解析 II 演習の問題 (その７)

積分の定義

(1) f を有界閉区間 $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ 上の関数[2]とする．(注：教科書では有界閉関数としているが，とりあえずは有界性は必要ない)

(2) 区間 $[a, b]$ の**分割**とは，内点を共有しない有限個の小区間の合併として区間 $[a, b]$ を表すことをいう．ひとつの分割 Δ は，小区間の端点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ を与えることによって定まる．各 $x_i\,(1 \leq i \leq n-1)$ を分点という．

(3) 分割 Δ の細かさを表すために，$x_i - x_{i-1}\,(1 \leq i \leq n)$ の最大を $|\Delta|$ と書くことにする．

(4) **リーマン和**：$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i\,(1 \leq i \leq n)$ である数 ξ_i を任意に選んで

$$F(f, \Delta, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

とおく，ただし，$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ である．

(5) もし，ある数 I が存在して，小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の代表点 ξ_i の取り方によらず

$$\lim_{|\Delta| \to 0} F(f, \Delta, \xi) = I$$

となるとき，関数 f は有界閉区間 $[a, b]$ 上で（リーマン）**積分可能**であるという．このとき，I を a から b までの定積分といい，

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

と書く．

積分可能の十分条件

関数 $f(x)$ が有界閉区間 $[a, b]$ で連続ならば，$a \leq x \leq b$ で $f(x)$ は積分可能．

定積分の性質

関数 $f(x)$, $g(x)$ は $a \leq x \leq b$ で積分可能とする．

(1) $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(2) k を定数とする． $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

(3) $a \leq x \leq b$ でつねに $f(x) \geq g(x)$ ならば， $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

(4) 区間 $[a,\, b]$ の任意の 3 点 $p,\, q,\, r$ に対して， $\displaystyle\int_p^q f(x)\,dx = \int_p^r f(x)\,dx + \int_r^q f(x)\,dx$

(5) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

積分に関する定理

(1) **積分に関する平均値の定理**

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$$

であるような c が a と b の間に少なくとも一つ存在する．
(2) **原始関数**　区間 $a \leq x \leq b$ に属する x に対して

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$$

とおくと $F'(x) = f(x)$ となる．すなわち，$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数．
(3) **微積分の基本的定理**　$F(x)$ を $f(x)$ の任意の不定積分とすれば，

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

練習 15 (a) つぎの定積分を求めよ．
(1) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-x+1}\,dx$　(1) $\displaystyle\int_{1/3}^{2/3} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$
ヒント：(2) $x^2-x+1 = \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$ として変数変換．(3) $x(1-x) = \dfrac{1}{4} - \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$ として変数変換．
(b) $f(x)$ を連続関数としたとき，つぎを求めよ．
(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{2x}^{x^2} f(t)\,dt$　(2) $\displaystyle\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$