

解析 I 演習の問題 (その 6)

有理関数とは

有理関数とは

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

の形で与えられるものである。ただし,  $f(x), g(x) (g(x) \neq 0)$  は多項式である。

多項式とは,  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$  のこと。ただし,  $a_0, a_1, \dots, a_k$  は定数で,  $k \geq 1$  の自然数。

有理関数の積分法

$$(1) \quad \int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \begin{cases} -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}, & n \neq 1 \\ \log|x-a|, & n = 1 \end{cases}$$

$$(2) \quad \int \frac{px+q}{(x^2+cx+d)^n} dx = p \int \frac{t}{(t^2+s^2)^n} dt + \left(q - \frac{c}{2}p\right) \int \frac{1}{(t^2+s^2)^n} dt$$

ただし,  $c^2 - 4d < 0$  で  $c, d, p, q$  は実数。また,  $t = x + \frac{c}{2}, s^2 = \frac{4d - c^2}{4}$  とおいた。

$$(3) \quad \int \frac{x}{(x^2+s^2)^n} dx = \begin{cases} -\frac{1}{2(n-1)(x^2+s^2)^{n-1}}, & n \neq 1 \\ \frac{1}{2} \log(x^2+s^2), & n = 1 \end{cases}$$

$$(4) \quad I_n = \begin{cases} \frac{1}{2(n-1)s^2} \left\{ \frac{x}{(x^2+s^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1} \right\}, & n \geq 2 \\ \frac{1}{s} \arctan\left(\frac{x}{s}\right), & n = 1 \end{cases}$$

ただし,  $I_n = \int \frac{1}{(x^2+s^2)^n} dx$  である。

注意: (2) の条件  $c^2 - 4d < 0$  から  $x^2 + cx + d > 0$  を得る。(4) において,  $\sqrt{s^2} = |s|$  である。 $s > 0$  および  $s < 0$  としても同じ関数を得られるので, 普通は  $s > 0$  の方を使う。

練習 39 つぎの関数の積分を求めよ．ただし，(8) については部分積分の公式を一度もちいるだけでよく，積分を求める必要はない．

$$(1) \int \frac{1}{x^3 - x} dx \quad (2) \int \frac{1}{x^2 + 3/4} dx \quad (3) \int \frac{x}{(x^2 + 3/4)^2} dx$$

$$(4) \int \frac{x-2}{x^2 - x + 1} dx \quad (5) \int \frac{1}{x^3 + 1} dx \quad (6) \int \frac{1}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)} dx$$

$$(7) \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx \quad (8) \int \frac{x^2}{(x^2 + s^2)^n} dx, \quad n \geq 2 \quad (9) \int \frac{1}{x^3 - x^2} dx$$

$$(10) \int \frac{1}{(x-2)^2 - 7} dx$$

ヒント：(1)  $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$  となるので，

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}$$

から，分子に注目すれば，恒等式

$$(A+B+C)x^2 + (A-C)x - B = 1$$

を得る．これから  $A, B, C$  を求めればよい．

(5)  $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$  となるので，恒等式

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2 - x + 1}$$

から， $A, B, C$  を求める．

(7)

$$\frac{A}{x^2 + 4} + \frac{B}{x^2 + 9} = \frac{1}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)}$$

とおき， $A, B$  を求めればよい．

(8)  $f(x) = x, g(x) = -\frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{(x^2 + s^2)^{n-1}}$  とおき，部分積分

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

を利用する．

(10)  $(x-2)^2 - 7 = (x-2+\sqrt{7})(x-2-\sqrt{7})$  から

$$\frac{1}{(x-2)^2 - 7} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \left( \frac{1}{x-2-\sqrt{7}} - \frac{1}{x-2+\sqrt{7}} \right)$$

を利用する．

注意：(8) と

$$\frac{1}{(x^2 + s^2)^n} = \frac{1}{s^2} \left( -\frac{x^2}{(x^2 + s^2)^n} + \frac{1}{(x^2 + s^2)^{n-1}} \right)$$

を利用すれば，有理関数の積分法 (5) ( $n \geq 2$  の場合) が得られる．