解析 I 演習の問題 (その２)

関数の極限値の定義

$f(x)$ が定義されている区間で，x が a と異なる値をとりながら a に近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 b に限りなく近づくならば，これを

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

と表し，値 b を x が a に限りなく近づくときの $f(x)$ の極限値という.

右極限と左極限の定義

- x が a より大きな値をとりながら，限りなく a に近づくことを x は右から a に近づくといい，
$$x \to a + 0$$
と表す.

- x が a より小さな値をとりながら，限りなく a に近づくことを x は左から a に近づくといい，
$$x \to a - 0$$
と表す.

- $x \to a + 0$, $x \to a - 0$ のときの $f(x)$ の極限を，それぞれ x が a に近づくときの右極限，左極限といい，
$$\lim_{x \to a+0} f(x), \qquad \lim_{x \to a-0} f(x)$$
とかく.

- $\lim_{x \to a} f(x)$ が存在するためには，$\lim_{x \to a+0} f(x)$, $\lim_{x \to a-0} f(x)$ がともに存在し，それらが等しくならなければならない.

極限値の性質

$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ (α, β は定数) のとき，

(1) $\lim_{x\to a} kf(x) = k\alpha$ (k は定数)

(2) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta$

(3) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$, $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$, ただし，$g(x) \neq 0$, $\beta \neq 0$

連続関数の定義

- 関数 $f(x)$ が $x = a$ において連続であるとは

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

がなりたつことをいう.

- f が区間 I の各点で連続のとき，f は区間 I 上で連続という.
- ただし，f が閉区間 $I = [a, b]$ 上で連続とは，開区間 (a, b) 上で連続であり，区間の端 a, b においては

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x\to b-0} f(x) = f(b)$$

がなりたつことをいう.

合成関数の極限値の性質

$f(x)$ は x_0 で連続とし，$g(y)$ が $y_0 = f(x_0)$ で連続ならば，合成関数 $g(f(x))$ も x_0 で連続．すなわち

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$$

また，$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ を代入すれば，

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x))$$

となる.

導関数の定義

- 関数 $f(x)$ と t に対して，極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=c$$

  が存在するとき，$f(x)$ は $x=t$ で微分可能であるという.

- c を f の t における微分係数という．このとき，

$$c=f'(t)=\frac{df}{dt}(t)$$

  等と記す.

- 開区間 $(a,\,b)$ の各点で f が微分可能であるとき，$x\in(a,\,b)$ に対して関数 $x\mapsto f'(x)$ を f の導関数という.

微分可能性と連続性

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であれば，関数 $f(x)$ は $x=a$ で連続.
この命題の逆は成立しないことに注意せよ.

不定積分の定義

- 関数 $f(x)$ に対して

$$F'(x)=f(x)$$

  をみたす関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という.

- 任意の定数 C に対hして $F(x)+C$ を $f(x)$ の不定積分といい，

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

  と書く.

微積分の和の計算

$k,\,l$ は定数とし，ある区間上で $f(x),\,g(x)$ は微分可能とする..

(1) $\{kf(x)+lg(x)\}'=kf'(x)+lg'(x)$

(2) $\int\{kf(x)+lg(x)\}\,dx=k\int f(x)\,dx+l\int g(x)\,dx$

練習 1 関数の極限値の性質と導関数の定義を利用して，微分の和の計算 (1) が成り立つ理由を述べよ．微分の和の計算 (1) と原始関数の定義を利用して，積分の和の計算 (2) が成り立つ理由を述べよ．

合成関数の微分

$y = f(u)$, $u = g(x)$ がともに微分可能であるとき，合成関数 $y = f(g(x))$ の導関数は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

練習 6 $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{x}$ とするとき，$f(g(x))$ と $g(f(x))$ を求めよ．

練習 7, 8, 9, 10 つぎの関数を微分せよ．

(1) $y = (2x+5)^3$ (2) $y = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ (3) $y = (x^3 - 2x)^4$

(4) $y = x^{4/3} - 3x^{-2/3} + 4^{-3/2}$ (5) $y = x^{2/5}$ (6) $y = x^{-1/3}$

(7) $y = \sqrt{x+1}$ (8) $y = \sqrt{x^2+1}$ (9) $y = (x+1)^{-1/3}$

置換積分法

$x = g(t)$ とおくと

$$\int f(x)\,dx = \int f(x)\frac{dx}{dt}\,dt = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

$g(x) = t$ のとき，

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,\frac{dt}{dx}\,dx = \int f(t)\,dt$$

練習 12, 13, 14, 15 つぎの関数の不定積分を求めよ．

(1) $\int (5x-4)^{3/2}\,dx$ (2) $\int x\sqrt{3x-1}\,dx$ (3) $\int x^2(1+x)^{-1/3}\,dx$

(4) $\int \dfrac{6x}{(1+x^2)^2}\,dx$ (5) $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ (6) $\int x^3\sqrt{x^4+1}\,dx$