

解析 I 演習の問題 (その 3)

自然対数の底 (ネピアの数) の定義

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e = 2.7182 \dots$$

また

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

対数関数の微分

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

$a > 0$ とする . $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$ に注意すれば ,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$$

練習 16 つぎの関数を微分せよ .

$$(1) y = \log_3 4x \quad (2) y = (\log x)^2 \quad (3) y = \frac{1}{\log x}$$

絶対値を含む対数関数の微分と積分

区間 I 上で 0 を値にとらない微分可能な関数 $f(x)$ に対し ,

$$(\log |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

また

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C$$

練習 17, 18

$$(1) \log |3x - 2| \quad (2) \log(x^2 + 1) \quad (3) \log \sqrt{x^2 + x + 1}$$

$$(4) \int \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} dx \quad (5) \int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx \quad (6) \int \frac{1}{x(1 + \log x)} dx$$

x^α の微分と積分

α が実数で $x > 0$ のとき

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

n が自然数のとき

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

また, α が実数のとき

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int x^{-1} dx = \log|x| + C$$

練習 19 対数微分法を用いて, 次の関数を微分せよ. すなわち, $y = f(x)$ のとき, $\log|y| = \log|f(x)|$ とおいて, 両辺を x で微分する.

(1) $y = (x+2)^3(2x-3)$ (2) $y = x^{1/x} \quad (x > 0)$ (3) $y = \frac{(x+2)^{1/3}}{(2x-3)^2} \quad (x > \frac{3}{2})$

指数関数の微分と積分

- $a > 0$ に対して, $(a^x)' = a^x \log a$
- $(e^x)' = e^x$
- $a > 0$ に対して, $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$

練習 21, 22, 23 導関数と不定積分を求めよ.

(1) $y = 2^{-2x}$ (2) $y = 2^{\sqrt{x}}$ (3) $y = e^{(1/2)x}$ (4) $y = e^{\sqrt{x}}$

(5) $y = \frac{1}{1+e^{-x}}$ (6) $y = e^{-x^2/2}$ (7) $\int (e^{2x} + 2^{2x+1}) dx$ (8) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}} dx$

(9) $\int (e^{-x} + 2^{-x}) dx$ (10) $\int \frac{1}{e^x-1} dx$ (11) $\int \frac{e^{2x}}{1-e^{2x}} dx$ (12) $\int \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx$