

解析 II 演習の問題 (その 5)

曲線の概形

- (1) 関数の定義域
- (2) 座標軸などの共通点
- (3) 座標軸, 原点などに関する対称性
- (4) 増減と極値
- (5) 凹凸と変曲点 (凹凸の境になっている点)
- (6) $x \rightarrow \pm\infty$ における挙動

練習 23, 24 つぎの関数について, (存在すれば) 極値, 凹凸などを調べよ. さらに, (3), (4), (9)–(14) についてはグラフを描け.

- | | | |
|---|--|---|
| (1) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ | (2) $y = (1 + x^2)$ | (3) $y = x\sqrt{1 - x^2}$ |
| (4) $y = \sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}$ | (5) $y = x^2 - e^x$ | (6) $y = x^2 + \log x $ |
| (7) $y = 2\sin x + \sin 2x$ ($0 \leq x \leq \pi$) | (8) $y = x + 2\sin x$ | (9) $y = 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}$ |
| (10) $y = x - 2\sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) | (11) $y = e^{x^2}$ | (12) $y = \frac{x^2}{x - 1}$ |
| (13) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ | (14) $y = \cos x - \frac{1}{2}\sin 2x$ | |

漸近線

曲線上の点が原点から限りなく遠ざかるにしたがって, 一つの定まった直線に限りなく近づくととき, この直線を漸近線という.

練習 25 つぎの曲線の漸近線を求めよ.

- | | | | |
|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------|
| (1) $y = \frac{1}{(x - 2)^2}$ | (2) $y = \frac{3x - 1}{x + 2}$ | (3) $y = \frac{2x^2 + x + 1}{x + 1}$ | (4) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ |
|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------|

練習 26 つぎの関数について, 括弧内に示された区間における (存在するならば) 最大値と最小値を求めよ.

- | | | |
|--|--|--|
| (1) $f(x) = xe^{-x}$ ($-1 \leq x \leq 2$) | (2) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ ($x \geq 0$) | |
| (3) $f(x) = \cos x(1 + \sin x)$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) | (4) $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$ | |
| (5) $f(x) = x + \sqrt{1 - 2x^2}$ | (6) $f(x) = \frac{2 - \cos x}{\sin x}$ ($0 < x < \pi$) | |
| (7) $f(x) = \frac{x}{e^x}$ ($0 \leq x \leq 2$) | | |

練習 27

- (1) 方程式 $x^4 - 4kx^3 + 3 = 0$ が実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。
定数 k に対して, 方程式 $e^x = kx$ の実数解の個数を調べよ。
(3) 方程式 $x^3 = a(x-1)^2$ が異なる 3 つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

練習 28, 29

- (1) $x > 0$ のとき, つぎの不等式が成立することを示せ。

$$x > \log(1+x) > x - \frac{1}{2}x^2$$

- (2) $p > 1$ とする. $x \geq 0$ において, つぎの不等式が成立することを示せ。

$$\frac{1}{p}x^p + 1 - \frac{1}{p} \geq x$$

- (3) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, つぎの不等式を証明せよ。

(i) $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2$ (ii) $\sin x > x - \frac{1}{6}x^3$ (iii) $\sin x \geq x \cos x$

- (4) $x \geq 0$ のとき, つぎの不等式が成り立つことを示せ。

$$\log(1+x) \geq \frac{x}{1+x}$$