ギターと指数対数

日本女子大学　理学部　数物科学科

研究動機

教育実習中、生徒から

「なぜ数学を勉強しなければいけないのか？」

という質問を受けた。

中学校や高校での数学は、文字を利用するようになり、一般化された内容が多く理解が難しい。

日常生活と数学の関係性を伝えることで、数学を身近に感じてほしいと考えた。

数学の楽しさや有用性を伝える教材を作りたい

音律とは

平均律

1オクターヴを12等分し、すべての音程の関係が同じ周波数の比率になるような音律

長所：度数が同じ音程を奏でた場合、どのキーでも同じ音の響きに感じる

純正律

周波数の比が単純な整数比である純正音程のみを用いて規定される音律

長所：倍音基準にしているため、うなりが生じない

音階の性質（平均律）

音を１オクターブ高くすると、振動数は 2倍になる

→Aから始めてA, A#, B, C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G# で考える

最初のAの音をオクターブ４、つまり周波数を440Hzとした場合、オクターブ４の他の音名の周波数f_n^4はf_1 を初項とし、オクターブ５のAの音f_{13}^4の周波数が880Hzとなるような公比 r の等比数列になるように１オクターブ内の周波数を分ける

オクターブ４内の音を等比数列で書くと次のようになる

$$f_n^4 = f_1 \times r^{n-1}$$

ここで、$f_{13}^4 = f_1^4 \times r^{12}$より公比は次の条件を満たす

$$880 = 440 \times r^{12}$$

$$r = 2^{\frac{1}{12}} \fallingdotseq 1.05946$$

よって、 $f_n^4 = f_1 \times (2^{\frac{1}{12}})^{n-1}$

弦の長さと音の関係は指数法則であることを発見！！

- 音を1オクターブ変化　→　弦の長さは $\frac{1}{2}$ 倍になる

- 1つ高い音に移るとき、元の弦の長さの $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}$ 倍になる

弦楽器を使って教材研究をしたい

実験を始める

弦の長さと音の関係に注目

弦の長さと階名の関係（実験結果）

階名	E	F	#F	G	#G	A	#A	B	C	#C	D	#D
弦の長さ（cm）	64.0	60.5	57.0	54.0	51.0	48.0	45.5	42.5	40.3	38.0	36.0	34.0

比　1.058　1.061　1.056　1.059　1.063　1.055　1.071　1.055　1.061　1.056　1.059

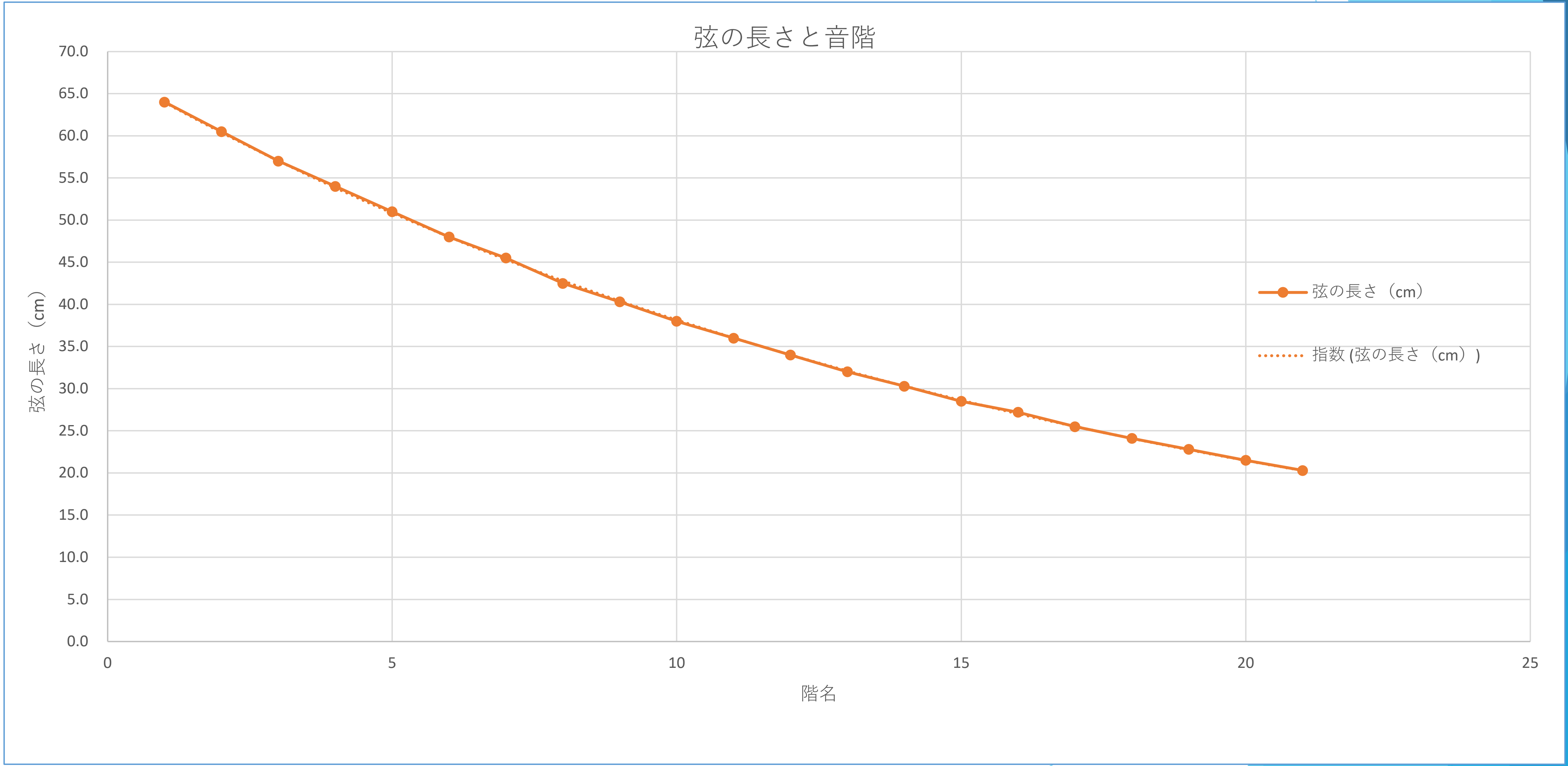
E	F	#F	G	#G	A	#A	B	C
32.0	30.3	28.5	27.2	25.5	24.1	22.8	21.5	20.3

1.063　1.056　1.063　1.048　1.067　1.058　1.057　1.060　1.059

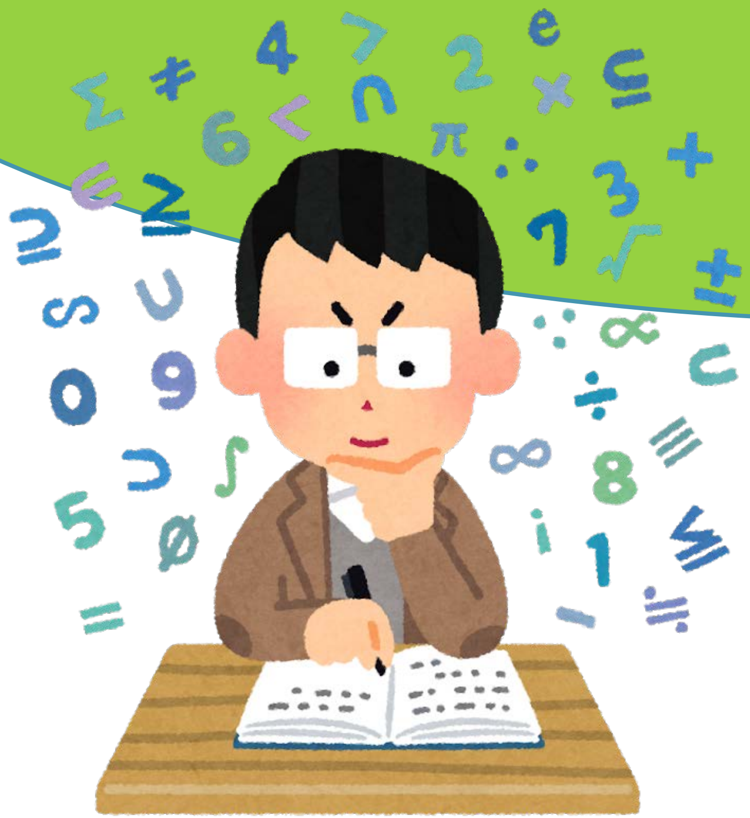
比が一定

（前の音）/（後の音）$=1.06 \fallingdotseq 2^{\frac{1}{12}}$

弦の長さと音の関係（グラフ）



実験から学んだ関係を用いて
教材を作っていく



授業のねらい

1. 高校生用

- 指数と対数が実際に日常生活でどのような関係があるか、ギターという身近な楽器を用いて考察する。

- 振動数（音の高さ）と弦の長さの関係を用いるため、物理との関連性を示すことにより指数と対数の楽しさや良さを感じさせる教材を作成する。

2. 中学生用

- 日常と関連付けることで正負の数の計算の理解を深めさせる。

教材の概略

①ギターのそれぞれのフレットまでの長さを測り、その時の音の高さを確認する。

②弦の長さと音の関係を理解した上で、「音の高さから弦の長さを求める式」と「弦の長さから音の高さを求める式」で表す。

（弦の線密度の関係は考えず、ここでは第6弦を基準とする）

②弦の長さと音の関係

押えない状態を0番目としたとき、0番目の音の弦の長さを$a_0$cmとするとき、n番目の弦の長さ$a_n$cm

②弦の長さと音の関係

押えない状態を0番目としたとき、0番目の音の弦の長さを$a_0$cmとするとき、n番目の弦の長さ$a_n$cmは

- 音の高さから弦の長さを求める式

$$a_n = a_0 \left(\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\right)^n$$

- 弦の長さから音の高さを求める式

$$n = log_{\sqrt[12]{2}} a_0 - log_{\sqrt[12]{2}} a_n$$

中学生用授業の流れ

1.ギターのフレットを見て気づいたことをあげる

2.弦の長さを測り、予想が正しいことを確かめる

3.弦の長さと音階の関係を用いて、与えられた音の弦の長さを計算で求める

4.いままでの知識を利用して「ストローパイプオルガン」を作る

高校生用授業の流れ

1. ギターのフレットを見て気づいたことをあげる
2. 弦の長さと音の関係を式で表す
3. 弦の長さと音階の関係を用いて、与えられた音の弦の長さを計算で求める
4. 弦の長さと音階の関係を用いて、与えられた弦の長さから音名を計算で求める