

## 解析 I 演習の問題 (その 8)

## 定積分の定義

関数  $f(x)$  の不定積分のひとつを  $F(x)$  とするとき,

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

練習 43 つぎの定積分の値を求めよ .

(1)  $\int_1^e \frac{1}{x} dx$       (2)  $\int_1^3 e^{2x} dx$       (3)  $\int_0^1 xe^{x^2} dx$       (4)  $\int_1^e x \log x dx$

## 定積分の性質 (I)

$k$  を定数とする .

(1)  $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

(2)  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

(3)  $\int_a^a f(x) dx = 0$

(4)  $\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$

(5)  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

練習 44 つぎの定積分の値を求めよ .

(1)  $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$       (2)  $\int_1^2 \frac{x^3+2}{x} dx$       (3)  $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$

(4)  $\int_1^4 |\log x - 1| dx$       (5)  $\int_{-3}^2 \sqrt{|x-1|} dx$       (6)  $\int_{-1}^2 |e^x - 1| dx$

## 定積分の性質 (II)

(1)  $f(x)$  が奇関数のとき,  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

(2)  $f(x)$  が偶関数のとき,  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

練習 45 つぎの定積分の値を求めよ .

$$(1) \int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^2} dx \quad (2) \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx \quad (3) \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos x dx$$

$$(4) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x dx \quad (5) \int_{-1}^1 \sin^3 x dx \quad (6) \int_{-1}^1 x(\cos x + e^{-x}) dx$$

定積分での置換積分法と部分積分法

•  $x = g(t)$  とおくととき ,  $a = g(\alpha)$ ,  $b = g(\beta)$  ならば ,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t) dt$$

•  $\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$

練習 46, 47, 48 つぎの定積分の値を求めよ . ただし , (15) については等式を証明せよ .

$$(1) \int_0^1 xe^{x^2} dx \quad (2) \int_1^e \frac{(\log x)^2}{x} dx \quad (3) \int_0^{\pi/3} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta$$

$$(4) \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2+2} dx \quad (5) \int_{-1}^1 \arcsin x dx \quad (6) \int_0^1 \arccos x dx$$

$$(7) \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos \theta} d\theta \quad (8) \int_0^{2\pi/3} x|\cos x| dx \quad (9) \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx, \quad (a > 0)$$

$$(10) \int_1^e x \log x dx \quad (11) \int_1^e x \log(x+1) dx \quad (12) \int_0^{\pi/2} x \cos x dx$$

$$(13) \int_0^{\pi/2} e^{-x} \sin x dx \quad (14) \int_1^2 x\sqrt{4-x} dx \quad (15) \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

$$(16) \int_{-1}^1 |x|(x^2+x+1) dx \quad (17) \int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx \quad (18) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(\sin^2 x + \cos x) dx$$

$$(19) \int_0^{\pi/3} \sin^3 x dx$$

練習 49, 50

(1)  $n$  を非負の整数とし ,  $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$  とする . このとき ,

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

を示せ .

(2)  $m, n$  を正の整数とし ,  $B(m, n) = \int_1^2 (x-1)^m (2-x)^n dx$  とする . このとき ,

$$(a) B(m, n) = \frac{n}{m+1} B(m+1, n-1), \quad (b) B(m, n) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

を示せ .