解析 II 演習の問題 (その 6)

練習 1, 2, 3, 4, 5 つぎの曲線や直線で囲まれた部分の面積を求めよ．
(1) $\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{4}$ の範囲で $y = \sin x$，$y = \cos x$.
(2) $y = \dfrac{6}{x}$，$2x + y = 8$.
(3) $y = x^4 - 2x^2 + 1$ と x 軸.
(4) $y = -x^4 + 2x^2$ と $y = x^2$.
(5) $x = y^{2/3}$ と y 軸および $y = 1$ で囲まれる図形.
(6) $x^2 + y^2 \leq 1$ と $4y + 1 \geq 4x^2$ を同時にみたす図形.
(7) a を正の定数とする．θ を媒介変数とする曲線 $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta\,(0 \leq \theta 2 \leq \pi)$ で囲まれる図形.
(8) t を媒介変数とする曲線 $x = t - t^3$, $y = 1 - t^4\,(-1 \leq t \leq 1)$ で囲まれる図形.

極方程式と面積

極座標 $r = f(\theta)$ で表される曲線と直線 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ で囲まれた部分の図形の面積は

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \{f(\theta)\}^2\,d\theta$$

練習 6 つぎのことを示せ．ただし，$a > 0$ とする．
(1) 2 直線 $y = \dfrac{8}{x^2+4}$ と $y = \dfrac{1}{4}x^2$ の囲む面積は $2\pi - \dfrac{4}{3}$.
(2) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ の囲む部分の面積は $\dfrac{3}{8}\pi a^2$.
(3) $r^2 = 2a^3\cos 2\theta$ の囲む面積は $2a^2$.

曲線の長さ

媒介変数 t を用いて，曲線が $x = g(t)$, $y = f(t)\,(t_1 \leq t \leq t_2)$ と表されるとき，曲線の長さ s は

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

となる．また，曲線 $y = f(x)\,(a \leq x \leq b)$ の長さ s は

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\,dx$$

となる．

練習 12, 13
(1) a を正の定数とするとき，曲線 $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta\,(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ の長さを求めよ．ヒント：第一象限にある曲線の長さを 4 倍すればよい．
(2) 曲線 $y = x^{3/2}\,(0 \leq x \leq 4/3)$ の長さを求めよ．
(3) 曲線 $y = \log(1 - x^2)\,(0 \leq x \leq 1/2)$ の長さを求めよ．

定積分の不等式

区間 $a \leq x \leq b$ 上で連続な関数 $g(x),\ h(x)$ について

$$g(x) \geq h(x) \Longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b h(x)\,dx.$$

等号成立は， $g(x) = h(x)\,(a \leq x \leq b)$ である．

練習 14 つぎの不等式を示せ．
(1) $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1}\,dx < \log 2$ (2) $\dfrac{\pi}{4} < \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3 + 1}\,dx < 1.$