

解析 I 演習の問題 (その 5)

練習 32 次の関数の逆関数を求め、元の関数と逆関数のそのグラフの概略を描け。

$$(1) y = \frac{1}{x+1} \quad (2) y = 2^x \quad (3) y = x^3$$

逆関数の導関数

$y = f(x)$ を x について解いたものを $x = g(y)$ とする。このとき、

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{\frac{d}{dy} g(y)}, \quad \text{すなわち,} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

練習 33 次の問いに答えよ。

(1) $y^2 = 4(x+1)$ ($y > 0$) について導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

(2) $x = (\sqrt{y} + 1)^2$ ($y > 0$) について導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

逆三角関数の微分と積分

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + C$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

練習 35 次の関数の微分と不定積分を求めよ。計算の途中で合成関数の微分をどのように使ったかや積分の変数変換をどのようにしたかを明示せよ。(7) については等式が成立することを示せ。

(1) $y = \arcsin 2x$

(2) $y = \arccos \left(\frac{1}{x} \right)$

(3) $y = (\arctan x)^2$

(4) $\int \frac{1}{x^2+2} dx$

(5) $\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx$

(6) $\int \arccos x dx$

(7) $\arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{\pi}{4}$

媒介変数で表現される関数の微分と積分

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad \text{のとき,} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

また

$$F(x) = \int y \, dx = \int g(f^{-1}(x)) \, dx = \int g(t) \frac{dx}{dt} \, dt = \int g(t) f'(t) \, dt$$

練習 36, 37 t を媒介変数として表される次の関数について, $\frac{dy}{dx}$ を求めよ.

$$(1) \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t^2 + 1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = t + 1 \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin t \end{cases}$$

練習 38 (1) $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin t \sin 2t \end{cases}$ のとき, $F(x) = \int y \, dx$ を t を用いて表せ.

(2) $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos t \end{cases}$ のとき, $F(x) = \int y \, dx$ を t を用いて表せ.