今野　(2004 年 10 月 12 日)

解析 II 演習の問題 (その 3)

テイラー展開

関数 $f(x)$ が区間 $a \le x \le b$ で n 回微分可能とする．そのとき，

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + R_n, \\ R_n &= \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \qquad (a < c < b) \end{aligned}$$

となる c が少なくと一つ存在する．ただし，$f^{(0)}(x) = f(x)$ とした．

注意：$f^{(n-1)}(x)$ が $[a,\, b]$ で連続で，$f^{(n)}(x)$ が $(a,\, b)$ で存在すればよい．

マルローリン展開

関数 $f(x)$ が $x = 0$ を含む区間 $a < x < b$ で n 回微分可能ならば，つぎの等式がなりたつような $\theta\,(0 < \theta < 1)$ がすくなくとも一つ存在する．

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n, \\ R_n &= \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n \qquad \text{あるいは} \qquad R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}x^n \qquad (a < x < b) \end{aligned}$$

となる θ が少なくと一つ存在する．

整級数

実数の数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

を原点を中心とする整級数という．

マルローリン展開

関数 $f(x)$ が原点を含む区間 $a < x < b$ で何回でも微分可能であるもとする．テイラーの定理より

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n$$

が成立する．ただし，R_n は剰余項である．区間 $a < x < b$ で

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

がなりたつとき，

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{(n)!}x^n + \cdots$$

と整級数に展開できる．

練習 10 つぎの関数を整級数に展開せよ．
(1) $\sin 3x$ (2) $\cos^2 x$ (3) $e^x + x^{-x}$

ヒント：(1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{n!} < \lim_{n\to\infty} 3^4 \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-4} = 0$ に注意せよ．(2) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(\cos 2x - 1)$. (3) $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ と $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ を数列とする．$\sum_{n=0}^\infty a_n$ と $\sum_{n=0}^\infty b_n$ が収束してその和が s, t ならば，$\sum_{n=0}^\infty (a_n \pm b_n) = s \pm t$.

練習 11 a を自然数ではない実数とするとき，$-1 < x < 1$ で

$$(1+x)^a = 1 + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \cdots + \binom{a}{n}x^n + \cdots$$

と展開できる．ただし，

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!} \qquad k = 1,\, 2,\, \cdots$$

ヒント：以下の内容 (下線部) はまだ習っていないので，使っている教科書の構成では数学的に理解することは困難とおもわれる．以下は参考までに書いておきます．まず，$f(x) := \sum_{n=0}^\infty \binom{a}{n} x^2$ は $|x| < 1$ のときに収束することが Latio Test でわかる．よって，整級数を項別微分できる：

$$f'(x) = \sum_{n=1}^\infty n\binom{a}{n}x^{n-1} = a\sum_{n=1}^\infty \binom{a-1}{n-1}x^{n-1}$$

ここで，$\binom{a}{n} = \binom{a-1}{n-1} + \binom{a-1}{n}$ に注意して

$$(1+x)f'(x) = a\left(\sum_{n=0}^\infty \binom{a-1}{n}x^n + \sum_{n=1}^\infty \binom{a-1}{n-1}x^n\right) = a\sum_{n=0}^\infty \binom{a}{n}x^n$$

を得る．したがって，微分方程式

$$(1+x)f'(x) = af(x)$$

を解けば，

$$\log f(x) = a\log(1+x) + C \qquad (C \text{ は定数})$$

となる．ここで $x=0$ を代入すれば，$C=0$．よって，$f(x)=(1+x)^a$ がわかる．

練習 12 $|x|<1$ のとき，つぎの整級数に展開できることを示せ．ただし，例題 2 と練習 11 の結果は用いてよい．

(1) $\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right)$

(2) $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\dfrac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)x^n}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)\cdot 2n} + \cdots$