広義積分：$f(x)$ が有限区間 $a \leq x \leq b$ で有限個の不連続点を持つ場合

(1) $f(x)$ が $I = (a,\, b]$ で連続で，つぎの極限値

$$\lim_{\epsilon \to +0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\, dx$$

が存在するならば，この極限値を $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ と定義する．
(2) $f(x)$ が $I = [a,\, b)$ で連続で，つぎの極限値

$$\lim_{\epsilon \to +0} \int_{a}^{b-\epsilon} f(x)\, dx$$

が存在するならば，この極限値を $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ と定義する．
(3) $f(x)$ が $I = (a,\, b)$ で連続で，つぎの極限値

$$\lim_{\epsilon \to +0} \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f(x)\, dx$$

が存在するならば，この極限値を $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ と定義する．

(1) – (3) のどれかの意味で $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx)$ が定義されるとき，関数 $f(x)$ は区間 I で積分可能であるといい，$\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ を $f(x)$ の I における広義積分という．
(4) $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ 内の $c_1,\, c_2,\, \ldots\, ,\, c_n\, (a < c_1 < c_2 < \cdots < c_n < b)$ の n 個の点で不連続で，それ以外の点では連続な場合，つぎの $(n+1)$ 個の定積分

$$\int_a^{c_1} f(x)\, dx, \quad \int_{c_1}^{c_2} f(x)\, dx, \quad \cdots \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)\, dx, \quad \int_{c_n}^{b} f(x)\, dx$$

のすべてが (1) – (3) のどれかの意味で定義される場合，これらの $(n+1)$ 個の定積分の和を $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ と定義する．

練習 16　つぎの定積分を求めよ．
(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$
(不連続点はどこかを見つけ，広義積分の定義に従い積分を求める．)

無限区間における積分

関数 $f(x)$ が連続のとき，無限区間 $a \leq x < \infty$, $-\infty < x \leq b$, $-\infty < x < \infty$ における $f(x)$ の積分をつぎのように定義する．

(5) $f(x)$ が $I = [a, \infty)$ で連続で，つぎの極限値

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

が存在するならば，この極限値を $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ と定義する．

(6) $f(x)$ が $I = (-\infty, b]$ で連続で，つぎの極限値

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

が存在するならば，この極限値を $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ と定義する．

(7) $f(x)$ が $I = (\infty, \infty)$ で連続で，つぎの極限値

$$\lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \int_a^b f(x)\,dx$$

が存在するならば，この極限値を $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ と定義する．

(5) – (7) のどれかの意味で積分が定義されるとき，関数 $f(x)$ は区間 I で積分可能であるといい，$\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ を $f(x)$ の I における広義積分という．

練習 17
つぎの広義積分を (定義されるならば) 求めよ．
(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x(1+x)}\,dx$

練習 18
つぎの問いに答えよ．
(1)

$$\lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x}$$

の値を求めよ．
(2) $0 < a < b < \infty$ としたとき，部分積分の公式を用いて，

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_a^b - \int_a^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

を示せ．

(3)

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leq \frac{1}{a}$$

を示せ．

(4) $\displaystyle\lim_{\substack{a\to\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)\,dx = 0$ ならば，$\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ は存在することを利用して，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ は存在することを示せ．

ヒント：$|\int f(x)\,dx| \leq \int |f(x)|\,dx$ および $|\cos x| \leq 1$, $|\sin x| \leq 1$ 等を使うとよい．直接証明には関係ないが，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ となることが知られている．

練習 19

(1) $\alpha > 0$, $\beta > 0$ に対して，積分

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-1} x \sin^{2\beta-1} x\,dx$$

をベータ関数を用いて表せ．(ヒント：$t = \cos^2\theta$ と変換)

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin^7 x\,dx$ を求めよ．