解析 II 演習の問題 (その４)

関数の局所的な性質

$f'(x)$ の符号と関数の増減

- $f'(x) > 0$ となる区間では，関数 $f(x)$ は増加.
- $f'(x) < 0$ となる区間では，関数 $f(x)$ は減少.

変曲点 とは，曲線の凹凸が入れ換わる点.
2 階導関数と関数の凹凸

- $f''(x) > 0$ となる区間では，関数 $f(x)$ は下に凸.
- $f''(x) < 0$ となる区間では，関数 $f(x)$ は上に凸.

2 階導関数と極値$x = c$ の近くで $f''(x)$ は存在し，$f\prime(x) = 0$ とする.

- $f''(c) > 0$ ならば，$f(x)$ は $x = c$ で極小.
- $f''(c) < 0$ ならば，$f(x)$ は $x = c$ で極大.

練習 13　つぎの関数の増減を調べ，極値を求めよ.
(1) $y = \sqrt{x^2 - x^4}$　(2) $y = x^2 e^{-x}$　(3) $y = \sin 2x + 2\sin x$　$(0 \leq x \leq 2\pi)$

練習 14, 15　次の曲線の凹凸を調べよ．また，変曲点があればそれを求めよ.
(1) $y = x - \dfrac{1}{x}$　(2) $y = e^x + e^{-x}$　(3) $y = xe^x$
(4) $y = (\log x)^2$　(5) $y = \sin^2 x$　$(0 < x < 2pi)$

関数の極限値の定義

$f(x)$ が定義されている区間で，x が a と異なる値をとりながら a に近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 b に限りなく近づくならば，これを

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

と表し，値 b を x が a に限りなく近づくときの $f(x)$ の極限値という.

右極限と左極限の定義

右極限　x が a より大きな値をとりながら，限りなく a に近づくことを x は右から a に近づくといい，

$$x \to a+0$$

と表す.
左極限　x が a より小さな値をとりながら，限りなく a に近づくことを x は左から a に近づくといい，

$$x \to a-0$$

と表す.
記法　$x \to a+0, x \to a-0$ のときの $f(x)$ の極限を，それぞれ x が a に近づくときの右極限，左極限といい，

$$\lim_{x \to a+0} f(x), \qquad \lim_{x \to a-0} f(x)$$

とかく.
連続性$\lim_{x \to a} f(x)$ が存在するためには，$\lim_{x \to a+0} f(x), \lim_{x \to a-0} f(x)$ がともに存在し，それらが等しくならなければならない.

極限値の性質

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha, \lim_{x \to a} g(x) = \beta$ (α, β は定数) のとき，
(1) $\lim_{x \to a} kf(x) = k\alpha \qquad (k$ は定数)
(2) $\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta$
(3) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \alpha\beta, \qquad \lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}, \qquad$ ただし，$g(x) \neq 0, \beta \neq 0$
(4) $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha, \lim_{x \to \alpha} g(x) = \beta$ のとき，a に十分近い x の値に対してつねに $f(x) \leq g(x)$ ならば，$\alpha \leq \beta$ である.
(5) **はさみうちの原理**$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \alpha$ のとき，a に十分近い x の値に対してつねに $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ ならば，$\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$ である.

基本公式

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\log} = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

練習 16　つぎの極限値を求めよ.
(1) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x}{x+3}$　(2) $\lim_{x \to 2} 2^x$　(3) $\lim_{x \to 1} \sin x$　$\lim_{x \to 1} \arcsin x$

練習 17 つぎの極限値を求めよ．

(1) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-x-2}$ (2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ (3) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(4) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x-4}{x^3-8}$ (5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ (6) $\lim_{t\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x+2})$

(7) $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{x}$

練習 18 つぎの関数の極限を調べよ．

(1) $\lim_{x\to +0}\dfrac{1}{x}$ (2) $\lim_{x\to 1+0}\log(x+1)$ (3) $\lim_{x\to \pi/2-0}\tan x$ (4) $\lim_{x\to 1-0}\dfrac{\sin \pi x}{|x-1|}$

連続関数の定義

- 関数 $f(x)$ が $x=a$ において連続であるとは

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

がなりたつことをいう．

- f が区間 I の各点で連続のとき，f は区間 I 上で連続という．
- ただし，f が閉区間 $I=[a,\, b]$ 上で連続とは，開区間 $(a,\, b)$ 上で連続であり，区間の端 $a,\, b$ においては

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x\to b-0} f(x) = f(b)$$

がなりたつことをいう．

合成関数の極限値の性質

$f(x)$ は x_0 で連続とし，$g(y)$ が $y_0=f(x_0)$ で連続ならば，合成関数 $g(f(x))$ も x_0 で連続．すなわち

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$$

また，$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ を代入すれば，

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x))$$

となる．

練習 19 つぎの極限を求めよ．

(1) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{\log x}$ (2) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}$ (3) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+\log x}$ (4) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

導関数の定義

- 関数 $f(x)$ と t に対して，極限値

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} = c$$

が存在するとき，$f(x)$ は $x=t$ で微分可能であるという．

- c を f の t における微分係数という．このとき，

$$c = f'(t) = \frac{df}{dt}(t)$$

等と記す．

- 開区間 (a, b) の各点で f が微分可能であるとき，$x \in (a, b)$ に対して関数 $x \mapsto f'(x)$ を f の導関数という．

微分可能性と連続性

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であれば，関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続．
この命題の逆は成立しないことに注意せよ．

中間値の定理

関数 $f(x)$ が区間 $a \leq x \leq b$ で連続であって，$f(a) \neq f(b)$ ならば，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対して，

$$f(c) = k \qquad (a < k < b)$$

をみたす c がすくなくとも一つ存在する．

練習 20 つぎの関数が $x=0$ で微分可能かどうかを調べよ．
(1) $y = |x^3|$ (2) $y = \dfrac{x^2}{|x|}$

練習 21 方程式 $x = \cos x$ は，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で少なくと一つの実数解をもつことを示せ．
ヒント：中間地の定理を使う．

練習 22 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ は少なくとも一つの実数解をもつことを示せ．