今野　(2005 年 5 月 31 日)

解析 I 演習の問題 (その６)

有理関数とは

有理関数とは
$$\frac{f(x)}{g(x)}$$
の形で与えられるものである．ただし，$f(x)$, $g(x)$ $(g(x) \neq 0)$ は多項式である．

多項式とは，$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$ のこと．ただし，$a_0, a_1, \ldots, a_k$ は定数で，$k \geq 1$ の自然数．

有理関数の積分法

(1)
$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}, & n \neq 1 \\ \log|x-a|, & n = 1 \end{cases}$$

(2)
$$\int \frac{px+q}{(x^2+cx+d)^n}\,dx = p\int \frac{t}{(t^2+s^2)^n}\,dt + \left(q - \frac{c}{2}p\right)\int \frac{1}{(t^2+s^2)^n}\,dt$$

ただし，$c^2 - 4d < 0$ で c, d, p, q は実数．また，$t = x + \dfrac{c}{2}$, $s^2 = \dfrac{4d-c^2}{4}$ とおいた．

(3)
$$\int \frac{x}{(x^2+s^2)^n}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{2(n-1)(x^2+s^2)^{n-1}}, & n \neq 1 \\ \dfrac{1}{2}\log(x^2+s^2), & n = 1 \end{cases}$$

(4)
$$I_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2(n-1)s^2}\left\{\dfrac{x}{(x^2+s^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right\}, & n \geq 2 \\ \dfrac{1}{s}\arctan\left(\dfrac{x}{s}\right), & n = 1 \end{cases}$$

ただし，$I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2+s^2)^n}\,dx$ である．

注意：(2) の条件 $c^2 - 4d < 0$ から $x^2 + cx + d > 0$ を得る．(4) において，$\sqrt{s^2} = |s|$ である．$s > 0$ および $s < 0$ としても同じ関数を得られるので，普通は $s > 0$ の方を使う．

練習 39 つぎの関数の積分を求めよ．ただし，(8) については部分積分の公式を一度もちいるだけでよく，積分を求める必要はない．

(1) $\int \dfrac{1}{x^3-x}\,dx$　(2) $\int \dfrac{1}{x^2+3/4}\,dx$　(3) $\int \dfrac{x}{(x^2+3/4)^2}\,dx$

(4) $\int \dfrac{x-2}{x^2-x+1}\,dx$　(5) $\int \dfrac{1}{x^3+1}\,dx$　(6) $\int \dfrac{1}{(x^2+4)(x^2+9)}\,dx$

(7) $\int \dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$　(8) $\int \dfrac{x^2}{(x^2+s^2)^n}\,dx$,　$n \geq 2$　(9) $\int \dfrac{1}{x^3-x^2}\,dx$

(10) $\int \dfrac{1}{(x-2)^2-7}\,dx$

ヒント：(1) $x^3-x=x(x-1)(x+1)$ となるので，

$$\frac{1}{x^3-x}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1}$$

から，分子に注目すれば，恒等式

$$(A+B+C)x^2+(A-C)x-B=1$$

を得る．これから A, B, C を求めればよい．
(5) $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ となるので，恒等式

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

から，A, B, C を求める．
(6)

$$\frac{A}{x^2+4}+\frac{B}{x^2+9}=\frac{1}{(x^2+4)(x^2+9)}$$

とおき，A, B を求めればよい．
(7)

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^n}=\frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^n}$$

と変形せよ．
(8) $f(x)=x$, $g(x)=-\dfrac{1}{2(n-1)}\dfrac{1}{(x^2+s^2)^{n-1}}$ とおき，部分積分

$$\int f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx$$

を利用する．
(9) $x^3-x^2=x^2(x-1)$

$$\frac{1}{x^3-x^2}=\frac{Ax+B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$$

とおき，A, B, C を求めればよい．

(10) $(x-2)^2-7=(x-2+\sqrt{7})(x-2-\sqrt{7})$ から

$$\frac{1}{(x-2)^2-7}=\frac{1}{2\sqrt{7}}\left(\frac{1}{x-2-\sqrt{7}}-\frac{1}{x-2+\sqrt{7}}\right)$$

を利用する．
注意：(8) と

$$\frac{1}{(x^2+s^2)^n}=\frac{1}{s^2}\left(-\frac{x^2}{(x^2+s^2)^n}+\frac{1}{(x^2+s^2)^{n-1}}\right)$$

を利用すれば，有理関数の積分法 (5) ($n\geq 2$ の場合) が得られる．