリー面は正多面体の対称面ではない。ペトリー面で正多面体を二つに切り、一方を$\frac{2\pi}{h}$ラジアンだけ回すと面対称になる(参照下図)。



よってペトリー面と正多面体の対称面は、ともに中心を通る互いに異なる平面であるから、必ず交わる。その交線はペトリー多角形の対称軸なので、それと正多面体の表面との交点は、「正多面体の辺の中点」、「頂点Aを共有して隣り合う２辺の中点B と B′を結ぶ線分の中点、すなわち基本線分





ACとBB′の交点」のいずれかである。正多面体の辺の中点を通る「ペトリー多角形の対称面」は2枚ずつ(図のΠ_1, Π_2)ある。ACとBB′の各交点Hを通る「ペトリー多角形の対称面」は、ACを含む1枚(図のΠ_3)。

１つのペトリー多角形の中心点対称の一対の点は同じ対称面を定めるので、対称面は合計$\frac{2h+h}{2}=\frac{3h}{2}$枚ある。すなわち

$$m=\frac{3h}{2}\dots(f)$$

である。(a)より

$$\frac{3E}{w}=\frac{3h}{2}$$
$$\Leftrightarrow E=\frac{h}{2}\cdot w$$

(e)より

$$\begin{aligned}\frac{h(h+2)}{4}&=\frac{h}{2}\cdot w\\ \Leftrightarrow w&=\frac{2}{h}\cdot\frac{h(h+2)}{4}\\ &=\frac{(h+2)}{2}\\ &=\frac{h}{2}+1 \qquad (f)\text{より}\\ &=\frac{m}{3}+1\dots(g)\end{aligned}$$

(g)を変形すると

$$3w=m+3$$
$$m=3w-3$$
$$m-1=3w-4$$

であるから、これを(c)に代入すると

$$3(3w-4)=w(p+q-1)$$
$$w(p+q-10)=-12$$
$$w=\frac{-12}{-(-p-q+10)}=\frac{12}{10-p-q}\dots(h)$$

(h)の式はスタインバーグの公式と呼ばれる。

ここで各正多面体の対称面の枚数m、対称面での切り口の辺数w、ペトリー多角形の辺数hを求める。

$(p,q)=(3,3)$のとき

(h)より

$$w=\frac{12}{10-3-3}=\frac{12}{4}=3$$

(g)より

$$3=\frac{m}{3}+1$$
$$\Leftrightarrow m=3\cdot2=6$$

(f)より

$$6=\frac{3h}{2}$$
$$\Leftrightarrow h=6\cdot\frac{2}{3}=4$$

この

$(p,q)=(3,4)$のとき

(𝒽)より

$$w=\frac{12}{10-3-4}=\frac{12}{3}=4$$

(ℊ)より

$$4=\frac{m}{3}+1$$
$$\Leftrightarrow m=3\cdot 3=9$$

(𝒻)より

$$9=\frac{3h}{2}$$
$$\Leftrightarrow h=9\cdot\frac{2}{3}=6$$

$(p,q)=(3,5)$のとき

(𝒽)より

$$w=\frac{12}{10-3-5}=\frac{12}{2}=6$$

(ℊ)より

$$6=\frac{m}{3}+1$$
$$\Leftrightarrow m=3\cdot 5=15$$

(𝒻)より

$$15=\frac{3h}{2}$$
$$\Leftrightarrow h=15\cdot\frac{2}{3}=10$$

$(p,q)=(4,3)$のとき

(𝒽)より

$$w=\frac{12}{10-4-3}=\frac{12}{3}=4$$

(ℊ)より

$$4=\frac{m}{3}+1$$
$$\Leftrightarrow m=3\cdot 3=9$$

(𝒻)より

$$9=\frac{3h}{2}$$
$$\Leftrightarrow h=9\cdot\frac{2}{3}=6$$

$(p,q)=(5,3)$のとき

(𝒽)より

$$w=\frac{12}{10-5-3}=\frac{12}{2}=6$$

(ℊ)より

$$6=\frac{m}{3}+1$$

$$\Leftrightarrow m = 3 \cdot 5 = 15$$

(オ)より

$$15 = \frac{3h}{2}$$

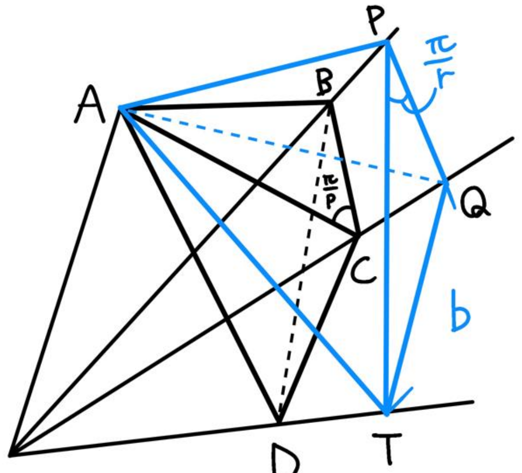
$$\Leftrightarrow h = 15 \cdot \frac{2}{3} = 10$$

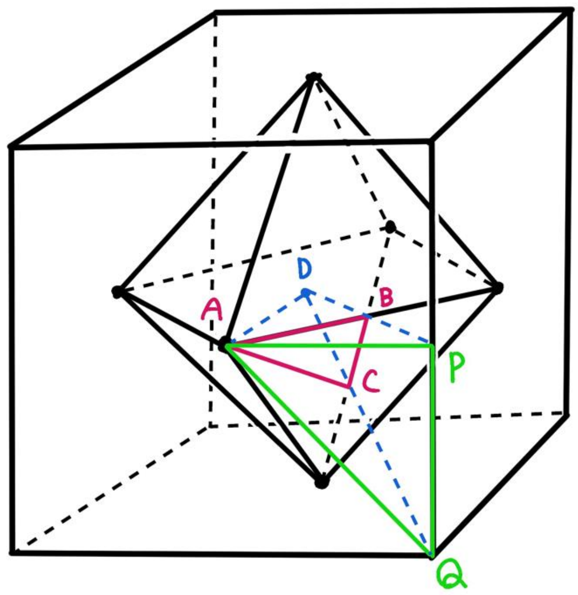
表２－２

p	q	m	w	h
3	3	6	3	4
3	4	9	4	6
3	5	15	6	10
4	3	9	4	6
5	3	15	6	10

４次元正多面体の話に戻る。

３次元正多面体の基本単体ABCDを４次元の中心Oから射影して４次元の基本単体ABCDOを作る。Aを通って線分OAに垂直な３次元超平面を作り、線分OB, OC, ODの



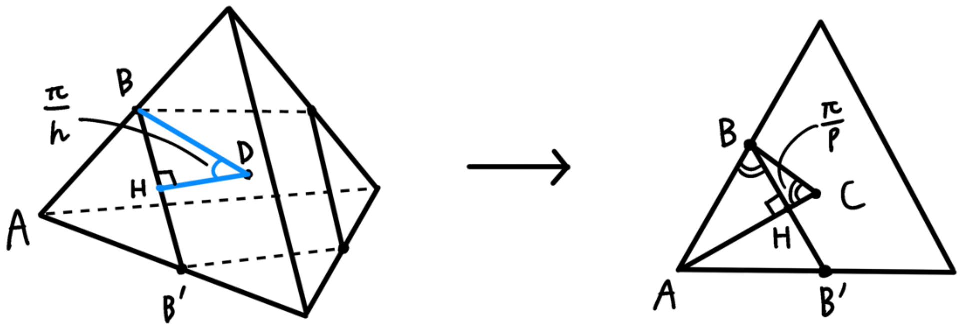


延長との交点をP, Q, Tとすると四面体TQPAは、双対３次元正多面体(r, q)の基本単体になる。

ここで下記の計算によって

$$\sin\left(\frac{\pi}{h}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)} \tag{19}$$

を得る。



((19)の算出)

△ABCにおいて点Bから線分ACに下ろした垂線BHはペトリー多角形の一辺の半分である。$\angle CBA = \frac{\pi}{2}$であるから$\angle ABH = \frac{\pi}{2} - \angle CBH = \angle ACB = \frac{\pi}{p}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{p}\right) = \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AB}} \qquad \mathrm{AB} = 1 \text{ より}$$
$$= \frac{\mathrm{BH}}{1} = \mathrm{BH}$$

垂線BHはペトリー多角形の一辺の半分であるから、中心角は$\angle BDH = \frac{2\pi}{2h} = \frac{\pi}{h}$である。

$$\sin\left(\frac{\pi}{h}\right) = \frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BD}} \qquad \mathrm{BH} = \cos\left(\frac{\pi}{p}\right), \mathrm{BD} = l \text{より}$$
$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{l} \qquad (12)\text{より}$$
$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}\right)}$$
$$= \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}$$

■

以下、３次元正多角形(p,q)のペトリー多角形の辺数を$h_{p,q}$とおく。

$AB = 1$すると、

$$\mathrm{AC} = \csc\left(\frac{\pi}{p}\right), \quad \mathrm{BC} = \cot\left(\frac{\pi}{p}\right)$$

式(8)より

この記事は

この記事は

$$\mathrm{AD} = R = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}} \qquad (19)\text{より}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)} \tag{20}$$

式(12)より

$$\mathrm{BD} = \ l = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}} \qquad (19)\text{より}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)} \tag{21}$$

式(10)より

$$\mathrm{CD} = r = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}} \qquad (19)\text{より}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)} = \frac{\cot\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)} \tag{22}$$

さらに、四面体TQPAは双対 4 次元正多面体(r, q)の基本単体の胞である。

QT $=b$とおき、(p, q)の基本単体ABCDのときの公式を用いる。

$$\mathrm{PT} = b\csc\left(\frac{\pi}{r}\right), \qquad \mathrm{PQ} = \mathrm{b}\cot\left(\frac{\pi}{r}\right)$$

式(8)より

（$\mathrm{AB} = 1$に対応する辺が$\mathrm{QT} = b$だから）

$$\mathrm{TA} = \frac{b\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}} \qquad (19)\text{より}$$

$$= \frac{b\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)} \tag{23}$$

式(12)より

$$\mathrm{QA} = \frac{b\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}} \qquad (19)\text{より}$$

$$= \frac{b\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)} \tag{24}$$

式(10)より

$$\mathrm{PA}=\frac{b\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}\qquad (19)\text{より}$$

$$=\frac{b\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}=\frac{b\cot\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)} \tag{25}$$

ここで

$$\varDelta^2=\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right) \tag{26}$$

とおくと、

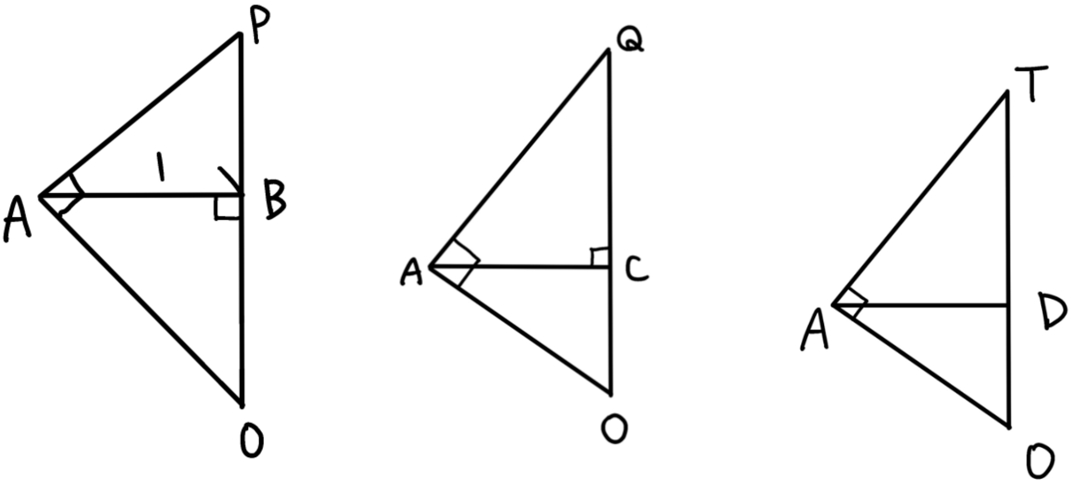
$$b=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)} \tag{27}$$

$$\mathrm{OA}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\varDelta}$$

$$b=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)} \tag{27}$$

$$\mathrm{OA}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\varDelta} \tag{28}$$

（(27), (28)の算出）



△ APOと△ BPAが相似なので

$$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=\mathrm{OA}:\mathrm{AB}$$

$$\mathrm{OA}=\frac{\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AB}}{\mathrm{BP}}=\frac{\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AB}}{\sqrt{\mathrm{AP}^2-\mathrm{AB}^2}}\ldots(\mathcal{G})$$

$\triangle$ AQOと$\triangle$ CQAが相似なので

$$\mathrm{AQ}:\mathrm{CQ}=\mathrm{OA}:\mathrm{AC}$$

$$\mathrm{OA}=\frac{\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AC}}{\mathrm{CQ}}=\frac{\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AC}}{\sqrt{\mathrm{AQ}^2-\mathrm{AC}^2}}\ldots(\mathcal{H})$$

$\triangle$ ATOと$\triangle$ DTAが相似なので

$$\mathrm{AT}:\mathrm{DT}=\mathrm{OA}:\mathrm{AD}$$

$$\mathrm{OA}=\frac{\mathrm{AT}\cdot\mathrm{AD}}{\mathrm{DT}}=\frac{\mathrm{AT}\cdot\mathrm{AD}}{\sqrt{\mathrm{AT}^2-\mathrm{AD}^2}}\ldots(\mathcal{J})$$

$(\mathcal{G}),(\mathcal{H})$より

$$\frac{\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AB}}{\sqrt{\mathrm{AP}^2-\mathrm{AB}^2}}=\frac{\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{AC}}{\sqrt{\mathrm{AQ}^2-\mathrm{AC}^2}}$$

この式に$\mathrm{AB}=1,\mathrm{AC}=\csc\left(\frac{\pi}{p}\right)$, 式(24), (25)を代入すると

$$\frac{\left(\dfrac{b\cot\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}\cdot 1\right)}{\left(\sqrt{\left(\dfrac{b\cot\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}\right)^2-1^2}\right)}=\frac{\left(\dfrac{b\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}\cdot\csc\left(\frac{\pi}{p}\right)\right)}{\left(\sqrt{\left(\dfrac{b\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}\right)^2-\csc^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\dfrac{b\cot\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}\right)}{\left(\sqrt{\dfrac{b^2\cot^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}-1}\right)}=\frac{\left(\dfrac{b\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}\cdot\dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\right)}{\left(\sqrt{\dfrac{b^2\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}-\dfrac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{b\cot\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)}{\sqrt{b^2\cot^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}}=\frac{\left(\dfrac{b\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\right)}{\left(\sqrt{b^2\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)-\dfrac{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{b\cot\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)}{\sqrt{b^2\cot^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}}=\frac{b\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sqrt{b^2\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}}\ldots(\mathcal{K})$$

$(\mathcal{J})$よりbを求める。$(\mathcal{J})$の両辺をbで割ると

$$\frac{\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)}{\sqrt{b^2\cot^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sqrt{b^2\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}}$$

両辺を$\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)$で割ると

$$\frac{\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)}\right)}{\sqrt{b^2\cot^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{b^2\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}}$$

$$\Rightarrow\frac{\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)}\cdot\sqrt{b^2\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}$$

$$=1\cdot\sqrt{b^2\cot^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}$$

両辺を２乗すると

$$\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}\left(b^2\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\right)=b^2\cot^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)$$

$$\Leftrightarrow b^2\cot^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}$$

$$=b^2\cot^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)$$

$$\Leftrightarrow b^2\cot^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-1\right)=\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\left(\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow b^2\cot^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)=\frac{\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\left(\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-1}$$

$$=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\right)}{-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}$$

$$\Leftrightarrow b^2=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\right)}{-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cot^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}$$

$$=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)-1+\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\right)}{-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cdot\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}\qquad (19)\text{より}$$

$$=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\left(-\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\right)}{-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}$$

$$=\frac{\sin^4\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}$$

$$\Rightarrow b=\sqrt{\frac{\sin^4\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}\ldots(\mathcal{L})$$

$(\mathcal{J})$に(20), (23)を代入すると

$$\mathrm{OA}=\frac{\mathrm{AT}\cdot\mathrm{AD}}{\sqrt{\mathrm{AT}^2-\mathrm{AD}^2}}$$

$$=\frac{\left(\frac{b\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{b\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}\right)^2-\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)}\right)^2}\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{b\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)}\right)}{\left(\sqrt{\frac{b^2\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}-\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)}}\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{b\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)}\right)}{\left(\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)\sqrt{\frac{b^2\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)}}\right)}$$

$$=\frac{b\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sqrt{b^2\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}}\qquad (\mathcal{L})\text{を代入}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}\right)^2\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}\right)}{\left(\sqrt{\frac{\sin^4\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}-\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}\right)}{\left(\sqrt{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}-1}\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}\right)}{\left(\sqrt{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}\right)}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}\qquad (19)\text{より}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}\right)^2\left(\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}\right)^2-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sqrt{\left(1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)\left(1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sqrt{\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\right)\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\left(1-\sin^2\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)\right)}}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sqrt{\sin^4\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)-(\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right))\sin^2\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)}}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)-(\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right))+\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)-1+1-(\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right))+\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\sqrt{-\cos^2\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)+\left(1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\right)\left(1-\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\right)}}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)}}\qquad \text{(26)より}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\sqrt{\varDelta^2}}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\varDelta}$$

■

$$\mathrm{OB}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\varDelta}\qquad(29)$$

（(29)の算出）

△ ABOと△ PBAが相似なので

$$\mathrm{AB:PB}=\mathrm{OB:AB}$$

$$\mathrm{OB}=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AB}}{\mathrm{PB}}=\frac{\mathrm{AB}^2}{\sqrt{\mathrm{AP}^2-\mathrm{AB}^2}}\qquad \text{(25)と AB = 1 より}$$

この

$$
=\frac{1^2}{\sqrt{\left(\dfrac{b\cot\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}\right)^2-1^2}}
$$

$$
=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{b^2\cot^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}}} \qquad (27)\text{より}
$$

$$
=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{\left(\dfrac{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}\right)^2\cot^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}}}
$$

$$
=\frac{1}{\left(\sqrt{\dfrac{\left(\dfrac{\sin^4\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\cot^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{\mathrm{q}}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}-\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}}\right)}
$$

$$
=\frac{1}{\left(\sqrt{\dfrac{\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\left(\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)}\right)^2\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}-1}\right)}
$$

$$
=\frac{1}{\left(\sqrt{\dfrac{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}-1}\right)}
$$

$$
=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}} \qquad (19)\text{より}
$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}\right)^2-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\left(1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}} \qquad \text{(26)より}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sqrt{\varDelta^2}}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\varDelta}$$

■

$$\mathrm{OC}=\frac{\cot\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\varDelta} \tag{30}$$

（(30)の算出）

△ ACOと△ QCAが相似なので

$$\mathrm{AC:QC}=\mathrm{OC:AC}$$

$$\mathrm{OC}=\frac{\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AC}}{\mathrm{QC}}=\frac{\mathrm{AC}^2}{\sqrt{\mathrm{AQ}^2-\mathrm{AC}^2}} \qquad \mathrm{AC}=\csc\left(\frac{\pi}{p}\right),\text{(24)より}$$

$$=\frac{\csc^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sqrt{\left(\frac{b\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}\right)^2-\csc^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}\right)}{\left(\sqrt{\frac{b^2\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}-\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}\right)} \qquad \text{(27)より}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}\right)}{\left(\sqrt{\frac{\left(\left(\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)} - \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}\right)}{\left(\sqrt{\frac{\left(\frac{\sin^4\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)} - \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}\right)}{\left(\sqrt{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)} - \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}\right)}{\left(\sqrt{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}} \qquad (19)\text{より}$$

$$=\frac{\cot\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}\right)^2\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}$$

$$=\frac{\cot\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sqrt{\left(1-\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}$$

$$=\frac{\cot\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sqrt{\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\left(1-\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}$$

$$=\frac{\cot\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}$$

$$=\frac{\cot\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}} \qquad \text{(26)より}$$

$$=\frac{\cot\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sqrt{\varDelta^2}}=\frac{\cot\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\varDelta}$$

■

$$\mathrm{OD}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)\varDelta} \qquad (31)$$

（(31)の算出）

△ ADOと△ TDAが相似なので

$$\mathrm{AD}:\mathrm{TD}=\mathrm{OD}:\mathrm{AD}$$

$$\mathrm{OD}=\frac{\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AD}}{\mathrm{TD}}=\frac{\mathrm{AD}^2}{\sqrt{\mathrm{AT}^2-\mathrm{AD}^2}} \qquad \text{(20), (23)より}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)}\right)^2}{\left(\sqrt{\left(\frac{b\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}\right)^2-\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)}\right)^2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{q}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{h_{p,q}}\right)}\right)}{\left(\sqrt{\dfrac{b^2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{q}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{h_{r,q}}\right)} - \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{q}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{h_{p,q}}\right)}}\right)}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{q}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{h_{p,q}}\right)}\right)}{\left(\sqrt{\dfrac{b^2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{q}\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{h_{p,q}}\right) - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{q}\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{h_{r,q}}\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{h_{p,q}}\right)}}\right)}$$

$$= \frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{q}\right)}{\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{h_{p,q}}\right)\sqrt{\dfrac{b^2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{q}\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{h_{p,q}}\right) - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{q}\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{h_{r,q}}\right)}}\right)} \qquad \text{(27)より}$$

$$= \frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{q}\right)}{\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{h_{p,q}}\right)\sqrt{\dfrac{\left(\left(\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{p}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{r}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{q}\right)}\right)^2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{q}\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{h_{p,q}}\right) - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{q}\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{h_{r,q}}\right)\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{h_{r,q}}\right)}}\right)}$$

$$= \frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{q}\right)}{\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{h_{p,q}}\right)\sqrt{\dfrac{\left(\dfrac{\sin^4\left(\dfrac{\pi}{h_{r,q}}\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{q}\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{h_{p,q}}\right)}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\dfrac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\dfrac{\pi}{q}\right)} - \sin^2\left(\dfrac{\pi}{q}\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{h_{r,q}}\right)\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{h_{r,q}}\right)}}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{q}\right)}{\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{h_{p,q}}\right)\sqrt{\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{h_{r,q}}\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{h_{p,q}}\right)}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\dfrac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\dfrac{\pi}{q}\right)} - 1}\right)} \qquad \text{(19)より}$$

$$
=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)\sqrt{\left(\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}\right)^2\left(\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}\right)^2-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}
$$

$$
=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)\sqrt{\left(1-\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)\left(1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}
$$

$$
=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)\sqrt{\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\right)\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\left(1-\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)}}
$$

$$
=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{q}\right)\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)\sqrt{\sin^4\left(\frac{\pi}{q}\right)-\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}
$$

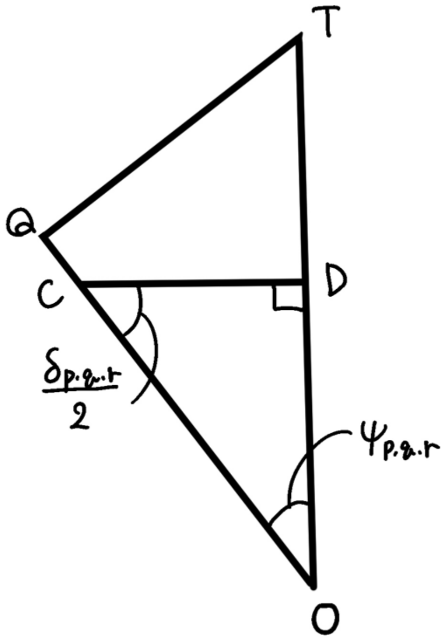
$$
=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)-1+1-\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}}
$$

$$
=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)\sqrt{-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)+\left(1-\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\right)\left(1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\right)}}
$$

$$
=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}\qquad \text{(26)より}
$$

$$
=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)\sqrt{\varDelta^2}}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)\varDelta}
$$

■



ここで四次元正多面体の二面角$\delta_{p,q,r}$、２つの隣り合う胞が４次元空間$\mathbb{R}^4$内でなす角の半分$\frac{\delta_{p,q,r}}{2}$は$\angle\mathrm{OCD}$であり

$$\sin\left(\frac{\delta_{p,q,r}}{2}\right)=\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OC}}\qquad (30),(31)\text{より}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)\varDelta}\right)}{\left(\dfrac{\cot\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\varDelta}\right)}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)\cot\left(\frac{\pi}{p}\right)}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)\cdot\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)}\tag{32}$$

ここで式(32)に式(19)を代入すると

$$
\frac{\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}
$$

$$
=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sqrt{\frac{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}}
$$

$$
=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sqrt{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}}
$$

$$
=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sqrt{1-\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}}}
$$

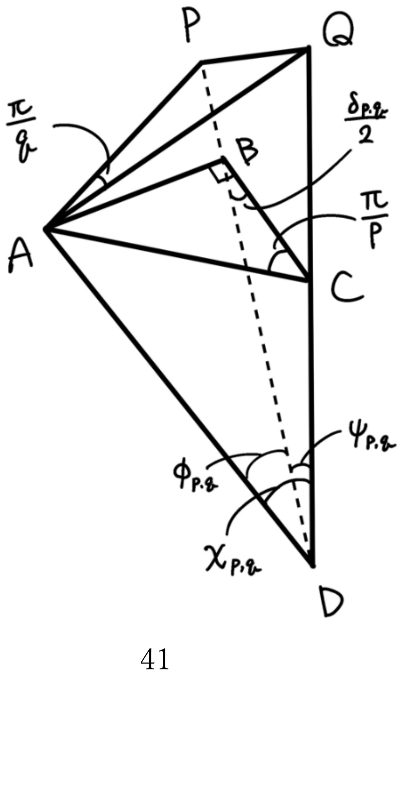
式(6)を代入すると

$$
=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\delta_{p,q}}{2}\right)}}
$$

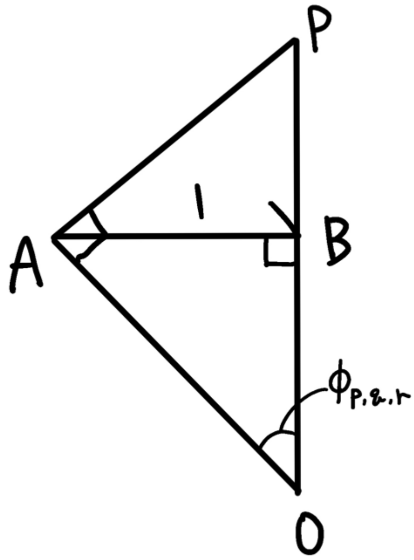
$$
=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\cos\left(\frac{\delta_{p,q}}{2}\right)} \tag{33}
$$

この$\frac{\delta_{p,q}}{2}$は３次元正多面体(p,q)の二面角の半分∠CBDのことである。

３次元正多面体の$\phi_{p,q},\psi_{p,q},\chi_{p,q}$に対応する角は



$$\phi_{p,q,r} = \angle\mathrm{AOB}$$



$$\cos(\phi_{p,q,r}) = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} \qquad \text{式(28)と式(29)より}$$

$$= \frac{\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\varDelta}\right)}{\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\varDelta}\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)} \qquad \text{式(19)より}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sqrt{\frac{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}}}$$

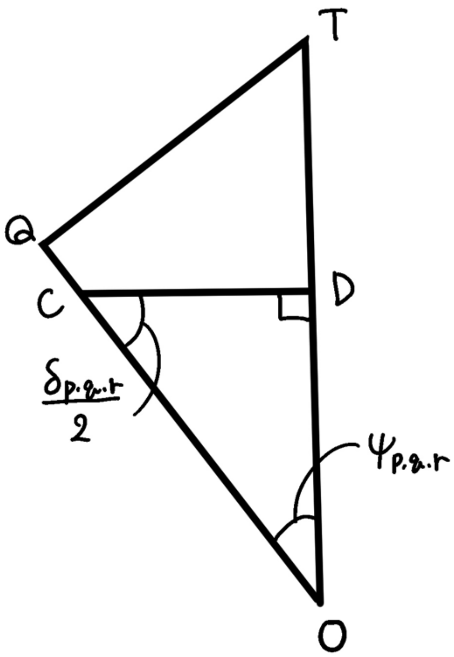
$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sqrt{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}}}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sqrt{1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}}} \qquad \text{式(9)より}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sqrt{1 - \cos^2(\phi_{r,q})}}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sin(\phi_{r,q})} \tag{34}$$

$$\psi_{p,q,r} = \angle \mathrm{COD}$$



$$\cos(\psi_{p,q,r}) = \frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OC}} \qquad \text{式(30)と式(31)より}$$

$$= \frac{\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)\varDelta}\right)}{\left(\frac{\cot\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\varDelta}\right)}$$

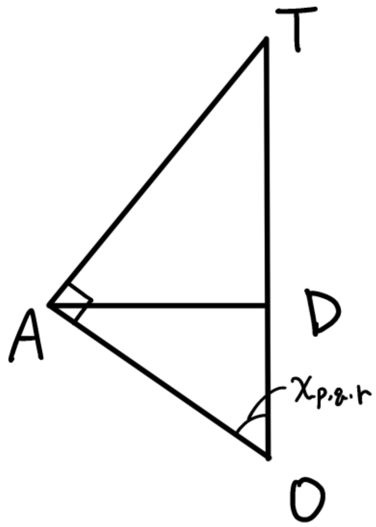
$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\cot\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)\right)} \qquad \text{式(19)より}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\left(\frac{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\right)} \qquad \text{式(7)より}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sin\left(\psi_{p,q}\right)} \tag{35}$$

$$\chi_{p,q,r} = \angle \mathrm{AOD}$$



$$\cos\left(\chi_{p,q,r}\right) = \frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OA}} \qquad \text{式(28)と式(31)より}$$

$$= \frac{\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)\varDelta}\right)}{\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)}{\varDelta}\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{h_{p,q}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{h_{r,q}}\right)} \tag{36}$$

$\frac{\delta_{p,q,r}}{2} \coloneqq \frac{\pi}{2} - \psi_{p,q,r}$、すなわち$\delta_{p,q,r} = \pi - 2\psi_{p,q,r}$とする。

ここで、各4次元正多面体(p,q,r)の$\delta_{p,q,r}$を求める。

$(p,q,r)=(3,3,3)$のとき

式(32)と式(19)より

$$\sin\left(\frac{\delta_{p,q,r}}{2}\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\frac{\delta_{p,q,r}}{2}=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)\approx 37.76°$$

$(p,q,r)=(3,3,4)$のとき

式(32)と式(19)より

$$\sin\left(\frac{\delta_{p,q,r}}{2}\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\delta_{p,q,r}}{2}=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=60°$$

$(p,q,r)=(3,3,5)$のとき

式(32)と式(19)より

$$\sin\left(\frac{\delta_{p,q,r}}{2}\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{\delta_{p,q,r}}{2}=\sin^{-1}\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\sqrt{6}}{2}\right)\approx 82.24°$$

$(p,q,r)=(3,4,3)$のとき

式(32)と式(19)より

$$\sin\left(\frac{\delta_{p,q,r}}{2}\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\delta_{p,q,r}}{2}=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=60°$$

$(p,q,r)=(4,3,3)$のとき

式(32)と式(19)より

$$\sin\left(\frac{\delta_{p,q,r}}{2}\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\delta_{p,q,r}}{2}=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=45°$$

$(p,q,r)=(5,3,3)$のとき

式(32)と式(19)より

$$\sin\left(\frac{\delta_{p,q,r}}{2}\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{2\sqrt{\frac{3}{4}-\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}}$$

$$\frac{\delta_{p,q,r}}{2}=\sin^{-1}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{2\sqrt{\frac{3}{4}-\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}}\right)=72°$$

表２－３

(p,q,r)	$\frac{\delta_{p,q,r}}{2}$
(3,3,3)	37.76°
(4,3,3)	45°
(3,4,3)	60°
(3,3,4)	60°
(5,3,3)	72°
(3,3,5)	82.24°

ここで一度、凸５次元の正多面体を考える。５次元の正多面体は４次元正多面体(r,p,q)を５次元正多面体の２次元の面に一定数集まっている。それをs個とする。よって５次元正多面体を以下(p,q,r,s)と書く。ただし$s\geq 3$であることに注意する。凸なので４次元正多面体の二面角$\delta_{p,q,r}$のs倍が2π未満であること、

$$s\delta_{p,q,r}<2\pi$$
$$\frac{\delta_{p,q,r}}{2}<\frac{\pi}{s}$$

が必要である。

表２－３より、

(3,3,3)のとき

$$37.76°<\frac{\pi}{s}$$

上記を満たす$s\geq 3$は

$$s=3,4$$

(4,3,3)のとき

$$45°<\frac{\pi}{s}$$

上記を満たす$s\geq 3$は

$$s=3$$

表２－３より(3,4,3)以降のとき

$$60°\leq\frac{\delta_{p,q,r}}{2}\text{であるから}$$

$$60° < \frac{\pi}{s}$$

上記を満たす$s \geq 3$は存在しない

ゆえに$(3,3,3,3), (3,3,3,4), (4,3,3,3)$の３つのみが５次元正多面体として存在する。

次に５次元正多面体の構成要素の個数を考える。以下表面の４次元正多面体を房と呼ぶ。５次元正多面体(p,q,r,s)の点、辺、面、胞、房の数をM_0, M_1, M_2, M_3, M_4とする。各房に胞がN_3個ずつあり、各胞は２つの房に共通しているので

$$M_4 N_3 = 2M_3$$

ここで節２－０の最後に定めた$\Lambda(p,q,r)$を使って、N_3を表すと

$$M_4 \frac{\Lambda(p,q,r)}{E(p,q)} = 2M_3 \tag{37}$$

各胞に$\frac{2E(p,q)}{p}$個ずつの面があり、各面にs個ずつの胞が会するので

$$M_3 \frac{2E(p,q)}{p} = sM_2 \tag{38}$$

M_0, M_1については、各頂点の状況が房に対する５次元双対正多面(s,r,q,p)の房(s,r,q)を射影した正多面体錐の形になり、各辺に$\frac{2E(s,r)}{s}$個ずつの面が会し、各面の辺はp個ずつだから

$$M_1 \frac{2E(s,r)}{s} = pM_2 \tag{39}$$

また、もとの５次元正多面体の各頂点に、５次元双対正多面(s,r,q,p)の房(s,r,q)のN_3個ずつの辺が会し、もとの５次元正多面体で各辺の端点は2個ずつだから

$$M_0 N_3 = 2M_1$$

ここで$\Lambda(s,r,q)$を使って、N_3を表すと

$$M_0 \frac{\Lambda(s,r,q)}{E(s,r)} = 2M_1 \tag{40}$$

式(37)を変形して

$$M_3 = M_4 \frac{\Lambda(p,q,r)}{2E(p,q)} \cdots (i)$$

上記の式を式(38)に代入すると

$$M_4 \frac{\Lambda(p,q,r)}{2E(p,q)} \cdot \frac{2E(p,q)}{p} = sM_2$$

$$\Leftrightarrow M_2 = \frac{M_4 \Lambda(p,q,r)}{sp} \cdots (j)$$

式(40)を変形して

$$M_1 = M_0 \frac{\Lambda(s,r,q)}{2E(s,r)} \cdots (k)$$

上記の式を式(39)に代入すると

$$M_0 \frac{\Lambda(s,r,q)}{2E(s,r)} \cdot \frac{2E(s,r)}{s} = pM_2$$

$$\Leftrightarrow M_2 = \frac{M_0 \Lambda(s,r,q)}{sp} \ldots (\ell)$$

$(\mathscr{j})$を上記の式に代入すると

$$\frac{M_4 \Lambda(p,q,r)}{sp} = \frac{M_0 \Lambda(s,r,q)}{sp}$$

$$\Leftrightarrow M_4 = \frac{M_0 \Lambda(s,r,q)}{\Lambda(p,q,r)} \ldots (m)$$

$(\imath)$に上記の式を代入すると

$$M_3 = \frac{M_0 \Lambda(s,r,q)}{\Lambda(p,q,r)} \cdot \frac{\Lambda(p,q,r)}{2E(p,q)} = \frac{M_0 \Lambda(s,r,q)}{2E(p,q)} \ldots (n)$$

となる。$(\mathscr{k}), (\ell), (m), (n)$より

$$M_0 : M_1 : M_2 : M_3 : M_4 = M_0 : M_0 \frac{\Lambda(s,r,q)}{2E(s,r)} : \frac{M_0 \Lambda(s,r,q)}{sp} : \frac{M_0 \Lambda(s,r,q)}{2E(p,q)} : \frac{M_0 \Lambda(s,r,q)}{\Lambda(p,q,r)}$$

$$= 1 : \frac{\Lambda(s,r,q)}{2E(s,r)} : \frac{\Lambda(s,r,q)}{sp} : \frac{\Lambda(s,r,q)}{2E(p,q)} : \frac{\Lambda(s,r,q)}{\Lambda(p,q,r)}$$

$$= \frac{1}{\Lambda(s,r,q)} : \frac{1}{2E(s,r)} : \frac{1}{sp} : \frac{1}{2E(p,q)} : \frac{1}{\Lambda(p,q,r)} \tag{41}$$

式(41)の比例定数をμとする。

5 次元のオイラー・ポアンカレの公式は

$$M_0 + M_2 + M_4 = M_1 + M_3 + 2$$

である、式(41)を代入すると

$$\frac{1}{\Lambda(s,r,q)} + \frac{1}{sp} + \frac{1}{\Lambda(p,q,r)} = \frac{1}{2E(s,r)} + \frac{1}{2E(p,q)} + \frac{2}{\mu}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} - 1\right) + \frac{2}{\mu} \quad (\because (14)) \tag{42}$$

今 4 次元空間$\mathbb{R}^4$の無限個の 4 次元正多面体となるの充填型を考える。$\mu = \infty$とし、この式の末尾の$\frac{2}{\mu}$を0で置き換え、(4,3,3,4)の構成を考える。$\Lambda(p,q,r) = \Lambda(r,q,p)$であることに注意する。

$$\frac{2}{\Lambda(4,3,3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 1\right) - \frac{1}{16}$$

$$= \frac{1}{48}$$

$$\Lambda(4,3,3) = 96$$

これで(4,3,3)の要素の個数が決定する。表２－１より

$$N_0 = \frac{1}{6} \cdot 96 = 16$$

$$N_1 = \frac{1}{3} \cdot 96 = 32$$

$$N_2 = \frac{1}{4} \cdot 96 = 24$$

$$N_3 = \frac{1}{12} \cdot 96 = 8$$

$$\Lambda(p,q,r) = \Lambda(r,q,p) \text{であるから}, \Lambda(3,3,4) = \Lambda(4,3,3) = 96$$

これで(3,3,4)の要素の個数が決定する。表２－１より

$$N_0 = \frac{1}{12} \cdot 96 = 8$$
$$N_1 = \frac{1}{4} \cdot 96 = 24$$
$$N_2 = \frac{1}{3} \cdot 96 = 32$$
$$N_3 = \frac{1}{6} \cdot 96 = 16$$

さらに

(3,3,4,3)とその双対(3,4,3,3)は 4 次元の充填型である。 今(3,3,4,3)の構成を考える

$$\frac{1}{\Lambda(3,4,3)} + \frac{1}{\Lambda(3,3,4)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) - \frac{1}{9}$$
$$\frac{1}{\Lambda(3,4,3)} + \frac{1}{96} = \frac{1}{8} - \frac{1}{9} = \frac{1}{72}$$
$$\frac{1}{\Lambda(3,4,3)} = \frac{1}{288}$$
$$\Lambda(3,4,3) = 288$$

これで(3,4,3)の要素の個数が決定する。表２－１より

$$N_0 = \frac{1}{12} \cdot 288 = 24$$
$$N_1 = \frac{1}{3} \cdot 288 = 96$$
$$N_2 = \frac{1}{3} \cdot 288 = 96$$
$$N_3 = \frac{1}{12} \cdot 288 = 24$$

ここで(4,3,3,3)を考える。(4,3,3,3)は 5 次元の正多面体として可能なので、式(42)より

$$\frac{1}{\Lambda(3,3,3)} + \frac{1}{\Lambda(4,3,3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1\right) + \frac{2}{\mu} - \frac{1}{12}$$
$$\frac{1}{\Lambda(3,3,3)} = \frac{1}{24} + \frac{2}{\mu} - \frac{1}{96} = \frac{1}{32} + \frac{2}{\mu} > \frac{1}{32}$$
$$\Lambda(3,3,3) < 32$$

これだけでは$\Lambda(3,3,3)$は定まらないが、要素は整数個であることと表２－１より$\Lambda(3,3,3)$は6の倍数であることと、胞が 5 個以上でないと 4 次元の有限部分が囲めないことから

$$\Lambda(3,3,3) \geq 6 \times 5 = 30$$

条件を満たすのは

$$\Lambda(3,3,3) = 30$$

これで(3,3,3)の要素の個数が決定する。表２－１より

$$N_0 = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5$$
$$N_1 = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10$$
$$N_2 = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10$$

$$N_3 = \frac{1}{6} \cdot 30 = 5$$

５次元の(5,3,3,3)が不可能なため、この方法では$\Lambda(3,3,5), \Lambda(5,3,3)$を決定できず、他の方法を考えなければいけない。

表２－４

(p, q, r)	N_0	N_1	N_2	N_3
(3,3,3)	5	10	10	5
(3,3,4)	8	24	32	8
(4,3,3,)	16	32	24	8
(3,4,3)	24	96	96	24
(3,3,5)				
(5,3,3)				

３．参考文献

一松信　「高次元の正多面体」　日本評論社　1983

H.S.M.コクセター　「正多胞体__高次元正多面体原論」　丸善出版　2022

一松信　「正多面体を解く」　東海大学出版部　２００２