

長さって不思議!? 続

asterisk

2026 年 10 月

1 いきさつ

昨年を目白祭では、サイクロイド曲線、エピサイクロイド曲線、ハイポサイクロイド曲線、3種類の曲線について、その長さの収束に関する研究を行った。いずれの曲線も、与えられた直線/円上に置いた円を滑らずに転がしたときの円上の定点の軌跡として得られる。転がす円の半径が0に近づくとき、3つの曲線は直線/円に近づくように見える。しかし、直線/円の長さが 2π であるとき、3つの曲線の長さの極限值は8であり、見た目の長さである 2π とはズレることがわかった。また、それぞれの曲線で収束の様子が異なることもわかった。直線や円は曲率が一定という特徴があるため、ほかの曲率が定数でない曲線についてもこのような現象が起こるのかはわからなかった。それを踏まえて今回はカタナリーと呼ばれる曲率が定数でない曲線を用いて、同様の現象が生じるかどうかを調べたいと考えた。

2 概要

今回、 $y = \cosh x$ のグラフであるカタナリー（懸垂曲線）と呼ばれる曲線の下側を滑らずに転がる円の半径を限りなく0に近づけたとき、見た目のカタナリーそのものへの収束と長さの収束について観察する。

まず、カタナリー上の点 $(0, 1)$ から x 軸方向に長さ 2π の部分を考える。点 $(0, 1)$ でカタナリーと接する半径 $\frac{1}{n}$ の円をカタナリーの下側におき、それを滑らせずに転がしたときの点 $(0, 1)$ の軌跡のなす曲線を T_n とし、その長さを考える。この曲線 T_n は図1の青色で描かれているものであるが、その長さを直接求めることは困難なので、軌跡の曲線 T_n の長さを下から近似したものの上から近似したものを $n \rightarrow \infty$ での極限を観察し、実際の軌跡の長さがどのような値に収束すると考えられるかを調べる。

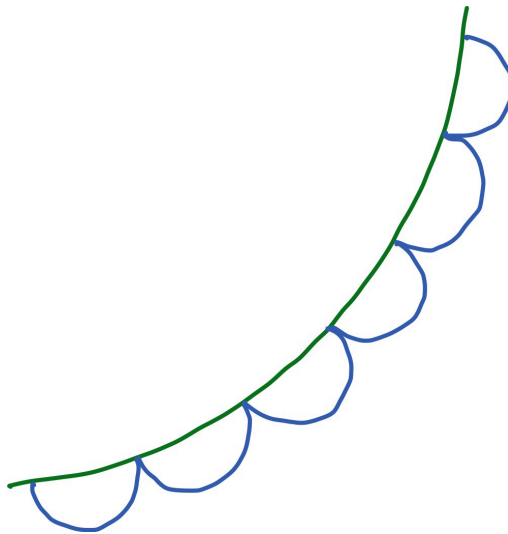


図 1: 今考えている曲線 T_n (青), ($n = 6$)

主結果として、次のことがわかった。

定理 2.1. T_n の長さは $n \rightarrow \infty$ で収束するのならば、区間 $[l_-, l_+]$ に含まれる。ただし

$$l_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left(\sqrt{1 + 4\pi^2} - 1 \right) + \frac{\sqrt{1 + 4\pi^2} - 1}{\pi} + \pi(\sqrt{5} - 1) \right\} \approx 7.74$$

$$l_+ = 4 + 2\pi \approx 10.28.$$

以下、3 節で上からの近似（命題 3.1）、4 節で下からの近似（命題 4.1）を示すことで定理 2.1 を証明する。

3 上からの近似

点 $(0, 1)$ においてカテナリーと接する半径 $\frac{1}{n}$ の円をカテナリー上を滑らずに右に転がしたときの点 $(0, 1)$ の軌跡の曲線を T_n とする。曲線 T_n 上の点でカテナリーの距離が $\frac{2}{n}$ となる点を左から順に、 P_m ($m = 1, 2, \dots, n$) とする。円はカテナリー上で n 回転するため、曲線 T_n には n 個のアーチが出来上がる。この T_n に対して図 2 のように、アーチ部分（青線）をコの字で上から囲う（桃色線、赤実線）ように近似する。ただし、コの字の天井部分の一辺はカテナリーの一部をその外向き法線方向へ（図 2 の赤点線に沿って）長さ $\frac{2}{n}$ 分だけ平行移動させたものとする。また、天井以外の 2 本は天井の両端からカテナリーに向けて線分を伸ばし長さがちょうど $\frac{2}{n}$ になるようにする。すると、このアーチを囲うコの字の総和は、

$$\text{長さ } l_+ := \text{直径} \times 2 \times \text{個数} + \text{カテナリー (長さ: } 2\pi \text{分)} = \frac{2}{n} \cdot 2 \cdot n + 2\pi = 4 + 2\pi \approx 10.28$$

となる。よって次が示された。

命題 3.1. T_n の長さは $n \rightarrow \infty$ で収束するのならば、 l_+ より小さい。

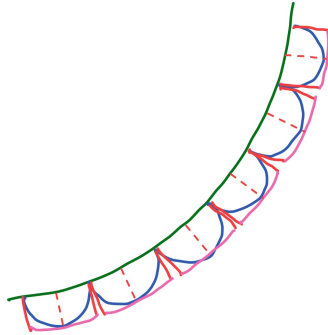


図 2: 上からの近似

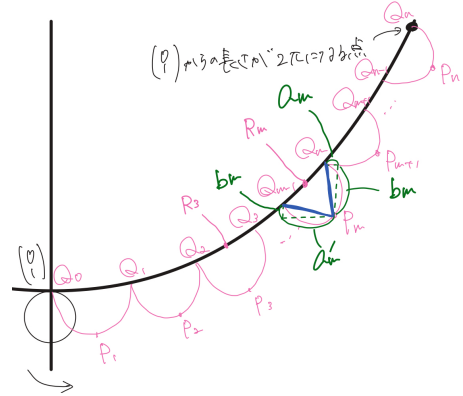


図 3: 下からの近似

4 下からの近似

下からの近似も上からの近似と同様に考える。点 $(0, 1)$ においてカテナリーと接する半径 $\frac{1}{n}$ の円をカテナリー上を滑らせずに右に転がしたときの点 $(0, 1)$ の軌跡を T_n とする。曲線 T_n 上の点でカテナリーの距離が $\frac{2}{n}$ となる点を左から順に P_m ($m = 1, 2, \dots, n$) とする。曲線 T_n はカテナリーを滑らずに円が n 回転することで描かれているため、この曲線 T_n には n 個のアーチが出来上がる。また、最初にカテナリーに接していた点 $(0, 1)$ が再びカテナリーと接する点を左から順に Q_m ($m = 1, 2, \dots, n$) とする。

曲線 T_n は図 3 での桃色の曲線のようになり、グラフの概形より任意の m に対して、 $P_m - Q_{m-1}$ の x 成分 a_m とし、これは常に正をとる。また、 $P_m - Q_{m-1}$ の y 成分 b_m とすると、これは一部の m に対して負になる場合もあるが、多くの場合は正となる。同様にして、 $P_m - Q_m$ の x 成分 a'_m とする。これも b_m のように一部では負になるが、ほとんどの m に対して正をとる。 $P_m - Q_m$ の y 成分 b'_m とすると、これは常に負になることがわかる。このことから、下からの近似の値を、それぞれの x 成分の総和と y 成分の総和の絶対値の和を求め $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍して求める。

4.1 計算準備

カテナリー $C: y = \cosh x$ 上で、半径 $\frac{1}{n}$ の円を点 $(0, 1)$ から滑らずに転がすと、 n 回転した後に、カテナリー上で点 $(0, 1)$ からの長さ 2π の点に到達する。カテナリー $C: y = \cosh x$ のパラメータ表示で表すと、

$$C(x) = \begin{pmatrix} x \\ \cosh x \end{pmatrix}$$

となる。また補題 7.1 より、

$$C(x) = \begin{pmatrix} x \\ \cosh x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{arcsinh} s \\ \sqrt{1+s^2} \end{pmatrix} =: C_1(s)$$

と表せる ($C_1(s)$ は s に $(0, 1)$ からの長さを入力する関数)。カテナリー上を転がる円の軌跡である曲線 T_n について、 m 回転後の接点 Q_m はカテナリー上の点であり、接点 Q_m は点 $(0, 1)$ から長さ 2π のカテナリーを n 等分したうちの円が転がり始めてから m 番目の接点である。つまり、 $s = \frac{2m\pi}{n}$ となる点ゆえ、 $Q_m = C_1\left(\frac{2m\pi}{n}\right)$ とし表すことができる。したがって、

$$Q_m = C_1\left(\frac{2m\pi}{n}\right) = \begin{pmatrix} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{2m\pi}{n}\right) \\ \sqrt{1 + \left(\frac{2m\pi}{n}\right)^2} \end{pmatrix}$$

と表せる。ここで補題 7.2 よりを用いると、

$$Q_m = C_1\left(\frac{2m\pi}{n}\right) = \begin{pmatrix} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{2m\pi}{n}\right) \\ \sqrt{1 + \left(\frac{2m\pi}{n}\right)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log\left(\frac{2m\pi}{n} + \sqrt{1 + \left(\frac{2m\pi}{n}\right)^2}\right) \\ \sqrt{1 + \left(\frac{2m\pi}{n}\right)^2} \end{pmatrix}$$

と表すことができる。また、今後の計算で必要になるため、 Q_{m-1} も求めておく。

$$Q_{m-1} = \begin{pmatrix} \log\left(\frac{2(m-1)\pi}{n} + \sqrt{1 + \left(\frac{2(m-1)\pi}{n}\right)^2}\right) \\ \sqrt{1 + \left(\frac{2(m-1)\pi}{n}\right)^2} \end{pmatrix}$$

次に、 P_m の座標を m を用いて表す。 P_m は円が $m-1$ 回転した後、 π 回転したときの曲線 T_n 上の点であるから、カテナリーから接線の垂直方向に $\frac{2}{n}$ だけ移動した点と考えればよい。まずは、カテナリー上で点 $(0, 1)$ からの長さ $\frac{2(m-1)\pi}{n} + \frac{\pi}{n} = \frac{(2m-2)\pi + \pi}{n} = \frac{(2m-1)\pi}{n}$ の点 R_m を求める。この条件を満たすカテナリー上の点は、 C_1 の関数において、 $s = \frac{(2m-1)\pi}{n}$ のときであるので、

$$R_m = C_1\left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right) = \begin{pmatrix} \log\left(\frac{(2m-1)\pi}{n} + \sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right)^2}\right) \\ \sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right)^2} \end{pmatrix}$$

と表せる。媒介変数 t を用いて、この点 R_m における法線を $\mathbf{r}(t)$ と表すと、 C_1 の単位法線ベクトルとして、 C'_1 を時計回りに $\frac{\pi}{2}$ 回転した $C^\perp$ を取ると、 $\mathbf{r}(t)$ は

$$\mathbf{r}(t) := C_1\left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right) + tC^\perp\left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right)$$

と表せる．点 P_m はカテナリー C と T_n の距離が $\frac{2}{n}$ となるときの T_n 上の点であるから， $\mathbf{r}(t)$ に， $t = \frac{2}{n}$ を代入して，

$$\begin{aligned} P_m &:= \mathbf{r}\left(\frac{2}{n}\right) = C\left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right) + \frac{2}{n}C^\perp\left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \log\left(\frac{(2m-1)\pi}{n} + \sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right)^2}\right) \\ \sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right)^2} \end{pmatrix} + \frac{2}{n} \begin{pmatrix} \frac{\frac{\pi(2m-1)}{n}}{\sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right)^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right)^2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \log\left(\frac{(2m-1)\pi}{n} + \sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right)^2}\right) + \frac{\frac{\pi(2m-1)}{n}}{\sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right)^2}} \\ \sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right)^2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表すことができる．ここで， $P_m - Q_{m-1}$ の x 成分である a_m ， $P_m - Q_{m-1}$ の y 成分である b_m ．また， $P_m - Q_m$ の x 成分である a'_m ， $P_m - Q_m$ の y 成分である b'_m ．これらそれぞれに対して m が 1 から n までの総和の絶対値を求め $n \rightarrow \infty$ の収束値を求める．この収束値を $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍したものを下からの近似値とする．

また以降の計算の補助に ChatGPT, Microsoft Copilot, Wolfram|Alpha を利用した．

4.2 $P_m - Q_m$ の x 成分 a_m の総和の $n \rightarrow \infty$ の極限值

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{m=1}^n a_m \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \left\{ \log\left(\frac{(2m-1)\pi}{n} + \sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right)^2}\right) + \frac{2}{n} \frac{\frac{(2m-1)\pi}{n}}{\sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right)^2}} \right. \\ &\quad \left. - \log\left(\frac{2m\pi}{n} + \sqrt{1 + \left(\frac{2m\pi}{n}\right)^2}\right) \right\} \end{aligned}$$

4.2.1 対数部分の計算

対数部分に補題 7.2 を用いると，

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{(2m-1)\pi}{n} + \sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right)^2}\right) - \log\left(\frac{2m\pi}{n} + \sqrt{1 + \left(\frac{2m\pi}{n}\right)^2}\right) \\ = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right) - \operatorname{arcsinh}\left(\frac{2m\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

と表すことができる．したがって上の式の総和は，

$$\sum_{m=1}^n \left[\operatorname{arcsinh}\left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right) - \operatorname{arcsinh}\left(\frac{2m\pi}{n}\right) \right]$$

であるため，これは各区間 $\left[\frac{(2m-1)\pi}{n}, \frac{2m\pi}{n}\right]$ での曲線 T_n の総和であることを示しており，全体の区間である区間 $[0, 2\pi]$ の半分を占めていることを表しているので，求める極限值は以下のような計算により求められる．（一つ目の等号は補題 7.2 より成立．二つ目の等号は逆双曲線関数の定理より成立．）

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \left\{ \log \left(\frac{(2m-1)\pi}{n} + \sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n} \right)^2} \right) - \log \left(\frac{2m\pi}{n} + \sqrt{1 + \left(\frac{2m\pi}{n} \right)^2} \right) \right\} \\
= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \left\{ \operatorname{arcsinh} \left(\frac{(2m-1)\pi}{n} \right) - \operatorname{arcsinh} \left(\frac{2m\pi}{n} \right) \right\} \\
= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\
= -\frac{1}{2} [\operatorname{arcsinh} x]_0^{2\pi} \\
= -\frac{1}{2} \operatorname{arcsinh}(2\pi) \\
= -\frac{1}{2} \log(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})
\end{aligned}$$

と計算することで求められる。

4.2.2 第2項の計算

第2項である

$$\sum_{m=1}^n \frac{2(2m-1)\pi}{n^2 \sqrt{1 + \left(\frac{2m-1}{n} \right)^2}}$$

について、 $x_m = \frac{2m-1}{n}$, $\Delta x = \frac{2}{n}$ とすると、

$$\frac{2(2m-1)\pi}{n^2} = \pi \cdot \frac{2m-1}{n} \cdot \frac{2}{n} = \pi x_m \Delta x$$

と表せる。したがって、

$$\sum_{m=1}^n \frac{2(2m-1)\pi}{n^2 \sqrt{1 + \left(\frac{2m-1}{n} \right)^2}} = \pi \sum_{m=1}^n \frac{x_m}{\sqrt{1+x_m^2}} \Delta x$$

となる。これも $m=1, \dots, n$ での中点リーマン和であることより、

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{2(2m-1)\pi}{n^2 \sqrt{1 + \left(\frac{2m-1}{n} \right)^2}} &= \pi \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \\
&= \pi \left[\sqrt{1+x^2} \right]_0^2 \\
&= \pi (\sqrt{5} - 1)
\end{aligned}$$

と求められる。

4.2.3 a_m の総和の絶対値の極限值 A の計算

以上より a_m の総和の絶対値の極限値を A とよぶことにすると A は、

$$A := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{m=1}^n a_m \right| = -\frac{1}{2} \log(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}) + \pi(\sqrt{5} - 1)$$

となる。

4.3 $P_m - Q_m$ の y 座標 (成分) b_m の総和の $n \rightarrow \infty$ の極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{m=1}^n b_m \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{2m\pi}{n} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n} \right)^2} + \frac{2}{n} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n} \right)^2}} \right\}$$

4.3.1 最初の 2 項の計算

$f(x) = \sqrt{1+x^2}$ とすると, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ となる. 最初の 2 項は,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{2m\pi}{n} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n} \right)^2} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \left[f\left(\frac{2m\pi}{n}\right) - f\left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right) \right]$$

であり, 区間 $\left[\frac{(2m-1)\pi}{n}, \frac{2m\pi}{n} \right]$ の総和なので, 全体の区間である $[0, 2\pi]$ の $\frac{1}{2}$ だけを使うリーマン和であることがわかる. そのため,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{2m\pi}{n} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n} \right)^2} \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \left[f\left(\frac{2m\pi}{n}\right) - f\left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{1+x^2} \right]_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{1+4\pi^2} - 1}{2} \end{aligned}$$

と求めることができる.

4.3.2 第 3 の計算

次に第 3 項について考える. 第 3 項の

$$\sum_{m=1}^n \frac{2}{n \sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n} \right)^2}}$$

について, $x_m = \frac{2m-1}{n}$, $\Delta x = \frac{2}{n}$ とおくと,

$$\sum_{m=1}^n \frac{2}{n \sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n} \right)^2}} = \sum_{m=1}^n \frac{\frac{2}{n}}{\sqrt{1 + \pi^2 \left(\frac{(2m-1)}{n} \right)^2}} = \sum_{m=1}^n \frac{\Delta x}{\sqrt{1 + \pi^2 x_m^2}}$$

と変形できる. またこれは中点リーマン和として考えることができるので, $n \rightarrow \infty$ の極限は補題 7.2 を用いて,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{2}{n \sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n} \right)^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{\Delta x}{\sqrt{1 + \pi^2 x_m^2}} \\ &= \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2 x^2}} dx \\ &= \left[\frac{1}{\pi} \operatorname{arcsinh}(\pi x) \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{arcsinh}(2\pi) \\ &= \frac{1}{\pi} \log \left(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2} \right) \end{aligned}$$

と求められる。

4.3.3 $P_m - Q_m$ の y 成分の総和の収束値 B の計算

$P_m - Q_m$ の y 成分の総和の収束値を B とすると、以上の計算結果より、収束値 B は

$$\begin{aligned} B &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{m=1}^n b_m \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{2m\pi}{n} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n} \right)^2} + \frac{2}{n} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n} \right)^2}} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{1 + 4\pi^2} - 1}{2} + \frac{1}{\pi} \log(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}) \end{aligned}$$

と求めることができた。

4.4 $P_m - Q_{m-1}$ の x 座標 (成分) a'_m の総和の $n \rightarrow \infty$ の極限值

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{m=1}^n a'_m \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \left\{ \log \left(\frac{(2m-1)\pi}{n} + \sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n} \right)^2} \right) - \log \left(\frac{2(m-1)\pi}{n} + \sqrt{1 + \left(\frac{2(m-1)\pi}{n} \right)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{n} \frac{\frac{(2m-1)\pi}{n}}{\sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n} \right)^2}} \right\} \end{aligned}$$

4.4.1 対数部分の計算

対数部分に補題 7.2 を用いると、

$$\begin{aligned} &\log \left(\frac{(2m-1)\pi}{n} + \sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n} \right)^2} \right) - \log \left(\frac{2(m-1)\pi}{n} + \sqrt{1 + \left(\frac{2(m-1)\pi}{n} \right)^2} \right) \\ &= \operatorname{arcsinh} \left(\frac{(2m-1)\pi}{n} \right) - \operatorname{arcsinh} \left(\frac{2(m-1)\pi}{n} \right) \end{aligned}$$

と変形することができ、これは区間 $\left[\frac{2(m-1)\pi}{n}, \frac{(2m-1)\pi}{n} \right]$ の差をとっているため、全体の区間である $[0, 2\pi]$ の半分のであるから、総和の $n \rightarrow \infty$ での極限值は、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n &\left\{ \log \left(\frac{(2m-1)\pi}{n} + \sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n} \right)^2} \right) - \log \left(\frac{2(m-1)\pi}{n} + \sqrt{1 + \left(\frac{2(m-1)\pi}{n} \right)^2} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \left\{ \operatorname{arcsinh} \left(\frac{(2m-1)\pi}{n} \right) - \operatorname{arcsinh} \left(\frac{2(m-1)\pi}{n} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh}(2\pi) \\ &= \frac{1}{2} \log(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}) \end{aligned}$$

と求められる。

4.4.2 第3項の計算

次に第3項である

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{2\pi(2m-1)}{n^2 \sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right)^2}}$$

について考える．ここで、 $x_m = \frac{2m-1}{n}, \Delta x = \frac{2}{n}$ とおくと、

$$\frac{2\pi(2m-1)}{n^2} = \pi \cdot \frac{2m-1}{n} \cdot \frac{2}{n} = \pi x_m \Delta x$$

のように考えられる．すると、この総和は中点リーマン和として考えることができるので、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{2\pi(2m-1)}{n^2 \sqrt{1 + \pi^2 x_m^2}} &= \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{x_m}{\sqrt{1 + \pi^2 x_m^2}} \Delta x \\ &= \pi \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1 + \pi^2 x^2}} dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{\pi^2} \sqrt{1 + \pi^2 x^2} \right]_0^2 \\ &= \frac{\sqrt{1 + 4\pi^2} - 1}{\pi} \end{aligned}$$

と求めることができる．

4.4.3 a'_m の総和の絶対値の極限值 A' の計算

以上より、 $P_m - Q_{m-1}$ の x 成分である a'_m の総和の絶対値の極限值 A' が

$$A' := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{m=1}^n a'_m \right| = \frac{1}{2} \log \left(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2} \right) + \frac{\sqrt{1 + 4\pi^2} - 1}{\pi}$$

であると求めることができた．

4.5 $P_m - Q_m$ の y 座標（成分） b'_m の総和の $n \rightarrow \infty$ の極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{m=1}^n b'_m \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{2(m-1)\pi}{n}\right)^2} - \frac{2}{n} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right)^2}} \right\}$$

4.5.1 最初の2項の計算

$f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ とおくと、 $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ となり、元の式の第1項と第2項は $f(x)$ を用いると、

$$\sum_{m=1}^2 \left\{ f\left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right) - f\left(\frac{2(m-1)\pi}{n}\right) \right\}$$

と書ける．これは区間 $\left[\frac{2(m-1)\pi}{n}, \frac{(2m-1)\pi}{n}\right]$ のリーマン和であり、全体の区間である $[0, 2\pi]$ の半分の区間を用いるので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \left\{ f\left(\frac{(2m-1)\pi}{n}\right) - f\left(\frac{2(m-1)\pi}{n}\right) \right\} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

と表すことができる．これについて解くと、

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1+x^2} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1+4\pi^2} - 1 \right)$$

となる．

4.5.2 第3項の計算

第3項は,

$$-\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{2}{n \sqrt{1 + \left(\frac{\pi(2m-1)}{n} \right)^2}}$$

と表せる. ここで $x_m = \frac{2m-1}{n}, \Delta x = \frac{2}{n}$ とすると,

$$-\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{2}{n \sqrt{1 + \left(\frac{\pi(2m-1)}{n} \right)^2}} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{\frac{2}{n}}{\sqrt{1 + \left(\pi \cdot \frac{(2m-1)}{n} \right)^2}} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{\Delta x}{\sqrt{1 + \pi^2 x_m^2}}$$

と書くことができるため極限值は,

$$\begin{aligned} -\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{2}{n \sqrt{1 + \left(\frac{\pi(2m-1)}{n} \right)^2}} &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{\Delta x}{\sqrt{1 + \pi^2 x_m^2}} \\ &= -\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1 + \pi^2 x^2}} \\ &= -\left[\frac{1}{\pi} \operatorname{arcsinh}(\pi x) \right]_0^2 \\ &= -\frac{1}{\pi} \operatorname{arcsinh}(2\pi) \\ &= -\frac{1}{\pi} \log \left(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2} \right) \end{aligned}$$

と求められる.

4.5.3 b'_m の総和の収束値 B' の計算

以上の計算より, $P_m - Q_{m-1}$ の y 成分である b'_m の総和の絶対値の極限值 B' は

$$B' := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{m=1}^n b'_m \right| = \frac{\sqrt{1 + 4\pi^2} - 1}{2} - \frac{1}{\pi} \log \left(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2} \right)$$

と求めることができる.

4.6 全体

これまでに行ってきた計算により, 各成分の総和の極限值 A, B, A', B' を求めることができた. これらの和の近似値は,

$$\begin{aligned} A + B + A' + B' &= \left\{ -\frac{1}{2} \log \left(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2} \right) + \pi \left(\sqrt{5} - 1 \right) \right\} + \left\{ \frac{\sqrt{1 + 4\pi^2} - 1}{2} + \frac{1}{\pi} \log \left(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2} \right) \right\} \\ &+ \left\{ \frac{1}{2} \log \left(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2} \right) + \frac{\sqrt{1 + 4\pi^2} - 1}{\pi} \right\} + \left\{ \frac{\sqrt{1 + 4\pi^2} - 1}{2} - \frac{1}{\pi} \log \left(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2} \right) \right\} \\ &= \left(\sqrt{1 + 4\pi^2} - 1 \right) + \frac{\sqrt{1 + 4\pi^2} - 1}{\pi} + \pi \left(\sqrt{5} - 1 \right) \\ &\approx 10.9523 \end{aligned}$$

と求めることができた. 最後に三角不等式によりこれを $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍すると, 次がわかる.

命題 4.1. T_n の長さは $n \rightarrow \infty$ で収束するのならば, $l_{\text{下}}$ より大きい. ただし,

$$l_{\text{下}} := \frac{1}{\sqrt{2}} (A + B + A' + B') \approx 10.9523 \div \sqrt{2} \approx 7.744.$$

5 考察

曲線 T_n の長さ表す数式を直接求めることができない場合であっても、グラフの概形がわかると明確な形で近似することができる。そのため、収束するのならば大体どのくらいの長さになるのか把握することができることがわかった。また、下からの近似値は約 7.74, 上からの近似値は約 10.28 となった。したがって、軌跡の長さが収束するのならばこの範囲の中に存在すると考えられる。この範囲の中には 8 が含まれており、昨年度の結果でもサイクロイド曲線, エピサイクロイド曲線, ハイポサイクロイド曲線の長さの収束値 8 との関係があるのではないかと予想できる。加えて、これは元のカテナリーの長さである 2π に比べて大きく、昨年に扱ったサイクロイド類の「図形は元の曲線に近づく長さは一致しない」という現象が、曲率が一定でない曲線についても見られる可能性を示唆している。

6 今後の課題・展望

6.1 今後の課題

今後の課題としては次があげられる。

- カテナリーの上を転がしたときの曲線の長さの範囲についても今回と同じように、近似によって収束値の範囲の様子を観察すること。
- 曲率が一定でないカテナリーとは別の関数のグラフ上を滑らずに転がる円の軌跡を曲線の長さを直接求めて収束の様子を観察できないか調査すること。

6.2 予想

今回考えた曲線 T_n も前回のサイクロイド曲線, エピサイクロイド曲線, ハイポサイクロイド曲線と同様に 8 に収束する。

7 付録

7.1 カテナリーの媒介変数表示の変換について

補題 7.1. $s = \sinh x$ と置くと

$$C(x) = \begin{pmatrix} x \\ \cosh x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{arcsinh} s \\ \sqrt{1+s^2} \end{pmatrix} = C_1(s)$$

ここでは
を示す。

証明. 通常, カテナリーは $y = \cosh x$ で与えられるため媒介変数表示も $\begin{pmatrix} x \\ \cosh x \end{pmatrix}$ と表すが, $s = \sinh x$ を新しい媒介変数として導入すると, $x = \operatorname{arcsinh} x$ が従う。これで, 第一成分の等号成立が示せた。

次に, 第二成分について考える。双曲線関数の基本的な恒等式である, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ を使用する。 $s = \sinh^2 x$ ゆえ $\sinh x$ に代入すると,

$$\cosh^2 x - s^2 = 1 \iff \cosh^2 x = 1 + s^2$$

となる．図 1 より $\cosh x = \sqrt{1+s^2}$ なので第二成分についても等号成立が示せた．以上より，第一成分と第二成分の等号成立が示せたので，

$$C(x) = \begin{pmatrix} x \\ \cosh x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{arcsinh} s \\ \sqrt{1+s^2} \end{pmatrix} = C_1(s)$$

が成り立つ．

□

7.2 $\operatorname{arcsinh} x = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ について

補題 7.2. 次の等式は任意の実数 x について，成り立つ．

$$\operatorname{arcsinh} x = \log(x + \sqrt{1+x^2})$$

証明. $\operatorname{arcsinh} x$ は定義より， $\sinh x$ の逆関数であるから $y = \operatorname{arcsinh} x$ は $x = \sinh y$ を満たす y のことである．

双曲線関数（ハイパボリックファンクション）の定義より，

$$\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

なので，

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

となる．両辺に 2 をかけると，

$$2x = e^y - e^{-y}$$

となり， $t = e^y$ と置くと，

$$2x = t - \frac{1}{t}$$

と表すことができる． $t = e^y \neq 0$ より，両辺に t をかけると

$$2tx = t^2 - 1$$

となる．これを整理すると，

$$t^2 - 2xt - 1 = 0$$

となる．これは t についての 2 次方程式としてみるできるので，2 次方程式の解の公式を用いて t について解くと

$$t = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = \frac{2x \pm 2\sqrt{1+x^2}}{2} = x \pm \sqrt{1+x^2}$$

となる． $t = e^y$ であり， $t = e^y > 0$ より， $t > 0$ なので， $x - \sqrt{1+x^2}$ は負になるため t の解として不適．よって，

$$t = e^y = x + \sqrt{1+x^2}$$

となる．この両辺の自然対数を取ると，

$$\log e^y = \log(x + \sqrt{1+x^2})$$

であり，

$$\log(x + \sqrt{1+x^2}) = \log e^y = y \log e = y = \operatorname{arcsinh} x$$

となり， $\operatorname{arcsinh} x = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ が示せた．

□