

解析 I 演習の問題 (その 7)

無理関数の積分法 (その 1)

$f(s, t)$ は s, t の有理関数とする .

$$\int f\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}\right) dx$$

の積分は

$$t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}$$

という置換積分を利用する .

無理関数の積分法 (その 2)

$f(s, t)$ は s, t の有理関数とする .

$$\int f\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx, \quad a > 0$$

の積分は

$$t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{ax}$$

という置換積分を利用する . 特に ,

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}} dx = \log|x + \sqrt{x^2 + A}|$$

$$(2) \int \sqrt{x^2 + A} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 + A} + A \log|x + \sqrt{x^2 + A}|)$$

注意 : $ax^2 + bx + c = (t - \sqrt{ax})^2 = t^2 - 2\sqrt{at}x + ax^2$ から $(b + 2\sqrt{at})x = t^2 - c$. よって

$$x = \frac{t^2 - c}{b + 2\sqrt{at}}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{ax} = \frac{\sqrt{at^2 + bt + \sqrt{ac}}}{2\sqrt{at} + b}$$

となる .

(1) と (2) は $t = \sqrt{x^2 + A} + x$ おくと $x^2 + A = t^2 - 2tx + x^2$ より $x = \frac{t^2 - A}{2t}$. これより

$$dx = \frac{t^2 + A}{2t^2} dt, \quad \sqrt{x^2 + A} = t - x = \frac{t^2 + A}{2t}$$

となる .

練習 40, 41 つぎの関数の積分を求めよ .

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^{1/3})} dx \quad (2) \int \frac{1}{x\sqrt{1-x}} dx \quad (3) \int \frac{1}{\sqrt{x-1}-(x-1)^{1/3}} dx$$

$$(4) \int \frac{1}{(x^2+A)^{3/2}} dx \quad (5) \int \frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2+x+1}} dx$$

無理関数の積分法 (その 3)

$f(s, t)$ は s, t の有理関数とし, $b^2 - 4ac > 0$ とする. $ax^2 + bx + c = -a(x - \alpha)(x - \beta)$ ($\alpha < \beta$) のとき,

$$\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad a > 0$$

の積分は

$$t = \sqrt{\frac{\beta - x}{x - \alpha}}$$

という置換積分を利用する .

有効な置換法

$f(s, t)$ は s, t の有理関数とする .

$$(1) \int f(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx : x = a \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \text{ とおくと ,}$$

$$dx = a \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta, \quad \sqrt{x^2 + a^2} = a \frac{1}{\cos \theta}.$$

$$(2) \int f(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx : x = a \frac{1}{\cos \theta} (0 \leq \theta \leq \pi, \theta \neq \pi/2) \text{ とおくと ,}$$

$$dx = a \frac{\tan \theta}{\cos \theta} d\theta, \quad \sqrt{x^2 - a^2} = \pm a \tan \theta.$$

$x < 0$ のとき, $\sqrt{x^2 - a^2} = -a \tan \theta$, $x > 0$ のとき, $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta$ である .

$$(3) \int f(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx : x = a \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \text{ とおくと ,}$$

$$dx = a \cos \theta d\theta, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta.$$

練習 42 つぎの関数の積分を求めよ .

$$(1) \int \frac{1}{(1-x^2)^{5/2}} dx \quad (2) \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{7/2}} dx \quad (3) \int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}} dx$$

ヒント : 三角関数の有理関数の積分 : $\tan(\theta/2) = t$ とおくと

$$d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \tan \theta = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

となることを利用して置換積分をするとよい .