解析 I 演習の問題 (その 7)

無理関数の積分法（その１）

$f(s,\,t)$ は $s,\,t$ の有理関数とする．

$$\int f\left(x,\,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}\right)\,dx$$

の積分は

$$t=\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n}$$

という置換積分を利用する．

無理関数の積分法（その２）

$f(s,\,t)$ は $s,\,t$ の有理関数とする．

$$\int f\left(x,\,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx, \qquad a>0$$

の積分は

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x$$

という置換積分を利用する．特に，

$$\text{(1)}\quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx \;=\; \log|x+\sqrt{x^2+A}|$$

$$\text{(2)}\quad \int \sqrt{x^2+A}\,dx \;=\; \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+A}+A\log|x+\sqrt{x^2+A}|)$$

注意：$ax^2+bx+c=(t-\sqrt{a}x)^2=t^2-2\sqrt{a}tx+ax^2$ から $(b+2\sqrt{a}t)x=t^2-c$．よって

$$x=\frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}t}, \qquad \sqrt{ax^2+bx+x}=t-\sqrt{a}x=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+\sqrt{a}c}{2\sqrt{a}t+b}$$

となる．

(1) と (2) は $t=\sqrt{x^2+A}+x$ おくと $x^2+A=t^2-2tx+x^2$ より $x=\dfrac{t^2-A}{2t}$．これより

$$dx=\frac{t^2+A}{2t^2}\,dt, \qquad \sqrt{x^2+A}=t-x=\frac{t^2+A}{2t}$$

となる．

練習 40, 41 つぎの関数の積分を求めよ．

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^{1/3})}\,dx$　(2) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x}}\,dx$　(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}-(x-1)^{1/3}}\,dx$

(4) $\int \frac{1}{(x^2+A)^{3/2}}\,dx$　(5) $\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

無理関数の積分法（その３）

$f(s,\,t)$ は $s,\,t$ の有理関数とし，$b^2-4ac>0$ とする．$ax^2+bx+c=-a(x-\alpha)(x-\beta)\,(\alpha<\beta)$ のとき，

$$\int f\left(x,\,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx, \qquad a>0$$

の積分は

$$t=\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}$$

という置換積分を利用する．

有効な置換法

$f(s,\,t)$ は $s,\,t$ の有理関数とする．

(1) $\int f(x,\,\sqrt{x^2+a^2})\,dx$：$x=a\tan\theta(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$ とおくと，

$$dx=a\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta, \qquad \sqrt{x^2+a^2}=a\frac{1}{\cos\theta}.$$

(2) $\int f(x,\,\sqrt{x^2-a^2})\,dx$：$x=a\frac{1}{\cos\theta}(0\leq\theta\leq\pi,\,\theta\neq\pi/2)$ とおくと，

$$dx=a\frac{\tan\theta}{\cos\theta}\,d\theta, \qquad \sqrt{x^2-a^2}=\pm a\tan\theta.$$

$x<0$ のとき，$\sqrt{x^2-a^2}=-a\tan\theta$，$x>0$ のとき，$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan\theta$ である．

(3) $\int f(x,\,\sqrt{a^2-x^2})\,dx$：$x=a\sin\theta(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$ とおくと，

$$dx=a\cos\theta\,d\theta, \qquad \sqrt{a^2-x^2}=a\cos\theta.$$

練習 42 つぎの関数の積分を求めよ．

$$(1)\ \int \frac{1}{(1-x^2)^{5/2}}\,dx \qquad (2)\ \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{7/2}}\,dx \qquad (3)\ \int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

ヒント：三角関数の有理関数の積分：$\tan(\theta/2)=t$ とおくと

$$d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}, \qquad \tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

となることを利用して置換積分をするとよい．