第2章　確率変数列の収束

2.1　確率変数列の収束モード

定義 2.1. $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr}\big)$ を確率空間とし, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ をこの空間上で定義される確率変数列とし, X を同じ空間上で定義される確率変数とする.
(1) 確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は確率変数 X に**確率収束**するとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\mathsf{Pr}\big(|X_n - X| > \epsilon\big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

をみたすことをいう. これを $X_n \overset{\mathrm{P}}{\to} X$ と記す.
(2) 確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は確率変数 X に**分布収束**するとは, 任意の $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ に対して

$$\mathsf{E}[h(X_n)] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{E}[h(X)]$$

をみたすことをいう. これを $X_n \overset{\mathrm{d}}{\to} X$ と記す.
(3) 確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は確率変数 X に**概収束**するとは,

$$\mathsf{Pr}\Bigg(\omega \in \Omega;\, X_n(\omega) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X(\omega)\Bigg) = 1$$

をみたすことをいう. これを $X_n \overset{\mathrm{a.s.}}{\to} X$ と記す.
(4) $1 \le p < \infty$ とする. 確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は確率変数 X に p **次の平均収束**[1]するとは, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathsf{E}[|X_n|^p] < \infty, \qquad \mathsf{E}\big[|X_n - X|^p\big] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

をみたすことをいう. これを $X_n \overset{L_p}{\to} X$ と記す.
(5) 確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は確率変数 X に**全変動収束**するとは

$$\sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \big|\mathsf{Pr}(X_n \in B) - \mathsf{Pr}(X \in B)\big| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

をみたすことをいう. これを $X_n \overset{\mathrm{TV}}{\to} X$ と記す.

---
[1] L_p 収束ともいう.

注意 2.2. 確率変数列の収束モード間の関係は [24, p.149] を参照のこと.

次に分布収束の同値条件を述べる.

定理 2.3 (Portmanteau)**.** $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を確率変数列とし, X を同じ空間上で定義される確率変数とする. 以下の 5 つは同値である.
(1) $X_n \rightsquigarrow X$.
(2) 写像 $\mathbb{R} \ni x \mapsto \mathsf{Pr}(X \le x) \in [0, 1]$ のすべての連続点において

$$\mathsf{Pr}(X_n \le x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{Pr}(X \le x).$$

(3) 任意の Lipschitz 連続かつ有界な関数 h に対して

$$\mathsf{E}[h(X_n)] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{E}[h(X)].$$

(4) 任意の閉集合 F に対して

$$\limsup_n \mathsf{Pr}\big(X_n \in F\big) \le \mathsf{Pr}\big(X \in F\big).$$

(5) 任意の開集合 G に対して

$$\liminf_n \mathsf{Pr}\big(X_n \in G\big) \ge \mathsf{Pr}\big(X \in G\big).$$

(6) 任意の $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ で $\mathsf{Pr}\big(X \in \partial B\big) = 0$ なるものに対して

$$\mathsf{Pr}\big(X_n \in B\big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{Pr}\big(X \in B\big).$$

ただし, ∂B は可測集合 B の境界である.

Proof. 節 2.4.1 を参照のこと. □

定理 2.4. $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ は連続関数とする. このとき, 以下が成立する.
(1) $X_n \overset{\mathrm{P}}{\to} X \Rightarrow g(X_n) \overset{\mathrm{P}}{\to} g(X)$.
(2) $X_n \rightsquigarrow X \Rightarrow g(X_n) \rightsquigarrow g(X)$.
(3) $X_n \overset{\mathrm{a.s.}}{\to} X \Rightarrow g(X_n) \overset{\mathrm{a.s.}}{\to} g(X)$.

Proof. 節 2.4.2 を参照のこと. □

2.2 一様可積分性

定義 2.5. 確率変数の族 $\mathcal{C}$ は**オーダー p の一様可積分** (簡単に一様可積分) であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある定数 $K \in [0, \infty)$ が存在して

$$\mathsf{E}\big[|X|^p \mathbb{1}\{|X| > K\}\big] \le \epsilon \qquad (\forall X \in \mathcal{C})$$

をみたすことをいう.

命題 2.6. $\mathcal{C}$ を確率変数の族とし, $p' > p$ とする.
(1) $\forall X \in \mathcal{C}$ に対して, $\mathsf{E}\big[|X|^{p'}\big] < \infty$ ならば, $\mathcal{C}$ はオーダー p の一様可積分である.
(2) 非負値確率変数 Y で $\mathsf{E}\big[|Y|^{p}\big] < \infty$ なるものが存在して, $\mathsf{Pr}\big(|X| < Y\big) = 1\,(\forall X \in \mathcal{C})$ ならば, $\mathcal{C}$ はオーダー p の一様可積分である.

Proof. 節 2.4.3 を参照のこと. □

定理 2.7. (1) 概収束 $\Rightarrow$ 確率収束.
(2) 確率収束 $\Rightarrow$ 分布収束.
(3) p 次平均収束 $\Rightarrow$ 確率収束.

Proof. 節 2.4.4 を参照のこと. □

定理 2.8. (1) $X_n \overset{\text{a.s.}}{\to} X$ で, 非負値確率変数 Y が存在して, $\mathsf{E}[|Y|^p] < \infty$ $\mathsf{Pr}(|X_n| < Y\big) = 1\,(\forall n \in \mathbb{R})$ ならば, $X_n \overset{L_p}{\to} X$.
(2) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は一様可積分ならば, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{E}[|X_n|] < \infty$ である.
(3) $X_n \overset{\text{P}}{\to} X$ ならば, ある部分列 $\{X_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して, $X_{n(k)} \overset{\text{a.s.}}{\to} X\,(k \to \infty)$.
(4) $X_n \overset{\text{P}}{\to} X$ かつ $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ はオーダー 1 の一様可積分ならば, $X_n \overset{L_1}{\to} X$.
(5) c を定数とする. $X_n \rightsquigarrow c \Rightarrow X_n \overset{\text{P}}{\to} c$.

Proof. 節 2.4.5 を参照のこと. □

2.3 Slutsky の定理

定理 2.9. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を確率変数列とする. $X_n \rightsquigarrow X$ かつ $|X_n - Y_n| \overset{\text{P}}{\to} 0$ ならば, $Y_n \rightsquigarrow X$.

Proof. 節 2.4.6 を参照のこと. □

命題 2.10. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を確率変数列とし, $X_n \rightsquigarrow X$ かつ $Y_n \overset{\text{P}}{\to} c$ とする. ただし, c は定数である. このとき, 以下が成立する.
(1) $X_n + Y_n \rightsquigarrow X + c$.
(2) $X_nY_n \rightsquigarrow cX$.
(3) $c \neq 0$ のとき, $Y_n^{-1}X_n \rightsquigarrow c^{-1}X$.

Proof. 節 2.4.7 を参照のこと. □

2.4 証明

2.4.1 定理 2.3 の証明

(2) $\Rightarrow$ (1) の証明: g を任意の有界連続関数とする．一般性を失わずに $|g(x)| \le 1/2\,(x \in \mathbb{R})$ と仮定してよい．任意の $\epsilon > 0$ に対して，十分大きな有界区間 $(a,\, b] =: K$ をとると

$$\mathsf{Pr}(X \in K^c) \le \epsilon \tag{2.1}$$

とできる．そこで，この K を $m\,(m \in \mathbb{N})$ 個の互いに素な区間 $K_1 = (a_1,\, b_1],\, K_j = (a_j,\, b_j]\,(j = 2,\, 2,\, \dots,\, m); a_j,\, b_j \in \mathbb{R})$ に直和分解する．すなわち，$a_1 = a,\, b_m = b,\, K = \bigcup_{j=1}^m K_j$ となっている．このとき，m を十分大きく取ると

$$\max_{j \in \{1,\, 2,\, \dots,\, m\}} \max_{x,\, y \in K_j} |g(x) - g(y)| \le \epsilon \tag{2.2}$$

となるように $\{K_j\}_{j=1}^m$ をとることができる．さらに，$\{a_j,\, b_j\}_{j=1}^m$ は X の分布関数 F の連続点[2]に取る．このとき，(2) より

$$\mathsf{Pr}(X_n \in K) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{Pr}(X \in K) \tag{2.3}$$

となる．実際，(2) に注意すると

$$\begin{aligned}
&\bigl|\mathsf{Pr}(X_n \in K) - \mathsf{Pr}(X \in K)\bigr| \\
&\qquad = \Bigl|\bigl\{\mathsf{Pr}(X_n \in b) - \mathsf{Pr}(X_n \in a)\bigr\} - \bigl\{\mathsf{Pr}(X_n \in b) - \mathsf{Pr}(X_n \in a)\bigr\}\Bigr| \\
&\qquad = \Bigl|\bigl\{\mathsf{Pr}(X_n \in b) - \mathsf{Pr}(X_n \in b)\bigr\} - \bigl\{\mathsf{Pr}(X_n \in a) - \mathsf{Pr}(X_n \in a)\bigr\}\Bigr| \\
&\qquad \le \Bigl|\bigl\{\mathsf{Pr}(X_n \in b) - \mathsf{Pr}(X_n \in b)\bigr\}\Bigr| + \Bigl|\bigl\{\mathsf{Pr}(X_n \in a) - \mathsf{Pr}(X_n \in a)\bigr\}\Bigr| \\
&\qquad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

からわかる．つぎに，各 K_j から 1 点 x_j を任意に選び，関数 g_ϵ を

$$g_\epsilon(x) = \sum_{j=1}^m g(x_j) \mathbb{1}_{K_j}(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

と定める．すると

$$\max_{x \in K} \bigl|g(x) - g_\epsilon(x)\bigr| \le \epsilon \tag{2.4}$$

[2] F の不連続点は高々可算個なので，このように取れることがわかる．

となる．したがって, (2.1) と (2.4) に注意すると

$$
\begin{aligned}
&\bigl|\mathsf{E}[g(X)] - \mathsf{E}[g_\epsilon(X)]\bigr| \\
&\quad = \bigl|\mathsf{E}[\mathbb{1}_K(X)g(X)] + \mathsf{E}[\mathbb{1}_{K^c}(X)g(X)] - \mathsf{E}[\mathbb{1}_K(X)g_\epsilon(X)] \\
&\qquad - \mathsf{E}[\mathbb{1}_{K^c}(X)g_\epsilon(X)]\bigr| \\
&\quad \le \bigl|\mathsf{E}[\mathbb{1}_K(X)g(X)] - \mathsf{E}[\mathbb{1}_K(X)g_\epsilon(X)]\bigr| + \bigl|\mathsf{E}[\mathbb{1}_{K^c}(X)g(X)] \\
&\qquad - \mathsf{E}[\mathbb{1}_{K^c}(X)g_\epsilon(X)]\bigr| \\
&\quad \le \mathsf{E}\bigl[\mathbb{1}_K(X)\bigl|g(X) - g_\epsilon(X)\bigr|\bigr] + \mathsf{E}\bigl[\mathbb{1}_{K^c}(X)\bigl|g(X) - g_\epsilon(X)\bigr|\bigr] \\
&\quad \le \underbrace{\max_{x\in K}|g(x) - g_\epsilon(x)|}_{\le\epsilon \quad \because (2.4)} \mathsf{E}\bigl[\mathbb{1}_K(X)\bigr] + \mathsf{E}\bigl[\mathbb{1}_{K^c}(X)\bigl|g(X) - g_\epsilon(X)\bigr|\bigr] \\
&\quad \le \epsilon\mathsf{Pr}(X\in K) + \mathsf{Pr}(X\in K^c) \\
&\quad \le 2\epsilon
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

となる．(2.3) から, n を十分大きく取ると

$$
\Bigl|\underbrace{\mathsf{Pr}(X_n\in K^c)}_{=1-\mathsf{Pr}(X_n\in K)} - \underbrace{\mathsf{Pr}(X\in K^c)}_{=1-\mathsf{Pr}(X\in K)}\Bigr| = \bigl|\mathsf{Pr}(X_n\in K) - \mathsf{Pr}(X\in K)\bigr| \le \epsilon
$$

とできるので

$$
\mathsf{Pr}(X_n\in K^c) \le \mathsf{Pr}(X\in K^c) + \bigl|\mathsf{Pr}(X_n\in K^c) - \mathsf{Pr}(X\in K^c)\bigr| \le 2\epsilon \tag{2.6}
$$

がわかる．これより

$$
\begin{aligned}
&\bigl|\mathsf{E}[g(X_n)] - \mathsf{E}[g_\epsilon(X_n)]\bigr| \\
&\quad = \bigl|\mathsf{E}\bigl[\bigl\{g(X_n) - g_\epsilon(X_n)\bigr\}\mathbb{1}_K(X_n) + \bigl\{g(X_n) - g_\epsilon(X_n)\bigr\}\mathbb{1}_{K^c}(X_n)\bigr]\bigr| \\
&\quad \le \mathsf{E}\bigl[\underbrace{\bigl|g(X_n) - g_\epsilon(X_n)\bigr|}_{\le\epsilon}\bigr\}\mathbb{1}_K(X_n) + \bigl|g(X_n) - g_\epsilon(X_n)\bigr|\bigr\}\mathbb{1}_{K^c}(X_n)\bigr] \\
&\quad \le \mathsf{E}\bigl[\epsilon\mathbb{1}_K(X_n) + \bigl\{\underbrace{|g(X_n)|}_{\le 1/2} + \underbrace{|g_\epsilon(X_n)|}_{\le 1/2}\bigr\}\mathbb{1}_{K^c}(X_n)\bigr] \\
&\quad = \epsilon\mathsf{Pr}(X_n\in K) + \underbrace{\mathsf{Pr}(X_n\in K^c)}_{\le 2\epsilon \quad \because (2.6)} \\
&\quad \le 3\epsilon
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

を得る. g_ϵ の作りかたから n を十分大きくとると

$$\begin{aligned}
&\bigl|\mathsf{E}[g_\epsilon(X)] - \mathsf{E}[g_\epsilon(X_n)]\bigr| \\
&\quad \le \Bigl|\mathsf{E}\bigl[\sum_{j=1}^m g(x_j)\bigl\{\mathbb{1}_{K_j}(X) - \mathbb{1}_{K_j}(X_n)\bigr\}\bigr]\Bigr| \\
&\quad = \Bigl|\sum_{j=1}^m g(x_j)\mathsf{E}\bigl[\mathbb{1}_{K_j}(X) - \mathbb{1}_{K_j}(X_n)\bigr]\Bigr| \\
&\quad \le \sum_{j=1}^m \bigl|\mathsf{Pr}(X \in K_j) - \mathsf{Pr}(X_n \in K_j)\bigr| \underbrace{\max_{j=\{1,2,\dots,m\}} |g(x_j)|}_{\le 1/2} \\
&\quad \le \frac{\epsilon}{2} \le \epsilon
\end{aligned} \tag{2.8}$$

となる. よって, (2.5) – (2.8) を合わせると

$$\begin{aligned}
\bigl|\mathsf{E}[g(X_n)] - \mathsf{E}[g(X)]\bigr| &\le \underbrace{\bigl|\mathsf{E}[g(X_n)] - \mathsf{E}[g_\epsilon(X_n)]\bigr|}_{\le 3\epsilon} + \underbrace{\bigl|\mathsf{E}[g_\epsilon(X_n)] - \mathsf{E}[g_\epsilon(X)]\bigr|}_{\le \epsilon} \\
&\quad + \underbrace{\bigl|\mathsf{E}[g_\epsilon(X)] - \mathsf{E}[g(X)]\bigr|}_{\le 2\epsilon} \\
&\le 6\epsilon
\end{aligned}$$

がわかるので, 主張は証明された.
(1) $\Rightarrow$ (3) の証明: 明らか.
(1) $\Rightarrow$ (4) の証明: 非負値連続関数 g と $M > 0$ に対して, $g_M(x) = \min\{g(x), M\} \ge 0\,(x \in \mathbb{R})$ と定める g_M は有界連続となる. よって

$$\liminf_{n\to\infty} \mathsf{E}[g(X_n)] \ge \liminf_{n\to\infty} \mathsf{E}[g_M(X_n)] = \mathsf{E}[g_M(X)] \qquad \bigl(\because (1)\bigr)$$

となる. 両辺で $M \to \infty$ とすることにより, 有界単調収束定理から (4) を得る.
(4) $\Rightarrow$ (1) の証明: g を有界連続関数とする. するとある $M > 0$ が存在して, $|g| \le M$ とできる. すると $M \pm g \ge 0$ は非負値連続関数となるので, (4) を用いると (2) を得る.
(3) $\Rightarrow$ (5) の証明: 開集合 O と $x \in \mathbb{R}$ に対して $g_M(x) \uparrow \mathbb{1}_O(x)\,(M \to \infty)$ となるような Lipschitz 連続関数列 $g_M \ge 0$ を取ることができるので, (3) から

$$\liminf_{n\to\infty} \mathsf{Pr}(X_n \in O) \ge \liminf_{n\to\infty} \mathsf{E}[g_M(X_n)] = \mathsf{E}[g_M(X)]$$

となる. この両辺で $M \to \infty$ とすると, 単調収束定理により (5) を得る.
(5) $\Leftrightarrow$ (4) の証明: お互いの補集合をとればよい.

(4) + (5) $\Rightarrow$ (6) の証明: B° を B の内部, $\mathrm{cl}(B)$ を B の閉包とすると $\partial B = \mathrm{cl}(B) \setminus B^\circ$ である．このことに注意すると

$$\begin{aligned}\mathsf{Pr}\big(X \in B^\circ\big) &\le \liminf_{n\to\infty} \mathsf{Pr}\big(X_n \in B^\circ\big) \le \limsup_{n\to\infty} \mathsf{Pr}\big(X_n \in \mathrm{cl}(B)\big) \\ &\le \mathsf{Pr}\big(X_n \in \mathrm{cl}(B)\big)\end{aligned}$$

となる．$\mathsf{Pr}(X \in \partial B) = 0$ より, 上式の右辺と左辺は等しいので, (7) が得られる．

(6) $\Rightarrow$ (2) の証明: $B = (-\infty, x]$ ととればよい． □

2.4.2 定理 2.4 の証明

(1) の証明: 関数 g は $x_0\,(\in \mathbb{R})$ で連続なので, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\exists \delta > 0$ があって

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |g(x) - g(x_0)| < \epsilon$$

である．よって

$$\{\omega \in \Omega : |X(\omega) - X_n(\omega)| < \delta\} \subset \{\omega \in \Omega : |g\big(X(\omega)\big) - g\big(X_n(\omega)\big)| < \epsilon\}$$

となる．上式の補事象を取ると

$$\mathsf{Pr}\big(|X - X_n| \ge \delta\big) \ge \mathsf{Pr}\big(|g(X) - g(X_n)| \ge \epsilon)\big)$$

がわかる．よって, $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$ が示せた．

(2) の証明: $g \circ f$ が有界連続関数となるように有界連続関数 f を取る．$X_n \rightsquigarrow X$ と定理 2.3 から

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}[f\big(g(X_n)\big)] = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}[(f \circ g)(X_n)] = \mathsf{E}[(f \circ g)(X)] = \mathsf{E}[f\big(g(X)\big)]$$

から示される．

(3) の証明: $A = \{\omega \in \Omega;\, X_n(\omega) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X(\omega)\}$ とおく． $X_n \overset{\text{a.s.}}{\to} X$ から $\mathsf{Pr}(A) = 1$ である． 任意の $\omega \in A$ に対して, g は連続なので, $g(X_n(\omega)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(X(\omega))$ となる．したがって

$$A \subset \big\{\omega \in \Omega;\, g(X_n(\omega)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(X(\omega))\big\}$$

がわかるので

$$\mathsf{Pr}\big(\omega \in \Omega;\, g(X_n(\omega)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(X(\omega))\big) = 1$$

が示せた． □

2.4.3 命題 2.6 の証明

(1) の証明: $K > 0$ とする. 仮定から, ある $A > 0$ が存在して

$$\sup_{X \in \mathcal{C}} \mathsf{E}\big[|X|^{p'}\big] < A$$

とできる. すると

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\big[|X|^p \mathbb{1}\{|X|^p > K\}\big] &\le \mathsf{E}\Bigg[|X|^p \underbrace{\left(\frac{|X|^p}{K}\right)}_{>1}^{(p'-p)/p} \mathbb{1}\{|X|^p > K\}\Bigg] \\ &\le \frac{1}{K^{(p'-p)/p}} \mathsf{E}[|X|^{p'}] \\ &< \frac{C}{K^{(p'-p)/p}} \xrightarrow{K \to \infty} 0\end{aligned}$$

よりわかる.

(2) の証明: $\forall K > 0$ に対して, $\mathsf{Pr}\big(|X| < Y\big) = 1$ から

$$|X| > K^{1/p} \Rightarrow Y > K^{1/p}$$

となる. このことから

$$\{|X|^p > K\} \subset \{Y^p > K\} \tag{2.9}$$

である. (2.15) と $\mathsf{E}\big[|Y|^p\big] < \infty$ から

$$\sup_{X \in \mathcal{C}} \mathsf{E}\big[|X|^p \mathbb{1}\{|X|^p > K\}\big] \le \mathsf{E}\big[|Y|^p \mathbb{1}\{|Y|^p > K\}\big] \xrightarrow{K \to \infty} 0$$

よりわかる. □

2.4.4 定理 2.7 の証明

(1) の証明: 任意の $\epsilon > 0$ を取る. $\mathbb{1}_{(\epsilon, \infty)}(X_n - X) \le 1$ と $X_n \overset{\text{a.s.}}{\to} X$ であるので, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{(\epsilon,\infty)}(X_n - X) = 0$ a.s. であることに注意して, Lebesgue の有界収束定理を用いると

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathsf{Pr}\big(|X_n - X| > \epsilon\big) &= \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\big[\mathbb{1}_{(\epsilon,\infty)}(X_n - X)\big] = \mathsf{E}\big[\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{(\epsilon,\infty)}(X_n - X)\big] \\ &= 0\end{aligned}$$

がわかる.

(2) の証明: $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$ とする. $\epsilon > 0$ を固定し, x と $x \pm \epsilon$ を X の c.d.f. $\mathsf{F}(x)$ の連続点[3]とする. このとき

$$\begin{aligned}
\mathsf{F}_n(x) &= \mathsf{Pr}\bigl(X_n \le x\bigr) \\
&= \mathsf{Pr}\bigl(X_n \le x,\, X < x+\epsilon\bigr) + \mathsf{Pr}\bigl(X_n \le x,\, X \ge x+\epsilon\bigr) \\
&\le \mathsf{Pr}\bigl(X \le x+\epsilon\bigr) + \mathsf{Pr}\bigl(\bigl|X_n - X\bigr| \ge \epsilon\bigr) \qquad (2.10)\\
&= \mathsf{F}(x+\epsilon) + \mathsf{Pr}\bigl(\bigl|X_n - X\bigr| \ge \epsilon\bigr) \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

となる. 同様に

$$\begin{aligned}
\mathsf{F}(x-\epsilon) &= \mathsf{Pr}\bigl(X \le x-\epsilon\bigr) \\
&= \mathsf{Pr}\bigl(X_n \le x-\epsilon,\, X_n < x\bigr) + \mathsf{Pr}\bigl(X \le x-\epsilon,\, X_n \ge x\bigr) \\
&\le \mathsf{Pr}\bigl(X_n \le x\bigr) + \mathsf{Pr}\bigl(\bigl|X_n - X\bigr| \ge \epsilon\bigr) \qquad (2.12)\\
&= \mathsf{F}_n(x) + \mathsf{Pr}\bigl(\bigl|X_n - X\bigr| \ge \epsilon\bigr) \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

となる. (2.11) と (2.13) を合わせると

$$\mathsf{F}(x-\epsilon) - \mathsf{Pr}\bigl(\bigl|X_n - X\bigr| \ge \epsilon\bigr) \le \mathsf{F}_n(x) \le \mathsf{F}(x+\epsilon) + \mathsf{Pr}\bigl(\bigl|X_n - X\bigr| \ge \epsilon\bigr)$$

がわかる. 上の式の辺々で $n \to \infty$ とすれば

$$\mathsf{F}(x-\epsilon) \le \liminf_{n\to\infty} \mathsf{F}_n(x) \le \limsup_{n\to\infty} \mathsf{F}_n(x) \le \mathsf{F}(x+\epsilon)$$

となる. ここで $\epsilon \to 0$ とし x を $\mathsf{F}(x)$ の連続点とすれば

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{F}_n(x) = \mathsf{F}(x)$$

がわかる.
(3) の証明: $X_n \xrightarrow{qm} X$ とする. $\epsilon > 0$ を固定する. このとき Markov の不等式 (命題 1.29) より

$$\mathsf{Pr}\bigl(\bigl|X_n - X\bigr| \ge \epsilon\bigr) = \mathsf{Pr}\bigl(\bigl|X_n - X\bigr|^2 \ge \epsilon^2\bigr) \le \frac{\mathsf{E}\bigl[\bigl|X_n - X\bigr|^2\bigr]}{\epsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

がわかる. □

2.4.5 定理 2.8 の証明

(1) の証明:

[3] X の分布関数の不連続点は高々加算個なので, このように点を取れることに注意せよ.

(2) の証明: $K > 0$ に対して

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{E}[|X_n|] &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big\{\mathsf{E}\big[|X_n|\mathbb{1}\{|X_n| \le K\}\big] + \mathsf{E}\big[|X_n|\mathbb{1}\{|X_n| > K\}\big]\Big\} \\ &\le K + \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{E}\big[|X_n|\mathbb{1}\{|X_n| > K\}\big]\end{aligned}$$

となる. 上の不等式の右辺第二項が 1 より小さくなるように K を選ぶことができる. それを K_0 と書いたとき

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{E}[|X_n|] \le K_0 + 1 < \infty$$

から証明された.
(3) の証明: $k, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$A_{n,k} := \left\{|X_n - X| > \frac{1}{k}\right\}$$

とおく. 確率収束の定義から, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{Pr}(A_{n,j}) = 0$$

である. そこで

$$\mathsf{Pr}(A_{n,k}) \le \frac{1}{k^2}$$

となる n を $n(k)$ とおく. さらに, $B_k := A_{n(k),k}$ とおく. すると

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{Pr}(B_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

となるので, Borel-Cantelli の補題より, 無限個の k で B_k が起こる確率は 0 である. すなわち, ある $C \subset \Omega$ が存在し, $\mathsf{Pr}(C) = 1$ であり, 任意の $\omega \in C$ に対して, 有限個の k を除いて, $\omega \notin B_k$ である. このことから, ある $K(\omega) \in \mathbb{N}$ をとると

$$|X_{n(k)}(\omega) - X(\omega)| \le \frac{1}{k} \qquad (\forall k \ge K(\omega))$$

となる. よって

$$\omega \in C \;\Rightarrow\; X_{n(k)}(\omega) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} X(\omega)$$

となるので

$$\mathsf{Pr}\Big(\omega \in \Omega;\, X_{n(k)}(\omega) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} X(\omega)\Big) \ge \mathsf{Pr}(C) = 1$$

がわかる.
(4) の証明: まず

$$\mathsf{E}[|X|] < \infty \tag{2.14}$$

を示す. 三角不等式から

$$\big||X_n| - |X|\big| \le |X_n - X|$$

となるので

$$X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X \Rightarrow |X_n| \xrightarrow{\mathrm{P}} |X|$$

であることがわかる. さらに, 定理 2.8(3) から, ある部分列 $\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して

$$X_{n(k)} \xrightarrow{\text{a.s.}} X \qquad (k \to \infty)$$

とできる. Fatou の補題を用いると

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[|X|] &\le \liminf_{k\to\infty} \mathsf{E}[|X_{n(k)}|] &&(\text{Fatou の補題})\\
&\le \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{E}[|X_n|] < \infty &&(\because \text{定理 } 2.8(2))
\end{aligned}$$

より (2.14) が示せた.
　次に, 任意の $0 < \epsilon < K < \infty$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[|X_n - X|\big] &= \mathsf{E}\big[|X_n - X|\mathbb{1}\{|X_n - X| \le \epsilon\}\big]\\
&\qquad + \mathsf{E}\big[|X_n - X|\mathbb{1}\{\epsilon < |X_n - X| \le K\}\big]\\
&\qquad + \mathsf{E}\big[|X_n - X|\mathbb{1}\{|X_n - X| > K\}\big]\\
&\le \epsilon + K\mathsf{Pr}\big(|X_n - X| \ge \epsilon\big)\\
&\quad + \mathsf{E}\big[2\max\{|X_n|, |X|\}\mathbb{1}\{\max\{|X_n|, |X|\} > k\}\big]\\
&\le \epsilon + K\mathsf{Pr}\big(|X_n - X| \ge \epsilon\big) + \mathsf{E}\big[2|X_n|\mathbb{1}\{2|X_n| > K\}\big]\\
&\qquad + \mathsf{E}\big[2|X|\mathbb{1}\{2|X| > K\}\big]\\
&\le \epsilon + K\mathsf{Pr}\big(|X_n - X| \ge \epsilon\big) + \sup_{n\in\mathbb{N}} 2\mathsf{E}\big[|X_n|\mathbb{1}\{|X_n| > K/2\}\big]\\
&\qquad + 2\mathsf{E}\big[|X|\mathbb{1}\{|X| > K/2\}\big]
\end{aligned}$$

を得る. まず

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{E}\big[|X_n|\mathbb{1}\{|X_n| > K/2\}\big] &\xrightarrow{K\to\infty} 0,\\
\mathsf{E}\big[|X|\mathbb{1}\{|X| > K/2\}\big] &\xrightarrow{K\to\infty} 0
\end{aligned}$$

に注意する．次に

$$\mathsf{Pr}\big(|X_n - X| \geq \epsilon\big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

に注意する．最後に, $\epsilon \to 0$ とすれば, $X_n \overset{L_1}{\to} X$ がわかる．
(5) の証明: $X_n \rightsquigarrow c$ ならば, $X_n \overset{\mathrm{P}}{\to} c$ を示す．$X_n \rightsquigarrow X$ かつある定数 c があって $\mathsf{Pr}(X = c) = 1$ とする．$c \pm \epsilon$ を $\mathsf{F}(x)$ の連続点になるようにして $\epsilon > 0$ を固定する[4]．このとき

$$\begin{aligned}
\mathsf{Pr}\big(\big|X_n - c\big| \geq \epsilon\big) &= \mathsf{Pr}\big(X_n \leq c - \epsilon\big) + \mathsf{Pr}\big(X_n \geq c + \epsilon\big) \\
&= \mathsf{Pr}\big(X_n \leq c - \epsilon\big) + \mathsf{Pr}\big(X_n \geq c + \epsilon\big) \\
&= \mathsf{F}_n(c - \epsilon) + 1 - \mathsf{F}_n(c + \epsilon) \\
&\to \mathsf{F}(c - \epsilon) + 1 - \mathsf{F}(c + \epsilon) \quad (n \to \infty) \\
&= 0 + 1 - 1 = 0
\end{aligned}$$

となる． □

2.4.6 定理 2.9 の証明

定理 2.3(3) を用いて証明をする．関数 $h : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ を 1-Lipschitz とする．すなわち, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$|h(x) - h(y)| \leq |x - y|$$

である[5]．このとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
&\big|\mathsf{E}[h(Y_n)] - \mathsf{E}[h(X_n)]\big| \leq \mathsf{E}\big[|h(Y_n) - h(X_n)|\big] \\
&\quad \leq \mathsf{E}\Big[\underbrace{|h(Y_n) - h(X_n)|}_{\leq |Y_n - X_n| \because \text{1-Lipschitz}} \mathbb{1}\{|Y_n - X_n| \leq \epsilon\}\Big] \\
&\qquad + \mathsf{E}\big[\underbrace{h(X_n)}_{\leq 1} \mathbb{1}\{||Y_n - X_n| > \epsilon\}\big] + \mathsf{E}\big[\underbrace{h(Y_n)}_{\leq 1} \mathbb{1}\{|Y_n - X_n| > \epsilon\}\big] \\
&\quad \leq \mathsf{E}\big[|Y_n - X_n| \mathbb{1}\{|Y_n - X_n| \leq \epsilon\}\big] + 2\,\mathsf{E}\big[\mathbb{1}\{||Y_n - X_n| > \epsilon\}\big] \\
&\quad \leq \epsilon + 2 \underbrace{\mathsf{Pr}\big(|Y_n - X_n| > \epsilon\big)}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} \\
&\quad \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned} \tag{2.15}$$

[4] $\mathsf{F}(x)$ は有界非減少関数なので, $\mathsf{F}(x)$ の不連続点は高々可算個である．よってこのように ϵ を取ることとができる．

[5] 有界な Lipschitz 関数 h に対して, $\mathsf{E}[h(Y_n)] \overset{n\to\infty}{} \mathsf{E}[h(X)]$ を示せばよいので, 一般性を失うことないことに注意する．

がわかる. $X_n \rightsquigarrow, X$ なので, $\mathsf{E}[h(X_n)] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{E}[h(X)]$ であることと (2.15) から

$$\begin{aligned}\left|\mathsf{E}[h(Y_n)] - \mathsf{E}[h(X)]\right| &\leq \left|\mathsf{E}[h(X_n)] - \mathsf{E}[h(X)]\right| + \left|\mathsf{E}[h(Y_n)] - \mathsf{E}[X_n]\right| \\ &\overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

が証明できる. □

2.4.7 命題 2.10 の証明

(1) の証明: $Y_n \xrightarrow{P} c$ なので, 定理 2.8(5) から $Y_n \rightsquigarrow c$ となる. このことから $(X_n, Y_n) \rightsquigarrow (X, Y)$ となることが証明[6]できる. あとは (**??**) において, $g(x, y) = x + y$ とすればよい.
(2) の証明: (**??**) において, $g(x, y) = xy$ とすればよい.
(3) の証明: (**??**) において, $g(x, y) = \dfrac{x}{y}$ とすればよい. □

[6] これは特性関数の収束と分布収束が同値である事実からわかる. あとは特性関数に対して三角不等式を用いればよい. 詳しくは [5, p.135] を参照のこと.