

解析 I 演習の問題 (その 4)

三角関数の極限值と基本不等式

$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$   
 $\bullet 0 < x < \frac{\pi}{2}$  のとき ,  
 $\sin x < x < \tan x$

練習 26 極限の性質をどのように用いたかを注意して, 次の極限が成り立つことを示せ .

(1)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$       (2)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan h}{h} = 1$

三角関数の微分と積分

$(\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$

練習 27, 28

次の関数を微分せよ .

(1)  $y = \cos x - \tan x$

(2)  $y = \sin 2x + \tan 3x + 3x$

つぎの関数の不定積分を求めよ .

(3)  $\int (2 \sin x - 4 \sin 2x) \, dx$

(4)  $\int \frac{2 - 3 \sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx$

( ヒント :  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  を使う )

(5)  $\int \cos 3x \cos x \, dx$

(6)  $\int \sin 2x \cos 2x \, dx$

(7)  $\int \sin 4x \sin 2x \, dx$

ヒント：積和の公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta))$$

積と商の微分および部分積分と対数の積分

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

$$\int \log x dx = x \log x - x + C$$

練習 31 部分積分の公式を用いて，つぎの定積分を求めよ．解答の際はなにを  $f(x)$ ,  $g'(x)$  とおいたかを明示せよ．また  $f'(x)$ ,  $g(x)$  はどうなるかも明示すること．

$$(1) \int x e^{-x} dx \quad (2) \int x \cos dx \quad (3) \int \frac{1}{\sqrt{x}} \log x dx$$

$$(4) \int (x+1)e^{x+1} dx \quad (5) \int (x^2-1) \log 2x dx \quad (6) \int (\log x)^2 dx$$