

解析 I 演習の問題 (その 4)

三角関数の極限值と基本不等式

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\bullet 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ のとき,}$$

$$\sin x < x < \tan x$$

練習 26 極限の性質をどのように用いたかを注意して, 次の極限が成り立つことを示せ.

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0 \quad (2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan h}{h} = 1$$

三角関数の微分と積分

$$\begin{array}{ll} (\sin x)' = \cos x & \int \cos dx = \sin x + C \\ (\cos x)' = -\sin x & \int \sin x dx = -\cos x + C \\ (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} & \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \end{array}$$

練習 27, 28

次の関数の導関数または不定積分を求めよ．合成関数の微分や積分の変数変換を用いたときには，どのようにおいてかを明示せよ．

$$(1) y = \cos x - \tan x$$

$$(3) y = \cos^2 2x$$

$$(5) y = \log(\sin x + 1)$$

$$(7) \int (2 \sin x - 4 \sin 2x) dx$$

$$(2) y = \sin 2x + \tan 3x + 3x$$

$$(4) y = (\sin x + \cos x)^3$$

$$(6) y = 2^{\sin x}$$

$$(8) \int \frac{2 - 3 \sin^2 x}{\cos^2 x} dx$$

(ヒント : $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ を使う)

$$(9) \int \cos 3x \cos x dx$$

$$(10) \int \sin 2x \cos 2x dx$$

$$(11) \int \sin 4x \sin 2x dx$$

$$(12) \int \frac{1}{\cos^2 3x} dx$$

$$(13) \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$$

$$(14) \int e^x \sqrt{e^x + 1} dx$$

$$(15) \int \sqrt{\cos x} \sin^3 x dx$$

ヒント : 積和の公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta))$$

積と商の微分および部分積分と対数の積分

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

$$\int \log x dx = x \log x - x + C$$

練習 31 部分積分の公式を用いて, つぎの不定積分を求めよ. 解答の際はなにを $f(x)$, $g'(x)$ とおいたかを明示せよ. また $f'(x)$, $g(x)$ はどうなるかも明示すること.

$$(1) \int x e^{-x} dx \qquad (2) \int x \cos x dx \qquad (3) \int \frac{1}{\sqrt{x}} \log x dx$$

$$(4) \int (x+1)e^{x+1} dx \qquad (5) \int (x^2-1) \log 2x dx \qquad (6) \int (\log x)^2 dx$$

$$(7) \int \sqrt{x} \log x dx \qquad (8) \int (x+1)e^x dx \qquad (9) \int \log(2x+1) dx$$

$$(10) \int x \sin x dx \qquad (11) \int (x+2) \cos 2x dx \qquad (12) \int x^2 \sin x dx$$

$$(13) \int e^x \sin x dx + \int e^x \cos x dx$$