第3章　累積分布関数

3.1　累積分布関数の定義

定義 3.1. (1) 確率空間 $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr}\big)$ 上の確率変数 X の累積分布関数 (c.d.f. と記す) [1] F^X を

$$\mathsf{F}^X(x) = \mathsf{Pr}\big(X \leq x\big) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

で定める.
(2) X の**分布** P^X を

$$\mathsf{P}^X(B) := \mathsf{Pr}(X \in B) := \mathsf{Pr}(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \in B\}) \qquad (B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

で定める. したがって, $\mathsf{P}^X((-\infty, x]) = \mathsf{F}^X(x)$ である.
(3) 確率変数 X, Y を $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr})$ の確率変数とし, それぞれの c.d.f. を F^X, F^Y とする. このとき

$$\mathsf{F}^X(x) = \mathsf{F}^Y(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$$

が成立するとき, X と Y の分布は同じである[2]という. これを $X \stackrel{d}{=} Y$ と書く.
(4) 確率変数 X が c.d.f. F を持つとき, $X \sim \mathsf{F}$ と書く.

注意 3.2. (1) P^X は可測空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度である. すなわち P^X は定義 1.7 をみたすことがわかる.
(2) c.d.f. F が与えられると

$$\mathsf{F}(x) = \mathsf{P}((-\infty, x]) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

をみたす $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 P が一意的に定まることが知られている. このことにより X の c.d.f. と分布を同一視する. さらに $X \sim \mathsf{F}$ とし, c.d.f. F から定まる確率測度を P としたとき, $X \sim \mathsf{P}$ とも書く.
(3) 確率変数 X と Y の分布が同じとき

$$\mathsf{P}^X(B) = \mathsf{P}^Y(B) \qquad (\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

も成立する.

---

[1] 簡単に分布関数ともいう.

[2] $\mathsf{F}^X(x) = \mathsf{F}^Y(x)\,(\forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathsf{P}^X(B) = \mathsf{P}^Y(B)\,(\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ となることが知られている. 注意 **??**(2) を参照のこと.

定理 3.3. 確率変数 X を確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr})$ 上の確率変数とし, F を X の c.d.f. とする. このとき F は次をみたす.

(1) F は非減少関数: $x < y \Rightarrow \mathsf{F}(x) \le \mathsf{F}(y)$.

(2) $\lim_{x\to\infty} \mathsf{F}(x) = 1$: $\lim_{x\to-\infty} \mathsf{F}(x) = 0$.

(3) F は右連続関数: $\lim_{y\to x+0} \mathsf{F}(y) = \mathsf{F}(x)$.

Proof. 節 3.3.1 を参照のこと.

注意 3.4. 定理 3.3 の (1) ∼ (3) をみたす関数 $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ が存在する. するとある確率変数 X が存在して, $\mathsf{F}^X(x) = F(x)\,(x \in \mathbb{R})$ となることが知られている.

補題 3.5 (Helly)**.** $\{\mathsf{F}_n\}_{n=1}^\infty$ は累積分布関数列とする. このとき, 非減少右連続関数 $F\bigl(0 \le F(x) \le 1\,(x \in \mathbb{R})\bigr)$ と部分列 $\{n(k)\}_{k=1}^\infty$ 存在して

$$\lim_{k\to\infty} \mathsf{F}_{n(k)}(x) = F(x) \qquad (x \text{ は } F \text{ の連続点})$$

となる.

Proof. 節 3.3.2 を参照のこと. □

定義 3.6. (1) $\mathbb{R}$ 上の測度の列 $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ は**緊密** (tight) であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $K > 0$ が存在して

$$\mu_n\bigl([-K, K]\bigr) \ge 1 - \epsilon \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

が成り立つことをいう.
(2) 分布関数列 $\{\mathsf{F}_n\}_{n=1}^\infty$ は稠密であるとは, $\{\mathsf{P}_n\}_{n=1}^\infty$ は稠密のときをいう. ただし, P_n は F_n に対応する確率測度である.

補題 3.7. $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ を非減少関数とし, $\{\mathsf{F}_n\}_{n=1}^\infty$ を $\mathbb{R}$ 上の分布関数列とする. 関数 F の連続点 x に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{F}_n(x) = F(x)$$

をみたすとする. 分布関数列 $\{\mathsf{F}_n\}_{n=1}^\infty$ が緊密のとき, F は $\mathbb{R}$ 上の分布関数になる.

Proof. F_n に対応する確率測度を P_n とする. すると $\{\mathsf{P}_n\}_{n=1}^\infty$ は緊密になる. よって, $\forall n \ge 1$ に対して

$$\mathsf{F}_n(K) \ge \mathsf{P}_n\bigl([-K, K]\bigr) \ge 1 - \epsilon$$

となるので

$$\lim_{n\to\infty} F(x) = 1$$

がわかる. また

$$\mathsf{F}_n\bigl(-(K+1)\bigr) = \mathsf{P}_n\bigl([-\infty, -(K+1)]\bigr) \le 1 - \mathsf{P}_n\bigl([-K, K]\bigr) \le \epsilon$$

から

$$\lim_{n\to-\infty} F(x) = 0$$

がわかる. □

3.2 有界右連続関数のなす空間

$\bigl(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr}\bigr)$ を確率空間とする. $\mathcal{F}'$ を $\mathbb{R}$ 上の有界右連続関数全体の成す空間とし, その上のノルム $\|\cdot\|_\infty$ を

$$\|F\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |F(x)| < \infty \qquad (F \in \mathcal{F}')$$

で定める. すると $\mathcal{F}'$ はノルム $\|\cdot\|_\infty$ をもつ線型ノルム空間である.

命題 3.8. $\mathcal{F}'$ はノルム $\|\cdot\|_\infty$ をもつ Banach 空間である.

Proof. 節 3.3.3 を参照のこと. □

命題 3.9. $\mathcal{F}$ を $\mathbb{R}$ 上の分布関数全体の集合とする. $\mathcal{F}$ は $\bigl(\mathcal{F}', \|\cdot\|_\infty\bigr)$ の閉部分空間である.

Proof. 節 3.3.4 を参照のこと. □

注意 3.10. $\mathcal{F}'$ はコンパクトであることが Alegro-Banach の定理よりわかるので, $\bigl(\mathcal{F}, \|\cdot\|_\infty\bigr)$ はコンパクト空間であることも知られている. □

3.3 証明

3.3.1 定理 3.3 の証明

確率変数 X の分布を P とする. すなわち $\mathsf{P}(B) := \mathsf{Pr}(X \in B)\ \bigl(\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\bigr)$ である.

(1) $(-\infty, x] \subset (-\infty, y]$ に注意して, 補題 1.5(4) を P に適用すればよい.
(2) $A_n = (-\infty, n]$ と $A_n = (-\infty, -n]$ として, P に補題 1.5(6)(7) を適用すればよい.
(3) $A_n = \left(-\infty, x + \dfrac{1}{n}\right]$ として, P に補題 1.5(7) を適用すればよい. □

3.3.2 補題 3.5 の証明

各 $x \in \mathbb{R}$ に対して, $\{\mathsf{F}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は有界列なので, ある部分列 $\{\mathsf{F}_{n(k)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ は収束する. その収束先を $F(x)$ と書く.
① F の非減少性の証明:
② F の右連続性: □

3.3.3 命題 3.8 の証明

$\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathcal{F}'$ の Cauchy 列とする. 各 $x \in \mathbb{R}$ と $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|F_n(x) - F_m(x) \leq \|F_n - F_m\|_{\infty}$$

となるので, $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ も Cauchy 列である. よって, $\mathbb{R}$ の完備性から, 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して, $G(x) \in \mathbb{R}$ が存在して

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} G_n(x) \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$$

となる.
G の有界性の証明: $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathcal{F}'$ の Cauchy 列なので, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\exists N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : m, n \geq N \Rightarrow \|F_n - F_m\|_{\infty} < \epsilon$$

となる. したがって, すべての $x \in \mathbb{R}$ と $n \geq N$ に対して

$$|F(x) - F_n(x)| \leq \lim_{m\to\infty} |F_m(x) - F_n(x)| \leq \epsilon$$

となる. すなわち

$$\|F - F_n\|_{\infty} \leq \epsilon \tag{3.1}$$

となる. $n \geq N$ とする. F_n の有界性に注意すると

$$\|F\|_{\infty} \leq \|F_n\|_{\infty} + \|F_n - F\|_{\infty} \leq \|F_n\|_{\infty} + \epsilon$$

となるので, F は有界であることが示せた.

G の右連続性の証明: (3.1) から, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq N \Rightarrow \|F - F_n\|_\infty \leq \epsilon$$

となる. F_n の右連続性から, ある $\delta > 0$ が存在して

$$y \in (x, x+\delta) \Rightarrow |F_n(x) - F_n(y)| < \epsilon$$

となる. したがって, $y \in (x, x+\delta)$ と $n \geq N$ に対して

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leq |F(x) - F_n(x)| + |F_n(x) - F_n(y)| + |F_n(y) - F(y)| \\ &\leq 3\epsilon \end{aligned}$$

となる. よって, F は右連続であることが示せた.

以上から

$$F \in \mathcal{F}' \quad \text{かつ} \quad \lim_{n\to\infty} \|F - F_n\|_\infty = 0$$

となるので, 命題は証明された. □

3.3.4 命題 3.9 の証明

$\{\mathsf{F}_n\}_{n=1}^\infty$ は $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ の収束列とする. $\mathcal{F}'$ は Banach 空間だったので, ある $F \in \mathcal{F}'$ が存在して

$$\|F - \mathsf{F}_n\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

となる. 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$|\mathsf{F}_n(x) - F(x)| \leq \|\mathsf{F}_n - F\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

となるので

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{F}_n(x)$$

とある.

$F \in \mathcal{F}$ の証明: そのために, 以下の ① ∼ ③ を示せばよい: ① $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, ② $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$, ③ F の非減少性.

① の証明: 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$n \geq N \Rightarrow \|\mathsf{F}_n - F\|_\infty < \epsilon$$

となる. $\lim_{x\to-\infty} \mathsf{F}_n = 0$ なので, ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$x < M \Rightarrow |\mathsf{F}_n(x)| < \epsilon$$

となる. したがって, $x < M$ なる $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$|F(x)| \leq |F(x) - \mathsf{F}_n(x)| + |\mathsf{F}_n(x)| \leq \|F - \mathsf{F}\|_\infty + \epsilon < 2\epsilon$$

となる. したがって

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$$

が示せた.
②の証明: ① と同様である.
③の証明: $\mathsf{F}_n \in \mathcal{F}$ なので, すべての $n \in \mathbb{N}$ と $x < y$ に対して

$$\mathsf{F}_n(x) \leq \mathsf{F}_n(y)$$

となる. よって

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{F}_n(x) \leq \lim_{n\to\infty} \mathsf{F}_n(y) = F(y)$$

となるので, F は非減少であることが示せた.
以上から, $\mathcal{F}$ は $\mathcal{F}'$ の閉部分空間であることが示せた. □