今野　(2004 年 10 月 5 日)

解析 II 演習の問題 (その 2)

接線と法線の方程式

- 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\, f(a))$ における接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

- 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\, f(a))$ における法線の方程式は

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

練習 4, 5　つぎの曲線上の括弧内に示された値を x 座標にもつ点における接線の方程式 ((1)-(4)) を，法線の方程式 ((5)-(8)) を求めよ．

(1) $y = \cos x \quad (x = \pi)$　(2) $y = \sqrt{x+2} \quad (x = -1)$　(3) $y = \log x \quad (x = e)$

(4) $y = e^x \quad (x = 0)$　(5) $y = \sqrt{x-1} \quad (x = 5)$　(6) $y = 3^x \quad (x = 1)$

(7) $y = \sin x \quad (x = \dfrac{\pi}{3})$　(8) $y = \dfrac{2}{x} \quad (x = 2)$

極値の定義

関数 $f(x)$ が $x = a$ を含むある区間で定義されているとする．

- a に十分近い x に対して

$$x < a \quad \text{ならば} \quad f(x) < f(a), \qquad x > a \quad \text{ならば} \quad f(x) > f(a)$$

であるとき，$f(x)$ は a で増加状態にあるといい，

$$x < a \quad \text{ならば} \quad f(x) > f(a), \qquad x > a \quad \text{ならば} \quad f(x) < f(a)$$

であるとき，$f(x)$ は a で減少状態にあるという．

- a に十分近い x に対して

つねに $f(x) > f(a)$ であるならば，$f(x)$ は $x = a$ で極小
つねに $f(x) < f(a)$ であるならば，$f(x)$ は $x = a$ で極大

という．

極値に関する定理

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能のとき，
(1) $f'(a)>0$ ならば，$f(x)$ は a で増加状態
(2) $f'(a)<0$ ならば，$f(x)$ は a で減少状態
(3) $f(a)$ が広義の極値ならば，$f'(a)=0$

ロールの定理・平均値の定理・コーシーの平均値の定理

関数 $f(x)$, $g(x)$ が閉区間 $a \leq x \leq b$ で連続であって，開区間 $a<x<b$ で微分可能であるものとする．

- もし，$f(a)=f(b)$ であるならば，

$$f'(c)=0 \qquad (a<c<b)$$

をみたす c が少なくとも一つ存在する．

-

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (a<c<b)$$

をみたす c が少なくとも一つ存在する．

- もし，$a<x<b$ において $g'(x)\neq 0$（この仮定より $g(a)\neq g(b)$ が保障されることに注意）ならば

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

をみたす c が少なくとも一つ存在する．

練習 6, 7　つぎの不等式が成立することを示せ．
(1) $a<b$ のとき

$$e^a<\frac{e^b-e^a}{b-a}<e^b$$

(2) $0<a<b<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\cos b<\frac{\sin b-\sin a}{b-a}<\cos a$$

(3) $0<a<b<c<\pi$ のとき

$$\frac{\sin b-\sin a}{b-a}>\frac{\sin c-\sin b}{c-b}$$

(4) $0<a<b$ とする．関数 $f(x)$ が $a\leq x\leq b$ で連続で $a<x<b$ で微分可能ならば

$$f(b)-f(a)=\left(\log\frac{b}{a}\right)cf'(c) \qquad (a<c<b)$$

をみたす c が存在することを示せ．
ヒント：結論式を

$$\frac{f(b)-f(a)}{\log b-\log a}=\frac{f'(c)}{1/c}$$

と書いてみる．
(5) $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\,(a<b<c)$ とするとき，方程式 $f'(x)=0$ の解 $\alpha,\,\beta(\alpha<\beta)$ は $a<\alpha<b<\beta<c$ となることを示せ．

ロピタルの定理

- 関数 $f(x),\,g(x)$ が a を含む区間で連続であって，この区間の a 以外の点で微分可能であるとする．このとき，この区間の a 以外の点でつねに $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$ であって， $f(a)=g(a)=0$ であるとき

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$$

が存在するならば，$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も存在して，ℓ に等しい．

- ある半直線 $[a,\,\infty)$ 上で微分可能な関数 $f(x),\,g(x)\,(g(x)\neq 0,\,g'(x)\neq 0)$ とする．

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0$$

であるとき

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$$

が存在するならば，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も存在して，ℓ に等しい．

練習 8, 9 つぎの極限値を求めよ．

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$　(2) $\lim_{x\to +0}x\log x$　(3) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\log x}\right)$

(4) $\lim_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$　(5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$

(5) のヒント：(5) は $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ に注意すること． $y=(1+x)^{1/x}$ として，$\log y$ の導関数を求め，$\lim_{x\to 0}y^{-1}y'$ を調べればよい．