

解析 I 演習の問題 (その 8)

定積分の定義

関数 $f(x)$ の不定積分のひとつを $F(x)$ とするとき,

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

練習 43 つぎの定積分の値を求めよ.

(1) $\int_1^e \frac{1}{x} dx$ (2) $\int_1^3 e^{2x} dx$ (3) $\int_0^1 x e^{x^2} dx$ (4) $\int_1^e x \log x dx$

定積分の性質 (I)

k を定数とする.

$$(1) \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$(2) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$(3) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$(4) \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$(5) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

練習 44 つぎの定積分の値を求めよ.

(1) $\int_1^0 \frac{x}{1+x^2} dx$ (2) $\int_1^2 \frac{x^3+2}{x} dx$ (3) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$

(4) $\int_1^4 |\log x - 1| dx$ (5) $\int_{-3}^2 \sqrt{|x-1|} dx$ (6) $\int_{-1}^2 |e^x - 1| dx$

定積分の性質 (II)

$$(1) f(x) \text{ が偶関数のとき, } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$(2) f(x) \text{ が奇関数のとき, } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

練習 45 つぎの定積分の値を求めよ .

$$(1) \int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^2} dx \quad (2) \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx \quad (3) \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos x dx$$

$$(4) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x dx \quad (5) \int_{-1}^1 \sin^3 x dx \quad (6) \int_{-1}^1 x(\cos x + e^{-x}) dx$$

定積分での置換積分法と部分積分法

• $x = g(t)$ とおくとき , $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$ ならば ,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt$$

• $\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$

練習 46, 47, 48 つぎの定積分の値を求めよ . ただし , (15) については等式を証明せよ .

$$(1) \int_0^1 xe^{x^2} dx \quad (2) \int_1^e \frac{(\log x)^2}{x} dx \quad (3) \int_0^{\pi/3} \sin^3 x \cos x dx$$

$$(4) \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2+2} dx \quad (5) \int_{-1}^1 \arcsin x dx \quad (6) \int_0^1 \arccos x dx$$

$$(7) \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos x} dx \quad (8) \int_0^{2\pi/3} x|\cos x| dx \quad (9) \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx, \quad (a > 0)$$

$$(10) \int_1^e x \log x dx \quad (11) \int_1^e x \log(x+1) dx \quad (12) \int_0^{\pi/2} x \cos x dx$$

$$(13) \int_0^{\pi/2} e^{-x} \sin x dx \quad (14) \int_1^2 x\sqrt{4-x} dx \quad (15) \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

$$(16) \int_{-1}^1 |x|(x^2+x+1) dx \quad (17) \int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx \quad (18) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(\sin^2 x + \cos x) dx$$

$$(19) \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$$

練習 49, 50

(1) n を非負の整数とし , $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ とする . このとき ,

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

を示せ .

(2) m, n を正の整数とし , $B(m, n) = \int_1^2 (x-1)^m (2-x)^n dx$ とする . このとき ,

$$(a) B(m, n) = \frac{n}{m+1} B(m+1, n-1), \quad (b) B(m, n) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

を示せ .