

解析 I 演習の問題 (その 2)

関数の極限値の定義

$f(x)$ が定義されている区間で, x が a と異なる値をとりながら a に近づくとき, $f(x)$ の値が一定の値 b に限りなく近づくならば, これを

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

と表し, 値 b を x が a に限りなく近づくときの $f(x)$ の極限値という.

右極限と左極限の定義

- x が a より大きな値をとりながら, 限りなく a に近づくことを x は右から a に近づくといい,

$$x \rightarrow a + 0$$

と表す.

- x が a より小さな値をとりながら, 限りなく a に近づくことを x は左から a に近づくといい,

$$x \rightarrow a - 0$$

と表す.

- $x \rightarrow a + 0, x \rightarrow a - 0$ のときの $f(x)$ の極限を, それぞれ x が a に近づくときの右極限, 左極限といい,

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

とかく.

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在するためには, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x), \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ がともに存在し, それらが等しくならなければならない.

極限値の性質

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ (α, β は定数) のとき ,

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow a} k f(x) = k \alpha \quad (k \text{ は定数})$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \alpha\beta, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{ただし, } g(x) \neq 0, \beta \neq 0$$

連続関数の定義

- 関数 $f(x)$ が $x = a$ において連続であるとは

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

がなりたつことをいう .

- f が区間 I の各点で連続のとき , f は区間 I 上で連続という .
- ただし , f が閉区間 $I = [a, b]$ 上で連続とは , 开区間 (a, b) 上で連続であり , 区間の端 a, b においては

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)$$

がなりたつことをいう .

合成関数の極限値の性質

$f(x)$ は x_0 で連続とし , $g(y)$ が $y_0 = f(x_0)$ で連続ならば , 合成関数 $g(f(x))$ も x_0 で連続 . すなわち

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$$

また , $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ を代入すれば ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right)$$

となる .

導関数の定義

- 関数 $f(x)$ と t に対して, 極限值

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = c$$

が存在するとき, $f(x)$ は $x = t$ で微分可能であるという.

- c を f の t における微分係数という. このとき,

$$c = f'(t) = \frac{df}{dt}(t)$$

等と記す.

- 开区間 (a, b) の各点で f が微分可能であるとき, $x \in (a, b)$ に対して関数 $x \mapsto f'(x)$ を f の導関数という.

微分可能性と連続性

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であれば, 関数 $f(x)$ は $x = a$ で連続.
この命題の逆は成立しないことに注意せよ.

不定積分の定義

- 関数 $f(x)$ に対して

$$F'(x) = f(x)$$

をみたす関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という.

- 任意の定数 C に対して $F(x) + C$ を $f(x)$ の不定積分といい,

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

と書く.

微積分の和の計算

k, l は定数とし, ある区間上で $f(x), g(x)$ は微分可能とする ..

$$(1) \quad \{kf(x) + lg(x)\}' = kf'(x) + lg'(x)$$

$$(2) \quad \int \{kf(x) + lg(x)\} dx = k \int f(x) dx + l \int g(x) dx$$

練習 1 関数の極限値の性質と導関数の定義を利用して，微分の和の計算 (1) が成り立つ理由を述べよ．微分の和の計算 (1) と原始関数の定義を利用して，積分の和の計算 (2) が成り立つ理由を述べよ．

合成関数の微分

$y = f(u)$, $u = g(x)$ がともに微分可能であるとき，合成関数 $y = f(g(x))$ の導関数は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

練習 6 $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{x}$ とするとき， $f(g(x))$ と $g(f(x))$ を求めよ．

練習 7, 8, 9, 10 つぎの関数を微分せよ．

$$(1) y = (2x + 5)^3 \quad (2) y = \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \quad (3) y = (x^3 - 2x)^4$$

$$(4) y = x^{4/3} - 3x^{-2/3} + 4x^{-3/2} \quad (5) y = x^{2/5} \quad (6) y = x^{-1/3}$$

$$(7) y = \sqrt{x+1} \quad (8) y = \sqrt{x^2+1} \quad (9) y = (x+1)^{-1/3}$$

置換積分法

$x = g(t)$ とおくと

$$\int f(x) dx = \int f(x) \frac{dx}{dt} dt = \int f(g(t)) g'(t) dt$$

$g(x) = t$ のとき，

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(t) \frac{dt}{dx} dx = \int f(t) dt$$

練習 12, 13, 14, 15 つぎの関数の不定積分を求めよ．

$$(1) \int (5x - 4)^{2/3} dx \quad (2) \int x\sqrt{3x-1} dx \quad (3) \int x^2(1+x)^{-1/3} dx$$

$$(4) \int \frac{6x}{(1+x^2)^2} dx \quad (5) \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (6) \int x^3\sqrt{x^4+1} dx$$