

砂遊びの数学

日本女子大学 理学部 数物科学科

はじめに

- 研究の動機

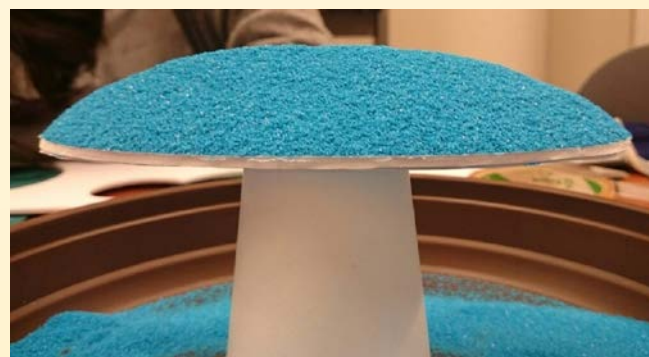
理系の人も含め、数学は苦手と考える人が多い科目である。その中で少しでも楽しく触れてもらえるように、子供のころに一度は遊んだことがある「砂」を使い親しみをもって学んでもらうことを考えた。



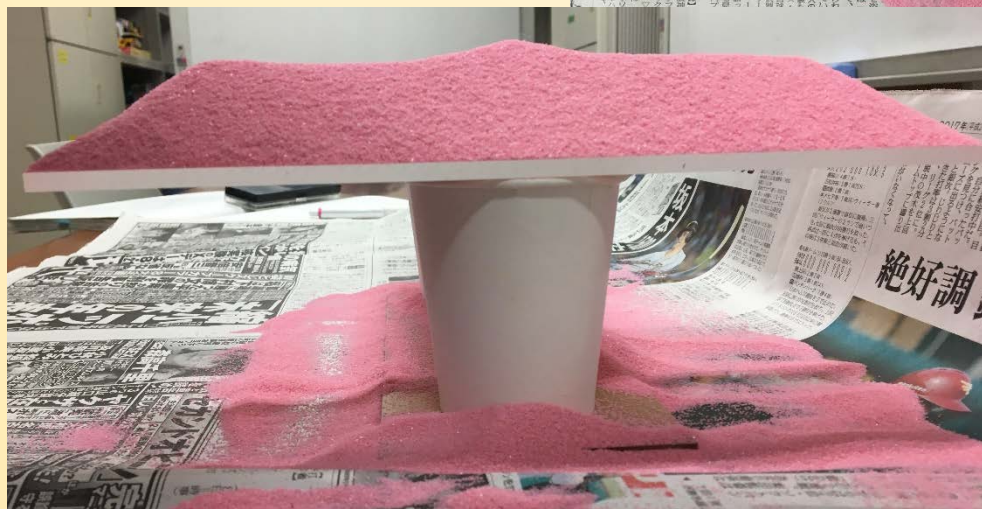
尾根の形について調べることにした。

やったこと

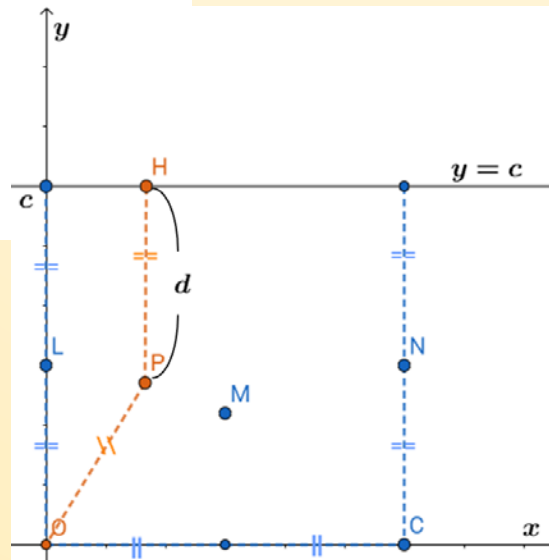
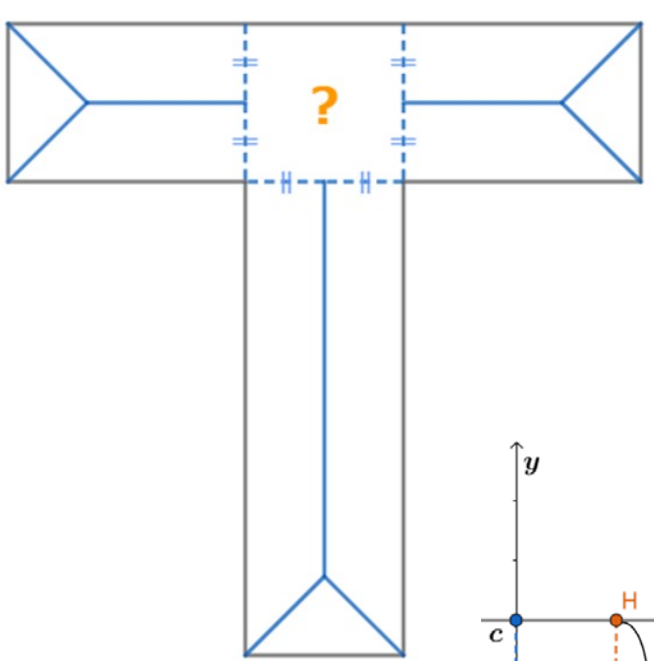
- 扇形
- パックマン
- 楕円
- L字型
- T字型
- 内心と外心



T字型



T字型の尾根の形



原点Oと点Cそれぞれ
からの距離と直線 $y = c$
との距離が等しい点の軌跡を
求めたい

求める点を $P(x, y)$ とおく。

点Lから点Mへの尾根の形は

原点と直線 $y = c$ と距離が等しい点の
軌跡であるため、L字型のときと同様にして

$$y = -\frac{1}{2c}x^2 + \frac{c}{2} \cdots \textcircled{1}$$

さらに、点Mから点Nへの尾根の形は

点Cと直線 $y = c$ と距離が等しい点の
軌跡であるため、同様にして

$$y = -\frac{1}{2c}x^2 + x \cdots \textcircled{2}$$

T字型の高さ



T字型の高さを h とおく。

山のふもとの角度は一定であり、 φ とおくと

$$h = d \tan \varphi$$

点Pの x 座標を α とおく。

そのときのPHの長さを求めたい。

①より、点Pの座標は

$$P\left(\alpha, -\frac{1}{2c}\alpha^2 + \frac{c}{2}\right)$$

このとき、 $H(\alpha, c)$ よりPHの長さは

$$\begin{aligned} \text{PH} &= c - \left(-\frac{1}{2c}\alpha^2 + \frac{c}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2c}\alpha^2 + \frac{c}{2} \end{aligned}$$

②より、点Pの座標は

$$P\left(\alpha, -\frac{1}{2c}\alpha^2 + \alpha\right)$$

このとき、 $H(\alpha, c)$ よりPHの長さは

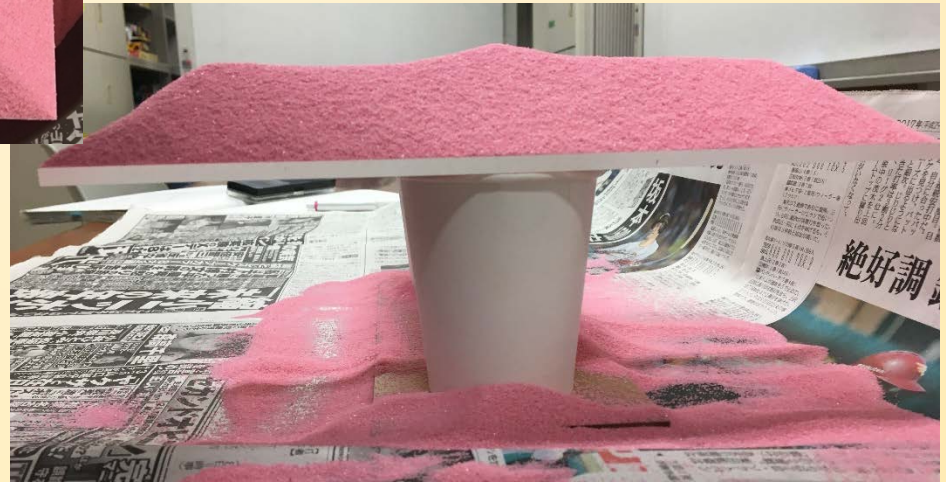
$$\begin{aligned} \text{PH} &= c - \left(-\frac{1}{2c}\alpha^2 + \alpha\right) \\ &= \frac{1}{2c}\alpha^2 - \alpha + c \end{aligned}$$

つまり、高さ h は、角度 φ は一定であるので

d つまりPHの長さによって変わっていく。

T字型 分かったこと

- ・T字型の尾根の形には放物線が含まれる。



- ・高さが変化していることを計算で確かめられる。

内心と外心①

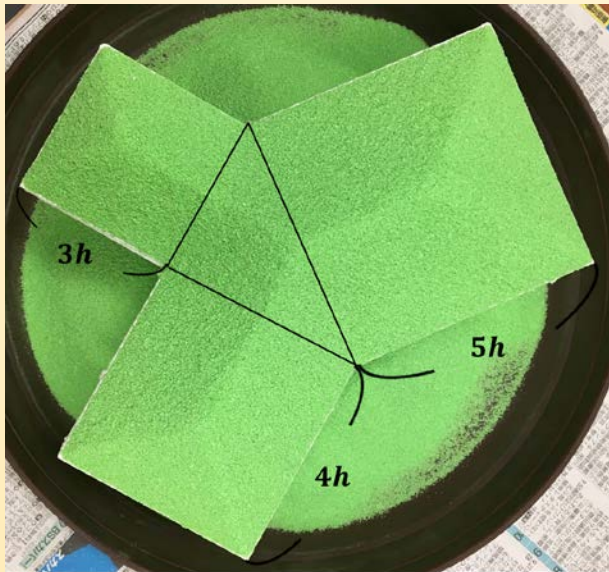
はじまり

三角形に砂を積むと、尾根の形は角の二等分線となる。

つまり、内心が現れる。

しかし、三角形のそれぞれの辺に長方形をくっつけることで、尾根の形は三角形の各辺の二等分線となり外心が現れる。

そこで、この外心から内心へどのように移行していくか調べることにした。

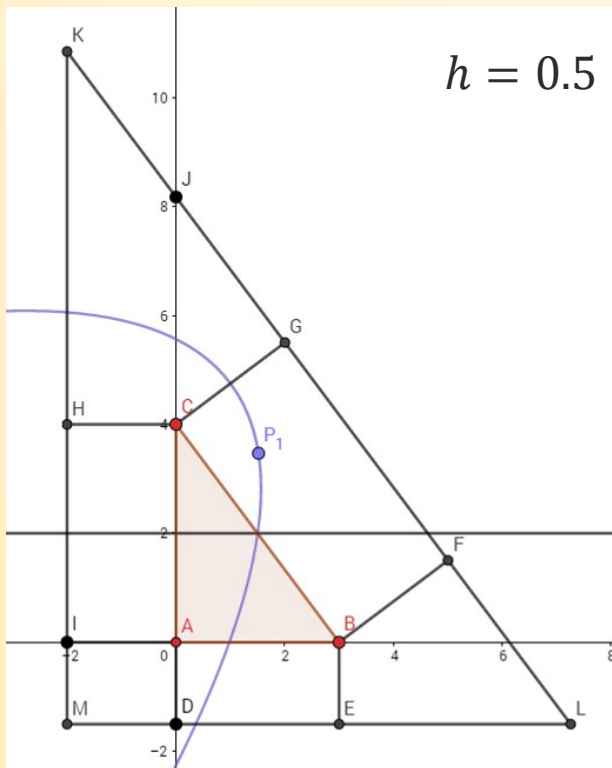


三角形は3:4:5の直角三角形で考える。

くっつける長方形の辺の長さを h を使って表わす。

シミュレーションを見てみよう。

内心と外心②



$\triangle ABC$ と $\triangle GCJ$ は
 $\angle ABC = \angle GCJ, \angle BCA = \angle CJG$
 $\angle CAB = \angle JCG = 90^\circ$

3つの角が等しいので相似である。

よって、 $AB:BC = GC:CJ$ より
 $3:5 = 5h:CJ$

$$CJ = \frac{25}{3}h \quad \therefore J\left(0, \frac{25}{3}h + 4\right)$$

これより、直線FGの方程式は

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}h + 4$$

点Cと直線FGとそれぞれから距離が等しい点の軌跡を考える。

求める点を $P_1(x, y)$ とおくと、点 P_1 と点Cの距離は

$$CP_1 = \sqrt{x^2 + (y - 4)^2}$$

直線FG上の点をRとして点 P_1 との距離は、点と直線の距離公式を用いて

$$RP_1 = \frac{1}{5} |-4x - 3y + 25h + 12|$$

$CP_1 = P_1R$ なので

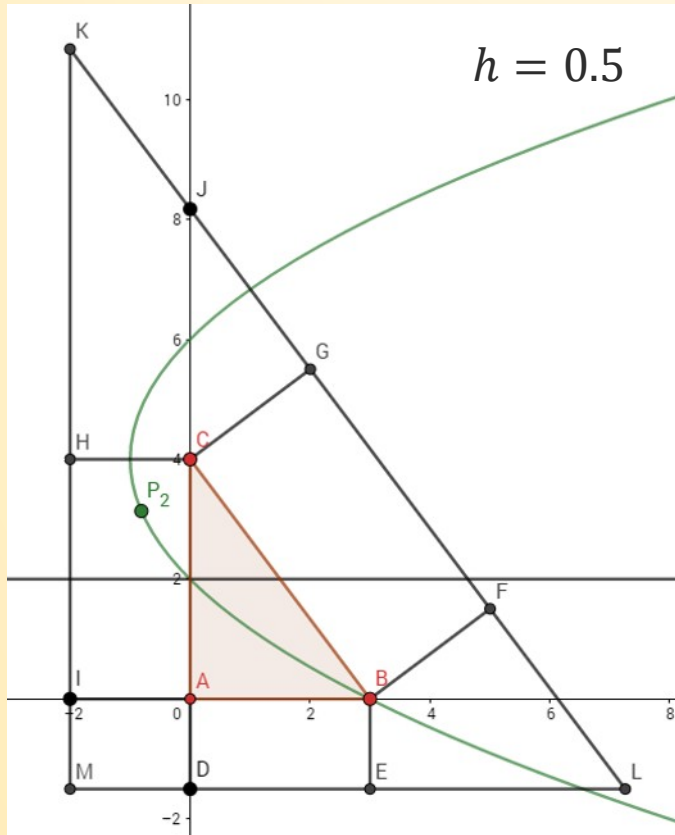
$$\sqrt{x^2 + (y - 4)^2} = \frac{1}{5} |-4x - 3y + 25h + 12|$$

両辺を2乗して整理すると

$$\frac{9}{25}x^2 + \frac{16}{25}y^2 + \frac{96}{25}x - \frac{128}{25}y - \frac{24}{25}xy$$

$$-25h^2 + (8x + 6y - 24)h + \frac{256}{25} = 0$$

内心と外心③



次に、点Cと直線HIとそれぞれから距離が等しい点の軌跡を考える。

求める点を $P_2(x, y)$ とおくと、点 P_2 と点Cの距離は

$$CP_2 = \sqrt{x^2 + (y - 4)^2}$$

直線HI上の点を R' として点 P_2 との距離は、点と直線の距離公式を用いて

$$R'P_2 = |-x - 4h|$$

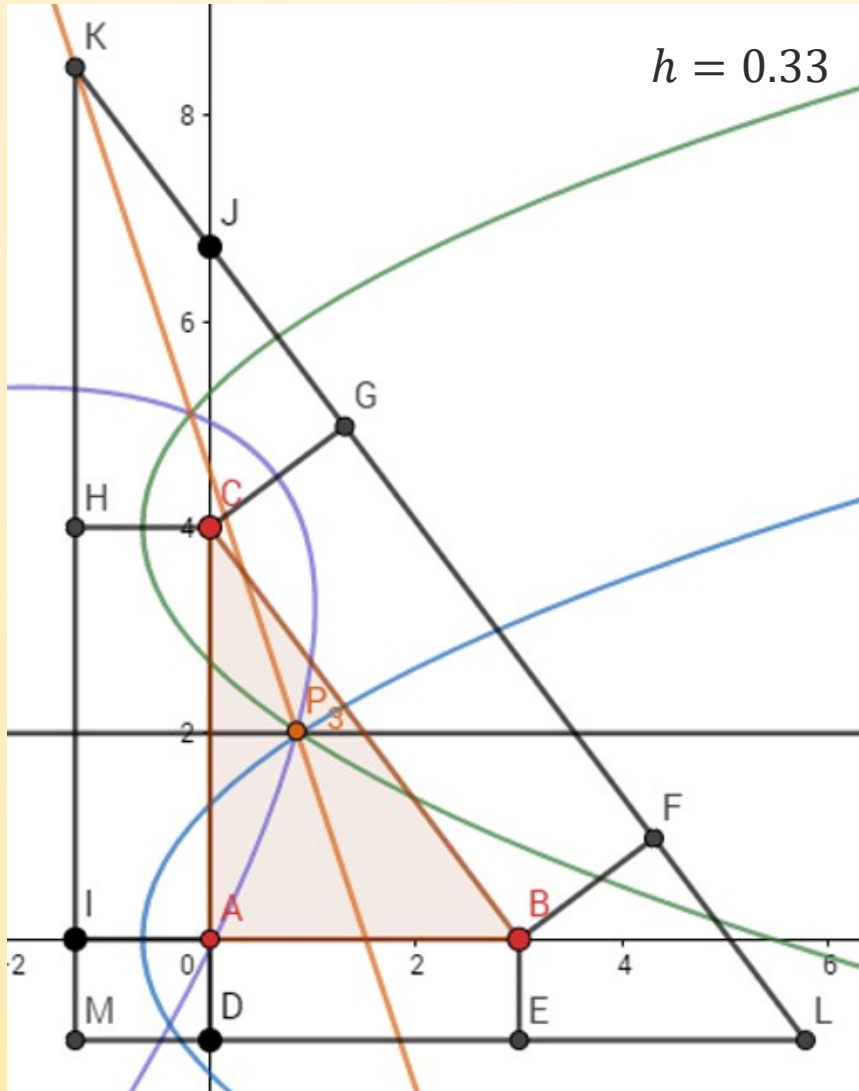
$CP_2 = P_2R'$ なので

$$\sqrt{x^2 + (y - 4)^2} = |-x - 4h|$$

両辺を2乗して整理すると

$$y^2 - 8y - 8hx - 16h^2 + 16 = 0$$

内心と外心⑤



$$h = 0.33$$

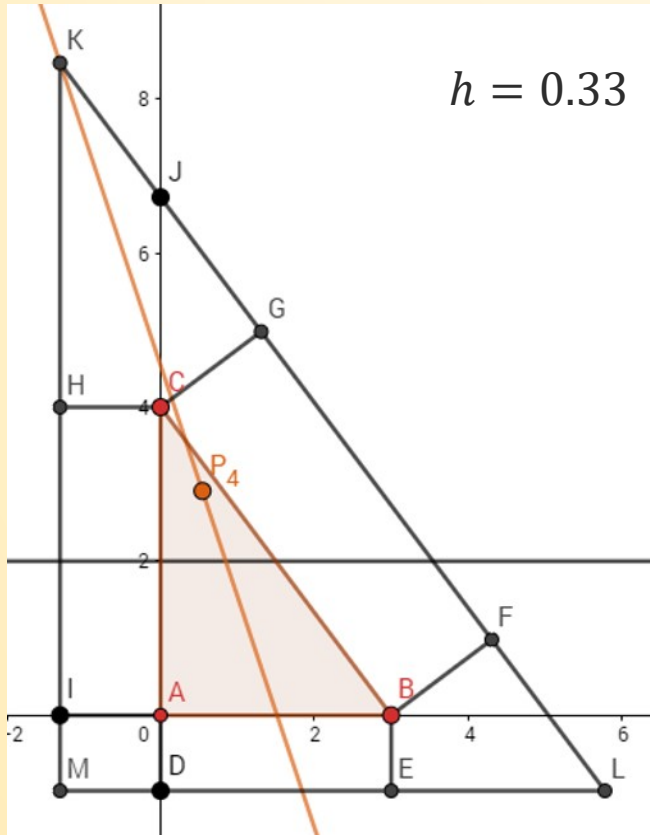
点Cと直線FGとそれぞれから距離が等しい点の軌跡の放物線（緑）

点Cと直線HIとそれぞれから距離が等しい点の軌跡の放物線（紫）

$\angle MKL$ の二等分線上の点の軌跡の直線（オレンジ）

点Aと直線HIとそれぞれから距離が等しい点の軌跡の放物線（青）

内心と外心⑥



次に、 $\angle MKL$ の二等分線上の点 P_4 の軌跡を求める。

つまり、直線FGと直線HIそれぞれから距離が等しい点の軌跡のことである。

求める点を $P_4(x, y)$ とおき、点と直線の距離公式を用いて

直線HIとは

$$d_1 = |x + 4h|$$

直線FGとは

$$d_2 = \frac{1}{5} |-4x - 3y + 25h + 12|$$

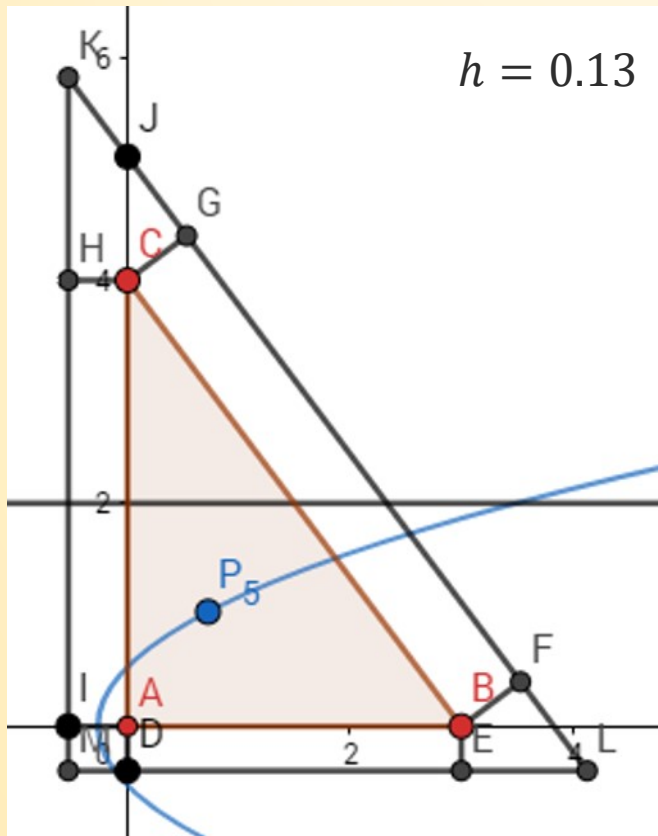
このとき、どちらも絶対値の中は正であるので

$$d_1 = d_2$$

$$\Leftrightarrow |x + 4h| = \frac{1}{5} |-4x - 3y + 25h + 12|$$

$$\Leftrightarrow -9x - 3y + 5h + 12 = 0$$

内心と外心⑦



さらに、点Aと直線HIとそれぞれから距離が等しい点の軌跡を考える。

求める点を $P_5(x, y)$ とおくと、点 P_5 と点Aの距離は

$$AP_5 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

直線HI上の点をSとして点 P_5 との距離は、点と直線の距離

公式を用いて

$$P_5S = |-x - 4h|$$

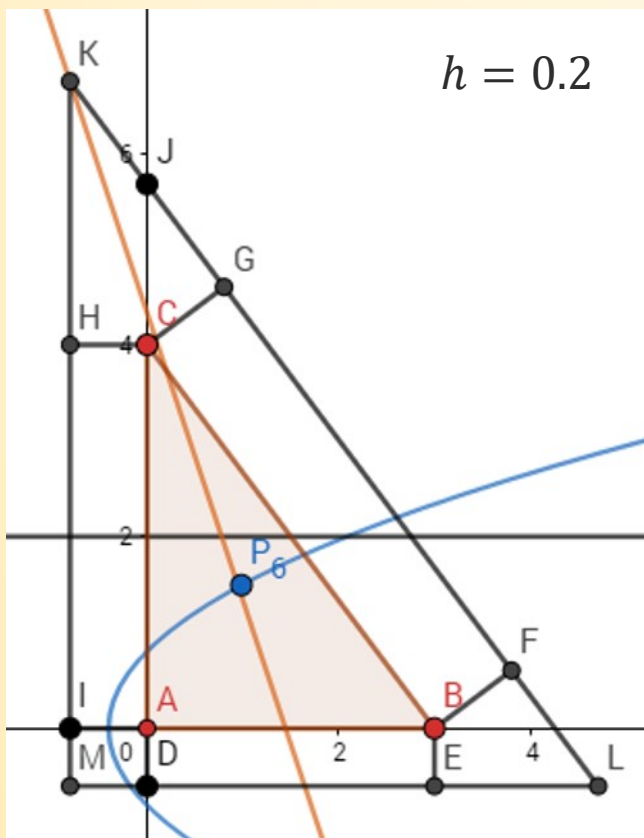
$AP_5 = P_5S$ なので

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |-x - 4h|$$

両辺を2乗して整理すると

$$x = \frac{1}{8h}y^2 - 2h$$

内心と外心⑧



$h = 0.33$ からは、 h の幅を狭めていくと

$\angle MKL$ の二等分線上の点 P_4 と点 A と直線 HI とそれぞれから距離が等しい点の軌跡である放物線 P_5 の交点を移動する。

交点を P_6 とおくと

$$P_4 \quad -9x - 3y + 5h + 12 = 0$$

$$P_5 \quad x = \frac{1}{8h}y^2 - 2h$$

この2式を連立すればよい

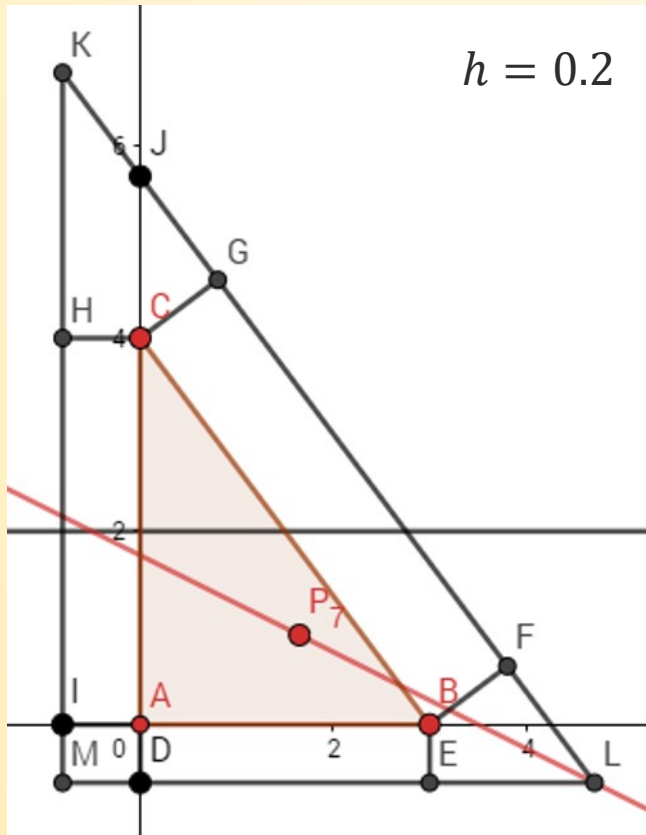
$$y = \frac{-4h \pm 2\sqrt{50h^2 + 24h}}{3}$$

求めたい交点の y 座標は正であるので

$$x = h - \frac{2}{9}\sqrt{50h^2 + 24h} + \frac{4}{3}$$

$$\therefore P_6 \left(h - \frac{2}{9}\sqrt{50h^2 + 24h} + \frac{4}{3}, \frac{-4h + 2\sqrt{50h^2 + 24h}}{3} \right)$$

内心と外心⑨



さらに、 h の幅を狭めていくと点 P_6 と $\angle KLM$ の二等分線と交わり、その交点を P_8 とおく。

ここで、 $\angle KLM$ の二等分線上の点 P_7 の軌跡を求める。

つまり、直線 DE と直線 FG それぞれから距離が等しい点の軌跡のことである。

求める点を $P_7(x, y)$ とおき、点と直線の距離公式を用いて

直線 DE とは

$$d_3 = |y + 3h|$$

直線 FG とは

$$d_4 = \frac{1}{5} |-4x - 3y + 25h + 12|$$

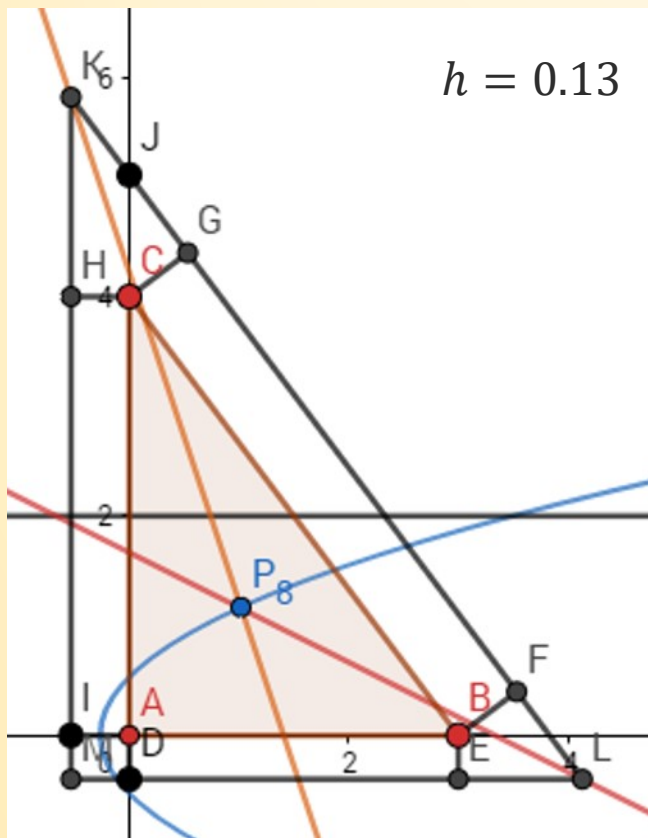
このとき、どちらも絶対値の中は正であるので

$$d_3 = d_4$$

$$\Leftrightarrow |y + 3h| = \frac{1}{5} |-4x - 3y + 25h + 12|$$

$$\Leftrightarrow 2x + 4y - 5h - 6 = 0$$

内心と外心⑩



点 P_8 とは

$\angle MKL$ の二等分線上の点 P_4 と点Aと直線HIとそれぞれから距離が等しい点の軌跡である放物線 P_5 との交点 P_6 と

$\angle KLM$ の二等分線上の点 P_7

点 P_6 との交点ということは $\angle MKL$ の二等分線との交点を考

えることと同値である、つまり

$$P_4 \quad -9x - 3y + 5h + 12 = 0$$

$$P_7 \quad 2x + 4y - 5h - 6 = 0$$

この2式を連立すればよい

$$x = 1 + \frac{1}{6}h, \quad y = 1 + \frac{7}{6}h$$

$$\therefore P_8 \left(1 + \frac{1}{6}h, 1 + \frac{7}{6}h \right)$$

さらに、点 P_8 が放物線 P_5 上にあるときの h の値は

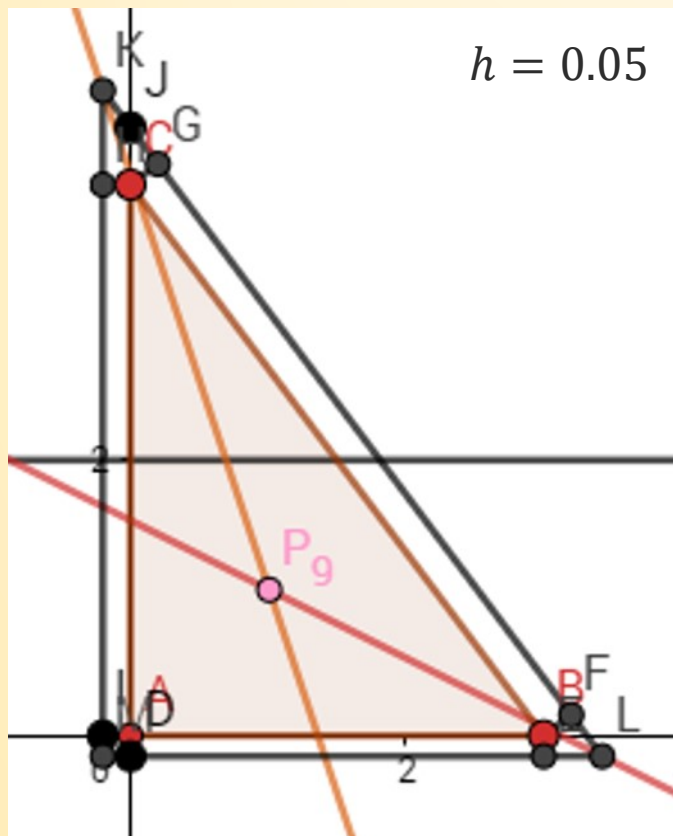
$$P_5 \quad x = \frac{1}{8h}y^2 - 2h$$

$$P_8 \left(1 + \frac{1}{6}h, 1 + \frac{7}{6}h \right)$$

より

$$h = \frac{-204 \pm \sqrt{124416}}{1150} \doteq 0.129327$$

内心と外心⑪



$h = 0.129$ からは、 h の幅を狭めていくと $\angle MKL$ の二等分線上の点 P_4 と $\angle KLM$ の二等分線上の点 P_7 の交点を移動する。

交点を P_9 とおく。

つまり、点 $P_8 \left(1 + \frac{1}{6}h, 1 + \frac{7}{6}h\right)$ が変化していく。

最終的に h の幅を0にするので、点 P_8 は点 $P_9(1,1)$ となり、内心となる。

よって、外心から内心への変化の過程は

$0.5 \leq h$ のとき

$$\left(\frac{3}{2}, 2\right) \quad (\triangle ABC \text{の外心})$$

$0.33 \leq h \leq 0.5$ のとき

$$y = 2$$

$$9x^2 + 4(50h + 12)x - (625h^2 + 300h - 64) = 0$$

$0.13 \leq h \leq 0.33$

$$\left(h - \frac{2}{9}\sqrt{50h^2 + 24h} + \frac{4}{3}, \frac{-4h + 2\sqrt{50h^2 + 24h}}{3}\right)$$

$0 \leq h \leq 0.13$ のとき

$$\left(1 + \frac{1}{6}h, 1 + \frac{7}{6}h\right)$$

まとめ

- ・扇形、楕円、パックマン、T字型、L字型の尾根の形や高さを完全に式で表すことができた。
- ・砂山を使って、三角形の内心と外心を求めることができた。

さらに、このとき尾根の頂点の外心から内心への動き方が分かった。

感想

- ・誰もが1度は触ったことのある砂を使って、数学に取り組めたことは自分自身の経験の1つとしてとても役に立った。使おうと思えば、様々なものを関連付けて学べることが分かった。

今後、教師として働く時にこの考え方を役に立てたい。

今後の課題

- ・今回は3:4:5の直角三角形に着目して外心から内心への動き方を調べたので、今後は一般的な三角形でも調べていきたい。