

解析 I 演習の問題 (その 4)

三角関数の極限值と基本不等式

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\bullet 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ のとき,}$$

$$\sin x < x < \tan x$$

練習 26 極限の性質をどのように用いたかを注意して, 次の極限が成り立つことを示せ.

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0 \quad (2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan h}{h} = 1$$

三角関数の微分と積分

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$$

練習 27, 28

次の関数の導関数または不定積分を求めよ .. 合成関数の微分や積分の変数変換を用いたときには, どのようにおいてかを明示せよ .

(1) $y = \cos x - \tan x$

(3) $y = \cos^2 2x$

(5) $y = \log(\sin x + 1)$

(7) $\int (2 \sin x - 4 \sin 2x) dx$

(2) $y = \sin 2x + \tan 3x + 3x$

(4) $y = (\sin x + \cos x)^3$

(6) $y = 2^{\sin x}$

(8) $\int \frac{2 - 3 \sin^2 x}{\cos^2 x} dx$

(ヒント : $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ を使う)

(9) $\int \cos 3x \cos x dx$

(10) $\int \sin 2x \cos 2x dx$

(11) $\int \sin 4x \sin 2x dx$

(12) $\int \frac{1}{\cos^2 3x} dx$

(13) $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$

(14) $\int e^x \sqrt{e^2 + 1} dx$

(15) $\int \sqrt{\cos x} \sin^3 x dx$

ヒント : 積和の公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta))$$

積と商の微分および部分積分と対数の積分

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

$$\int \log x dx = x \log x - x + C$$

練習 31 部分積分の公式を用いて, つぎの不定積分を求めよ. 解答の際はなにを $f(x)$, $g'(x)$ とおいたかを明示せよ. また $f'(x)$, $g(x)$ はどうなるかも明示すること.

(1) $\int x e^{-x} dx$

(2) $\int x \cos dx$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \log x dx$

(4) $\int (x+1)e^{x+1} dx$

(5) $\int (x^2 - 1) \log 2x dx$

(6) $\int (\log x)^2 dx$

(7) $\int \sqrt{x} \log x dx$

(8) $\int (x+1)e^x dx$

(9) $\int \log(2x+1) dx$

(10) $\int x \sin x dx$

(11) $\int (x+2) \cos 2x dx$

(12) $\int x^2 \sin x dx$

(13) $\int e^x \sin x dx + \int e^x \cos x dx$