今野　(2004 年 9 月 28 日)

解析 II 演習の問題 (その１)

微分可能性・微分係数・導関数

開区間 $I = (a, b)$ 上で定義された実数値関数 f と $x \in I$ に対して，極限

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c$$

が存在するとき，f は x で微分可能であるといい，c を f の x における微分係数という．このとき，

$$c = f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$$

等と記す．f が I の各点で微分可能なとき，$I \to \mathbb{R}$ の関数 $t \mapsto f'(x)$ が生ずる．これを f の導関数という．

二階導関数・k 階導関数

開区間 $I = (a, b)$ 上で定義された実数値関数 f の導関数が I で微分可能なとき，f' の導関数 $(f')'$ が定義される．これを f の二階導関数といい，f'' で表わす．以下帰納的に k 階導関数 $f^{(k)}$ が定義され微分可能なとき，$f^{(k)}$ の導関数として，f の $k+1$ 階導関数 $(f^{(k)})' = f^{(k+1)}$ が定義される．このとき，f は $(k+1)$ 回微分可能という．さらに，f が区間 I の各点で $(k+1)$ 回微分可能なとき，I 上で $(k+1)$ 回微分可能という．

k 回連続微分可能

開区間 $I = (a, b)$ 上で定義された実数値関数 f が I で k 階までの導関数を持ち，$f^{(k)}$ が連続であるとき，I で k 回連続微分可能[1]という．

練習 1　次の等式を数学的帰納法を用いて証明せよ．

(1) $(e^x)^{(n)} = e^x$　(2) $(\log x)^{(n)} = (-1)^{(n-1)}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$

ライプニッツの公式

関数 $f,\, g : (a,\, b) \to \mathbb{R}$ が $(a,\, b)$ 上で k 回微分可能であるとき，積 fg の k 階導関数はつぎで与えられる．

$$(f(x)g(x))^{(k)} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} f^{(\ell)}(x) g^{(k-\ell)}(x)$$

練習 2 つぎの n 階導関数を求めよ．

(1) $y = \sqrt{x}$　(2) $y = \dfrac{x}{x+1}$　(3) $y = \dfrac{1}{2x^2+x-1}$　(4) $y = x\log x$

(5) $y = \sin x \cos x$　(6) $y \;= x^2 \cos x$

練習 3 (1) $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ について答えよ．

(a) f' と f'' を求め，$(1+x^2)f'' + xf' = 0$ をみたすことを示せ．

(b) $(1+x^2)f'' + xf' = 0$ を n 回微分することにより $f^{(n)}(0)$ を求めよ．

(2) $f(x) = \arcsin x$ は

$$(1-x^2)f'' - xf'(x) = 9$$

をみたすことを示し，$f^{(n)}(0)$ を求めよ．
(3) $f(x) = x^2 \sin x$ のとき，$f^{(n)}(0)$ を求めよ．
(4) n を自然数とする．$f(x) = (x^2-1)^n$ について答えよ．

(a) f は

$$(x^2-1)f' = 2nxf$$

をみたすことを示せ．

(b)

$$(x^2-1)f^{(n+2)} + 2xf^{(n+1)} - n(n+1)f^{(n)} = 0$$

をみたすことを示せ．

注　$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} f^{(n)}$ とおけば，微分方程式

$$(x^2-1)y''2xy' - n(n+1)y = 0$$

をみたす．$P_n(x)$ は多項式の導関数だから多項式となる．これをルジャンドルの多項式という．