第4章　大数の強法則と中心極限定理

4.1　大数の弱法則と強法則

定理 4.1. (大数の弱法則) $X_1, X_2, \ldots$ は確率空間 $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr}\big)$ 上の i.i.d. 確率変数列とする．$\mathsf{E}\big[|X_1|\big] < \infty$ のとき

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\big(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\big) \xrightarrow{\mathrm{P}} \mu, \qquad \mu = \mathsf{E}[X_1]$$

が成立する．

Proof. より強い条件 $\mathsf{E}\big[X_1^2\big] < \infty$ のもとで定理の主張を証明する．定理の仮定のもとの証明は節 4.4.1 で与える．$\mathsf{Var}[X_1] = \sigma^2$ とおく．Chebyshev の不等式 (系 1.30) より

$$\mathsf{Pr}\big(|\overline{X}_n - \mu| \geq \epsilon\big) \leq \frac{\mathsf{Var}\big[\overline{X}_n\big]}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

よりわかる．仮定のもとでの証明は, 節 4.4.1 を参照せよ．□

次に, 4 次の積率が有限という強い仮定のもとで大数の強法則を証明するための補題を準備する．

補題 4.2. $X_1, X_2, \ldots$ は非負値確率変数列で, 条件

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}[X_n] < \infty \tag{4.1}$$

をみたすとする．このとき

$$\mathsf{Pr}\left(\omega \in \Omega;\ \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) < \infty\right) = 1$$

が成り立つ．

Proof. 証明は節 4.4.2 で行う．□

定理 4.3. (大数の強法則) $X_1, X_2, \ldots$ を確率空間 $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr}\big)$ 上の i.i.d. 確率変数列とし, $\mathsf{E}\big[|X_1|^4\big] < \infty$ とする. このとき

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\big(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\big) \xrightarrow{\text{a.s.}} \mu, \qquad \mu = \mathsf{E}[X_1] \tag{4.2}$$

が成立する.

Proof. 節 4.4.3 を参照のこと. □

注意 4.4. 大数の法則は $\mathsf{E}\big[|X_1|\big] < \infty$ で成立することが知られている. □

系 4.5 (Weierstrass の近似定理)**.** 閉区間 $[0, 1]$ 上の任意の連続関数 f は多項式の極限として表すことができる. 特に, $f(0) = f(1) = 0$ のとき[1], $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$B_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array}\right) x^j (1-x)^{n-j}$$

とおいたとき

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} B_n(x) \tag{4.3}$$

が成立する.

Proof. $x = 0, 1$ のとき (4.3) は明らかなので, $0 < x < 1$ に対して, (4.3) が成立すること示す. $X_j\,(j = 1, 2, \ldots)$ は i.i.d. 確率変数列で

$$\mathsf{Pr}(X_j = 1) = x = 1 - \mathsf{Pr}(X_j = 0)$$

をみたすとする. いま

$$\mathsf{E}\left[\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right] = x$$

に注意して, Chebyshev の不等式 (系 **??**) を用いると, 任意の $\epsilon > 0$ に対

[1] $f(0) = a,\ f(1) = b$ に対して, $\widetilde{f}(x) = f(x) + \big\{f(b) - f(a)\big\}x + f(a)$ とおくと $\widetilde{f}$ は $[0, 1]$ 上の連続関数で $\widetilde{f}(0) = \widetilde{f}(1) = 0$ となるので, 左記の設定は一般性を失わない仮定である.

して

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Pr}\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-x\right|\geq\epsilon\right)\\
&\quad\leq\frac{\mathsf{Var}\left(\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)}{\epsilon^2}\\
&\quad=\frac{\dfrac{1}{n^2}\bigl(\mathsf{Var}(X_1)+\mathsf{Var}(X_2)+\cdots+\mathsf{Var}(X_n)\bigr)}{\epsilon^2}\\
&\quad=\frac{x(1-x)}{n\epsilon^2}
\end{aligned}$$

となる．したがって

$$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\xrightarrow{P}x$$

がわかる．さらに, 定理 2.7(2) より

$$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\rightsquigarrow x$$

を得る．f は有界連続関数なので, 定理 2.3(2) から

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}\left[f\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)\right]=f(x)$$

となる．しかし, $S:=X_1+X_2+\cdots+X_n\sim\mathsf{Bino}(n,\,x)$ なので

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[f\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)\right]&=\mathsf{E}\left[f\left(\frac{S}{n}\right)\right]\\
&=\sum_{j=0}^{n}f\left(\frac{j}{n}\right)\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j}\\
&=B_n(x)
\end{aligned}$$

がわかる．よって, 主張は証明された. □

4.2 中心極限定理

定理 4.6. $X_1,\,X_2,\,\ldots$ を i.i.d. 確率変数列とし, $\mathsf{E}[X_1]=\mu$, $\mathsf{Var}[X_1]=\sigma^2\,(0<\sigma<\infty)$ とする．このとき

$$Z_n:=\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sqrt{\mathsf{Var}\left[\overline{X}_n\right]}}=\frac{\sqrt{n}\bigl(\overline{X}_n-\mu\bigr)}{\sigma}\rightsquigarrow Z$$

が成り立つ．ただし $\overline{X}_n=\dfrac{1}{n}\bigl(X_1+X_2+\cdots+X_n\bigr)$, $Z\sim\mathsf{N}(0,\,1)$ である．

Proof. 節 4.4.4 で Lindeberg による証明を与えておく. □

例 4.7. $X_1, X_2, \ldots$ を i.i.d. 確率変数列とし, $\mathsf{E}\big[X_1\big] = \mu$, $\mathsf{Var}\big[X_1\big] = \sigma^2\,(0 < \sigma < \infty)$ とする. このとき中心極限定理 (定理 4.6) より

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}\big(\overline{X}_n - \mu\big)}{\sigma} \rightsquigarrow \mathsf{N}(0,\,1) \tag{4.4}$$

が成立する. ここで

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\big(X_j - \overline{X}_n\big)^2, \quad S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\big(X_j - \overline{X}_n\big)^2}$$

とおく. すると

$$S_n^2 = \frac{n}{n-1}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\big(X_j - \mu\big)^2 - \big(\overline{X}_n - \mu\big)^2\right\}$$

と書き直せる. 設定から $\mathsf{E}[(X_1-\mu)^2] = \sigma^2 < \infty$ なので, 大数の法則 (定理 4.1) より

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\big(X_j - \mu\big)^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathsf{E}\big[\big(X_1 - \mu\big)^2\big] = \sigma^2, \tag{4.5}$$

$$\overline{X}_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \mu \tag{4.6}$$

である. (4.6) に対して, 定理 2.4(2)($g(x) = (x-\mu)^2$) を用いると

$$\big(\overline{X}_n - \mu\big)^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} 0 \tag{4.7}$$

となる. さらに, (4.5), (4.7) と定理 2.4 より

$$S_n^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} \sigma^2$$

である. 再度, 定理 2.10(6) を用いると

$$\frac{S_n}{\sigma} \xrightarrow{\mathrm{P}} 1 \tag{4.8}$$

がわかる. 最後に (4.4), (4.8) と定理 2.10 より

$$\frac{\sqrt{n}\big(\overline{X}_n - \mu\big)}{S_n} \rightsquigarrow \mathsf{N}(0,\,1)$$

を得る.

□

4.3 デルタ法

$\{Y_n\}$ を確率変数列とする．Y_n の極限分布が正規分布のとき滑らかな実数値関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して $g(Y_n)$ の極限分布を求めよう．

定理 4.8. (デルタ法) $Y_1, Y_2, \ldots$ を確率変数列とし

$$\frac{\sqrt{n}\big(Y_n - \mu\big)}{\sigma} \rightsquigarrow \mathsf{N}(0,\, 1),$$

とし，g は $x = \mu$ の近傍で連続微分可能な関数で $\overset{\bullet}{g}(\mu) \neq 0$ とする．ただし，$\mu \in \mathbb{R}$, $0 < \sigma < \infty$, $\overset{\bullet}{g}(t) = \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(t)$ である．このとき

$$\frac{\sqrt{n}\big(g(Y_n) - g(\mu)\big)}{\big|\overset{\bullet}{g}(\mu)\big|\sigma} \rightsquigarrow \mathsf{N}(0,\, 1)$$

が成立する．すなわち

$$Y_n \approx \mathsf{N}\left(\mu,\, \frac{\sigma^2}{n}\right) \;\Rightarrow\; g(Y_n) \approx \mathsf{N}\left(g(\mu),\, \big(\overset{\bullet}{g}(\mu)\big)^2 \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

である．ただし「≈」は「分布が近似できる」の意味である．

Proof. 節 4.4.5 で証明をする． □

例 4.9. $X_1, X_2, \ldots$ を i.i.d. 確率変数列とし，$\mathsf{E}\big[X_1\big] = \mu$, $\mathsf{Var}\big[X_1\big] = \sigma^2\,(0 < \sigma < \infty)$ とする．このとき中心極限定理 (定理 4.6) より

$$\frac{\sqrt{n}\big(\overline{X}_n - \mu\big)}{\sigma} \rightsquigarrow \mathsf{N}(0,\, 1)$$

となる．いま

$$W_n = e^{\overline{X}_n}$$

とおく．したがって $g(x) = e^x\,(x \in \mathbb{R})$ とすれば $\overset{\bullet}{g}(x) = e^x$ となる．よってデルタ法 (定理 4.8) より

$$\frac{\sqrt{n}\big(W_n - e^{\mu}\big)}{e^{\mu}\sigma} \rightsquigarrow \mathsf{N}(0,\, 1)$$

となる．よって

$$W_n \approx \mathsf{N}\left(e^{\mu},\, \frac{e^{2\mu}\sigma^2}{n}\right)$$

がわかる． □

4.4 証明

4.4.1 定理 4.1 の証明

任意の $\delta > 0$ と n に対して

$$Y_j := Y_j(n) = \begin{cases} X_j & (|X_j| \le \delta n) \\ 0 & (|X_j| > \delta n) \end{cases}$$

$$Z_j := Z_j(n) = \begin{cases} 0 & (|X_j| \le \delta n) \\ X_j & (|X_j| > \delta n) \end{cases} \quad ; \quad (j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

と定める. 明らかに

$$X_j = Y_j + Z_j, \qquad (j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

である. 以下では, $X_j\,(j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$ は連続型確率変数とし, 共通の p.d.f. p を持つとして議論を進めていく. このとき

$$\begin{aligned}
\mathsf{Var}[Y_j] = \mathsf{Var}[Y_1] = \mathsf{E}[Y_1^2] - \big(\mathsf{E}[Y_1]\big)^2 &\le \mathsf{E}[Y_1^2] \\
&= \mathsf{E}\big[X_1^2 \mathbb{1}_{[-\delta n,\, \delta n]}(X_1)\big] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathbb{1}_{[-\delta n,\, \delta n]}(x)\mathsf{p}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\delta n}^{\delta n} x^2 \mathsf{p}(x)\,\mathrm{d}x \\
&\le \delta n \int_{-\delta n}^{\delta n} |x|\mathsf{p}(x)\,\mathrm{d}x \le \delta n \int_{-\infty}^{\infty} |x|\mathsf{p}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \delta n \mathsf{E}[X_1]
\end{aligned}$$

となる. すなわち

$$\mathsf{Var}[Y_j] \le \delta n \mathsf{E}[|X_1|] \qquad (j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n) \tag{4.9}$$

である. 次に

$$\mathsf{E}[Y_j] = \mathsf{E}[Y_1] = \mathsf{E}[X_1 \mathbb{1}_{[-\delta n,\, \delta n]}(X_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \mathbb{1}_{[-\delta n,\, \delta n]}(x)\mathsf{p}(x)\,\mathrm{d}x$$

と書ける. ここで

$$\left| x \mathbb{1}_{[-\delta n,\, \delta n]}(x)\mathsf{p}(x) \right| \le |x|\mathsf{p}(x), \qquad x \mathbb{1}_{[-\delta n,\, \delta n]}(x)\mathsf{p}(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\mathsf{p}(x)$$

かつ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\mathsf{p}(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

であることに注意して, 優収束定理 (定理 1.37) を用いると

$$\mathsf{E}[Y_1]=\int_{-\infty}^{\infty} x\mathbb{1}_{[-\delta n,\,\delta n]}(x)\mathsf{p}(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x\mathsf{p}(x)\,\mathrm{d}x$$

となることがわかる. したがって

$$\mathsf{E}[Y_1] \xrightarrow{n\to\infty} \mu \tag{4.10}$$

である. 以上のことを踏まえると任意の $\epsilon>0$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathsf{Pr}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}Y_j-\mathsf{E}[Y_1]\right|\geq\epsilon\right) &= \mathsf{Pr}\left(\left|\sum_{j=1}^{n}Y_j-\mathsf{E}\left[\sum_{j=1}^{n}Y_j\right]\right|\geq n\epsilon\right)\\
&\leq \frac{1}{n^2\epsilon^2}\mathsf{Var}\left[\sum_{j=1}^{n}Y_j\right] \qquad (\because \text{系 } \textbf{??})\\
&= \frac{n}{n^2\epsilon^2}\mathsf{Var}[Y_1] \leq \frac{n\delta n\mathsf{E}[|X_1|]}{n^2\epsilon^2} \qquad (\because (4.9))\\
&= \frac{\delta}{\epsilon^2}\mathsf{E}[|X_1|]
\end{aligned}$$

となる. したがって

$$\mathsf{Pr}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}Y_j-\mathsf{E}[Y_1]\right|\geq\epsilon\right)\leq\frac{\delta}{\epsilon^2}\mathsf{E}[|X_1|] \tag{4.11}$$

となる. よって, (4.10) と (4.11) から, 十分大きな n に対して

$$\begin{aligned}
\mathsf{Pr}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}Y_j-\mu\right|\geq 2\epsilon\right) &= \mathsf{Pr}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}Y_j-\mathsf{E}[Y_1]+\mathsf{E}[Y_1]-\mu\right|\geq 2\epsilon\right)\\
&\leq \mathsf{Pr}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}Y_j-\mathsf{E}[Y_1]\right|+\left|\mathsf{E}[Y_1]-\mu\right|\geq 2\epsilon\right)\\
&\leq \mathsf{Pr}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}Y_j-\mathsf{E}[Y_1]\right|\geq\epsilon\right)+\mathsf{Pr}\left(\left|\mathsf{E}[Y_1]-\mu\right|\geq\epsilon\right)\\
&\leq \frac{\delta}{\epsilon^2}\mathsf{E}[|X_1|]
\end{aligned}$$

となる[2]. したがって

$$\mathsf{Pr}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}Y_j-\mu\right|\geq 2\epsilon\right)\leq\frac{\delta}{\epsilon^2}\mathsf{E}[|X_1|] \tag{4.12}$$

[2] (4.10) から n を十分大きくとると $|\mathsf{E}[Y_1]-\mu|\geq\epsilon$ となるので, $\mathsf{Pr}(|\mathsf{E}[Y_1]-\mu|\geq\epsilon)=0$ となる.

となる．さらに, $\mathsf{E}[|X_1] < \infty$ なので, 任意の $\delta > 0$ と十分大きな n に対して

$$\int_{|x|>\delta n} |x|\mathsf{p}(x)\,\mathrm{d}x < \delta^2$$

とできることに注意する．このことより, $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\begin{aligned}\mathsf{Pr}(Z_j \neq 0) = \mathsf{Pr}(|Z_j| > \delta n) = \mathsf{Pr}(|X_j| > \delta n) &= \int_{-\infty}^{-\delta n} \mathsf{p}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\delta n}^{\infty} \mathsf{p}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{|x|>\delta n} \mathsf{p}(x)\,\mathrm{d}x < \int_{|x|>\delta n} \frac{|x|}{\delta n}\mathsf{p}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\delta n}\int_{|x|>\delta n} |x|\mathsf{p}(x)\,\mathrm{d}x \\ &< \frac{\delta^2}{\delta n} = \frac{\delta}{n} \end{aligned} \tag{4.13}$$

となる．したがって, (4.13) から

$$\mathsf{Pr}\Big(\sum_{j=1}^n Z_j \neq 0\Big) = \mathsf{Pr}\Big(\bigcup_{j=1}^n \{Z_j \neq 0\}\Big) = n\mathsf{Pr}\big(Z_1 \neq 0\big) \leq \delta \tag{4.14}$$

を得る．よって, (4.12) と (4.14) から, 十分大きな n に対して

$$\begin{aligned}\mathsf{Pr}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j - \mu\right| \geq 4\epsilon\right) &= \mathsf{Pr}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Y_j + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Z_j - \mu\right| \geq 4\epsilon\right) \\ &\leq \mathsf{Pr}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Y_j - \mu\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Z_j\right| \geq 4\epsilon\right) \\ &\leq \mathsf{Pr}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Y_j - \mu\right| \geq 2\epsilon\right) + \mathsf{Pr}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Z_j\right| \geq 2\epsilon\right) \\ &\leq \mathsf{Pr}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Y_j - \mu\right| \geq 2\epsilon\right) + \mathsf{Pr}\left(\sum_{j=1}^n Z_j \neq 0\right) \\ &\leq \frac{\delta}{\epsilon^2}\mathsf{E}[|X_1|] + \delta \end{aligned}$$

となる．ここで, δ を ϵ^3 とおきなおせば, 十分大きな n に対して

$$\mathsf{Pr}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j - \mu\right| \geq 4\epsilon\right) \leq \epsilon\mathsf{E}[|X_1|] + \epsilon^3$$

となる．上式は任意の $\epsilon > 0$ で成立したので, 定理の主張は証明された．
□

4.4.2 補題 4.2 の証明

背理法で証明する．そのために

$$\mathsf{Pr}\Bigl(\sum_{k=1}^{\infty} X_k < \infty\Bigr) < 1$$

を仮定する．さらに事象 F と N を

$$F := \Bigl\{\omega \in \Omega;\ \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega) < \infty\Bigr\}, \qquad N := \Bigl\{\omega \in \Omega;\ \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega) = \infty\Bigr\}$$

で定める．このとき

$$\Omega = F \cup N \quad \text{かつ} \quad F \cap N = \varnothing$$

が成り立つ．したがって

$$1 = \mathsf{Pr}(\Omega) = \mathsf{Pr}\bigl(F \cup N\bigr) = \mathsf{Pr}(F) + \mathsf{Pr}(N) \qquad (\because \mathsf{Pr}\ \text{の加法性})$$

がわかる．この関係式と背理法の仮定 $\mathsf{Pr}(F) < 1$ から $\mathsf{Pr}(N) > 0$ となる．一方, $\omega \in N$ のとき

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega) = \infty$$

であり, $\omega \in N^c$ のとき

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega) < \infty$$

である．したがって, 任意の正の実数 $r \geq 0$ に対して

$$r\mathbb{1}_N(\omega) \leq \sum_{k=1}^{\infty} X_k(\omega) \qquad (\forall \omega \in \Omega) \tag{4.15}$$

が成り立つ．(4.15) の両辺の期待値をとる．すると 定義 2.5(4), (**??**) と (4.15) から

$$r \times \mathsf{Pr}(N) = \mathsf{E}[r\mathbb{1}_N] \leq \mathsf{E}\Bigl[\sum_{k=1}^{\infty} X_k\Bigr] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{E}\bigl[X_k\bigr] < \infty \tag{4.16}$$

を得る．(4.16) の最後の等号は単調収束定理からわかる．ここで $\mathsf{Pr}(N) > 0$ であり, $r \geq 0$ は任意の実数だったので, $r \to \infty$ とすれば, (4.16) の最左辺は $+\infty$ となるので, 矛盾が生じる．したがって, $\mathsf{Pr}(F) = 1$ が成り立つ． □

4.4.3 定理 4.3 の証明

まず

$$\mathsf{E}\bigl[\bigl|X_1\bigr|^4\bigr] =: K < \infty, \quad T_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad \overline{X}_n = \frac{T_n}{n}$$

とおく.

最初に, $\mu = 0$ として (4.2) を示す. 以下の事象の包含関係に注意する. すなわち

$$\left\{\omega \in \Omega;\ \sum_{n=1}^{\infty}\bigl(\overline{X}_n(\omega)\bigr)^4 < \infty\right\} \subset \left\{\omega \in \Omega;\ \lim_{n\to\infty}\overline{X}_n(\omega) = 0\right\}$$

が成立する. このことより

$$\mathsf{Pr}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\overline{X}_n^4 < \infty\right) = 1 \tag{4.17}$$

がわかると

$$1 = \mathsf{Pr}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\overline{X}_n^4 < \infty\right) \le \mathsf{Pr}\left(\lim_{n\to\infty}\overline{X}_n = 0\right)$$

となり, $\mu = 0$ のときに (4.2) がわかる.

以下では $\mu = 0$ として (4.17) を示す. そのために多項定理を用いて, T_n を展開すると

$$\bigl(X_1 + \cdots + X_n\bigr)^4 = \sum_{\substack{\ell_1+\cdots+\ell_n=4\\ \ell_j\ge 0\,(j=1,\dots,n)}} \frac{4!}{\ell_1! \times \ell_2! \times \cdots \times \ell_n!} X_1^{\ell_1} \times X_2^{\ell_2} \times \cdots \times X_n^{\ell_n}$$

となる. ただし $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ は 0 以上の整数である. ここで $X_1^{\ell_1}, X_2^{\ell_2}, \ldots, X_n^{\ell_n}$ は独立あることに注意すると

$$\mathsf{E}\bigl[T_n^4\bigr] = \sum_{\substack{\ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_n=4\\ \ell_j\ge 0\,(j=1,2,\dots,n)}} \frac{4!}{\ell_1!\ell_2! \times \cdots \times \ell_n!} \mathsf{E}\bigl[X_1^{\ell_1}\bigr] \times \mathsf{E}\bigl[X_2^{\ell_2}\bigr] \times \cdots \times \mathsf{E}\bigl[X_n^{\ell_n}\bigr]$$

がわかる. さらに, $\mathsf{E}\bigl[X_k\bigr] = \mu = 0\,(k = 1, 2, \ldots, n)$ と $\dfrac{4!}{2!2!} = 6$ を用いると

$$\mathsf{E}\bigl[T_n^4\bigr] = \sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}\bigl[X_k^4\bigr] + 6\sum_{1\le k<\ell\le n}\mathsf{E}\bigl[X_k^2\bigr]\,\mathsf{E}\bigl[X_\ell^2\bigr]$$

を得る．ここで $\mathsf{E}\left[X_k^4\right] = K\,(k = 1,\,2,\ldots,\,n)$ と Cauchy-Schwarz の不等式から

$$\mathsf{E}\left[X_k^2\right] \leq \sqrt{\mathsf{E}\left[X_k^4\right]} = \sqrt{K}$$

となることに注意すると

$$\mathsf{E}\left[T_n^4\right] \leq nK + 6\sum_{1\leq k<\ell\leq n}\sqrt{K}\,\sqrt{K} = nK + 3n(n-1)K \leq 3Kn^2$$

を得る．よって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{E}\left[\overline{X}_n^4\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\mathsf{E}\left[T_n^4\right] \leq 3K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$$

となる．したがって 補題 4.2 から (4.17) が成立することがわかる．

つぎに $\mu \neq 0$ の場合を示す．$Y_k = X_k - \mu\,(k = 1,\,2,\,\ldots,\,n)$ とおくと

$$\mathsf{E}\left[Y_k^4\right] \leq \mathsf{E}\left[\left\{|X_k| + |\mu|\right\}^4\right] \leq 8\mathsf{E}\left[|X_k|^4 + |\mu|^4\right] \leq 8\left(K + \mu^4\right) < \infty$$

が成り立つ．したがって，この定理の証明の前半部分で得られた結果から

$$\mathsf{Pr}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n\right) = 0\right) = 1$$

となる．最後に，$\forall\omega \in \Omega$ に対して

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\big(Y_1(\omega) + Y_2(\omega) + \cdots + Y_n(\omega)\big) = 0\\ &\quad\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\big(X_1(\omega) + X_2(\omega) + \cdots + X_n(\omega)\big) = \mu\end{aligned}$$

に注意すればよい． □

4.4.4 定理 4.6 の証明

まず $\mathsf{E}[X_1^3] < \infty$ を仮定して証明をする．

$$Y_j = \frac{X_j - \mu}{\sigma}, \qquad (j = 1,\,2,\,\ldots,\,n)$$

とおくと $\mathsf{E}[Y_1] = 0$, $\mathsf{E}[Y_1^2] = 1$, $\mathsf{E}[|Y_1|^3] < \infty$ となることに注意する．$Z_1,\,Z_2,\,\ldots,\,Z_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathsf{N}(0,\,1)$ とし

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}Y_j, \quad S = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}Z_j \sim \mathsf{N}(0,\,1)$$

とおく．

$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathsf{Pr}\bigl(S_n \leq x\bigr) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{Pr}\bigl(S \leq x\bigr) \tag{4.18}$$

を示せばよい．ここで

$$g(y) = \mathbb{1}_{(-\infty,\, x]}(y) \qquad (y \in \mathbb{R})$$

とおくと (4.18) を

$$\mathsf{E}\bigl[g(S_n)\bigr] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{E}\bigl[g(S)\bigr] \tag{4.19}$$

と書きかえることができる．さらに $\forall\delta > 0$ に対して関数 $g_{\delta,\,x} : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\,1]$ を以下のような性質をもつ関数とする．

- $g_{\delta,\,x}(y) = 1\,(y \leq x)$.
- $g_{\delta,\,x}(y) = 0\,(y \geq x+\delta)$.
- $g_{\delta,\,x}$ は有界な 3 次の導関数をもつ．3 次の導関数の絶対値の上界を C と書くことにする．

さらに $g_{\delta,\,x-\delta}(y) = g_{\delta,\,x}(y+\delta)$ と定める．すると

$$g_{\delta,\,x-\delta}(y) \leq g(y) \leq g_{\delta,\,x}(y), \qquad (y \in \mathbb{R})$$

となる．このことから $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathsf{Pr}\bigl(S_n \leq x\bigr) &= \mathsf{E}\bigl[g_{\delta,\,x}(S_n)\bigr] \\
&= \mathsf{E}\bigl[g_{\delta,\,x}(S_n)\bigr] - \mathsf{E}\bigl[g_{\delta,\,x}(S)\bigr] + \mathsf{E}\bigl[g_{\delta,\,x}(S)\bigr] \\
&\leq \mathsf{Pr}\bigl(Z \leq x+\delta\bigr) + \bigl|\mathsf{E}\bigl[g_{\delta,\,x}(S_n)\bigr] - \mathsf{E}\bigl[g_{\delta,\,x}(S)\bigr]\bigr|
\end{aligned}$$

を得る．同様に

$$\mathsf{Pr}\bigl(S_n \leq x\bigr) \geq \mathsf{Pr}\bigl(S \leq x-\delta\bigr) - \bigl|\mathsf{E}\bigl[g_{\delta,\,x-\delta}(S_n)\bigr] - \mathsf{E}\bigl[g_{\delta,\,x-\delta}(S)\bigr]\bigr|$$

を得る．これらの不等式を合わせると

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Pr}\bigl(S \leq x+\delta\bigr) + \bigl|\mathsf{E}\bigl[g_{\delta,\,x}(S_n)\bigr] - \mathsf{E}\bigl[g_{\delta,\,x}(S)\bigr]\bigr| \\
&\qquad \geq \mathsf{Pr}\bigl(S_n \leq x\bigr) \\
&\qquad \geq \mathsf{Pr}\bigl(S \leq x-\delta\bigr) - \bigl|\mathsf{E}\bigl[g_{\delta,\,x-\delta}(S_n)\bigr] - \mathsf{E}\bigl[g_{\delta,\,x-\delta}(S)\bigr]\bigr|
\end{aligned}$$

となる．δ を 0 に近づけると $\mathsf{Pr}\bigl(S \leq x \pm \delta\bigr)$ は $\mathsf{Pr}\bigl(S \leq x\bigr)$ に近づく．したがって

$$\mathsf{E}\bigl[g_{\delta,\,x}(S_n)\bigr] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{E}\bigl[g_{\delta,\,x}(S)\bigr] \quad と \quad \mathsf{E}\bigl[g_{\delta,\,x-\delta}(S_n)\bigr] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathsf{E}\bigl[g_{\delta,\,x-\delta}(S)\bigr] \tag{4.20}$$

を示せばよい．よって $h : \mathbb{R} \to [0, 1]$ を有界な 3 次の導関数をもつ関数として (4.20) を示す．

$1 \le m \le n+1$ に対して

$$T_m = \frac{1}{\sqrt{n}}\big(Y_1 + \cdots + Y_{m-1} + Z_m + \cdots + Z_n\big)$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned}
\big|\mathsf{E}\big[h(S_n)\big] - \mathsf{E}\big[h(S)\big]\big| &= \left|\sum_{m=1}^{n+1}\big\{\mathsf{E}\big[h(T_m)\big] - \mathsf{E}\big[h(T_{m+1})\big]\big\}\right| \\
&\le \sum_{m=1} n+1 \big|\mathsf{E}\big[h(T_m) - h(T_{m+1})\big]\big| \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

と書きかえる．次に $m = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$U_m = \frac{1}{\sqrt{n}}\big(Y_1 + \cdots + Y_{m-1} + Z_{m+1} + \cdots + Z_n\big)$$

とおくと

$$T_m = U_m + \frac{1}{\sqrt{n}}Z_m, \qquad T_{m+1} = U_m + \frac{1}{\sqrt{n}}Y_m$$

となる．Taylor 展開を用いると

$$\begin{aligned}
h(T_m) - h(U_m) &= (T_m - U_m)\,\dot{h}\,(U_m) + \frac{1}{2}(T_m - U_m)^2\,\ddot{h}\,(U_m) \\
&\quad + \frac{1}{6}(T_m - U_m)^3\,\dddot{h}\,(U_m^*), \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(T_{m+1}) - h(U_m) &= (T_{m+1} - U_m)\,\dot{h}\,(U_m) + \frac{1}{2}(T_{m+1} - U_m)^2\frac{1}{2}\,\dot{h}\,(U_m) + \ddot{h}\,(U_m) \\
&\quad + \frac{1}{6}(T_{m+1} - U_m)^3\,\dddot{h}\,(U_m^{**}), \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

を得る．ただし $\dot{h}$, $\ddot{h}$, $\dddot{h}$ は h の 1 次, 2 次, 3 次の導関数で, U_m^*, U_m^{**} は T_m と U_m の間と T_{m+1} と U_m の間の数である．U_m は Y_m と Z_m の両方とも独立であるので

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\big[\dot{h}\,(U_m)Z_m\big] = \mathsf{E}\big[\dot{h}\,(U_m)Y_m\big] = 0, \\
&\mathsf{E}\big[\ddot{h}\,(U_m)Z_m^2\big] = \mathsf{E}\big[\ddot{h}\,(U_m)\big] = \mathsf{E}\big[\ddot{h}\,(U_m)Y_m^2\big], \\
&\big|\mathsf{E}\big[\dddot{h}\,(U_m^*)\big]\big| \le C,\ \big|\mathsf{E}\big[\dddot{h}\,(U_m^{**})\big]\big| \le C
\end{aligned}$$

となる．上の期待値と (4.22) と (4.23) を合わせると

$$\begin{aligned}
\left|\mathsf{E}\big[h(T_m) - h(T_{m+1})\big]\right| &= \left|\mathsf{E}\big[h(T_m) - h(U_m) - \big(h(T_{m+1}) - h(U_m)\big)\big]\right| \\
&\le \left|\frac{C}{6n^{3/2}}\mathsf{E}\big[|Z_m|^3 + |Y_m|^3\big]\right|
\end{aligned}$$

を得る．この式を (4.20) に代入すると

$$\left|\mathsf{E}\big[h(S_n)\big] - \mathsf{E}\big[h(S)\big]\right| \le \frac{C}{6\sqrt{n}}\mathsf{E}\big[|Z_1|^3 + |Y_1|^3\big] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

を得る．よって Y_1 が有界な 3 次の積率をもつとき

$$S_n \rightsquigarrow S \sim \mathsf{N}(0, 1)$$

が示せた．

最後に $\mathsf{E}\big[Y_1^3\big] < \infty$ の仮定を除くための議論を行う．そのために任意の $\epsilon > 0$ とし, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\ddot{h}(y)| \le C'$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\dddot{h}(y)| \le C$ をみたす定数 C をとる．$m = 1, 2, \ldots, n$ に対して, $|Y_m| \le \epsilon\sqrt{n}$ のとき

$$\begin{aligned}
&\left|h(T_m) - h(U_m) - \frac{\dot{h}(U_m)Y_m}{\sqrt{n}} - \frac{\ddot{h}(U_m)Y_m^2}{2n}\right|\mathbb{1}\{|Y_m| \le \epsilon\sqrt{n}\} \\
&\qquad \le C\left|\frac{\dddot{h}(U_m^*)Y_m^3}{6n^{3/2}}\right|\mathbb{1}\{|Y_m| \le \epsilon\sqrt{n}\} \\
&\qquad \le \frac{C\epsilon}{6n}Y_m^2\mathbb{1}\{|Y_m| \le \epsilon\sqrt{n}\}
\end{aligned}$$

となる．一方 $|Y_m| > \epsilon\sqrt{n}$ のとき

$$\begin{aligned}
&\left|h(T_m) - h(U_m) - \frac{\dot{h}(U_m)Y_m}{\sqrt{n}} - \frac{\ddot{h}(U_m)Y_m^2}{2n}\right|\mathbb{1}\{|Y_m| > \epsilon\sqrt{n}\} \\
&\quad \le \left\{\left|h(T_m) - h(U_m) - \frac{\dot{h}(U_m)Y_m}{\sqrt{n}}\right| + \left|\frac{\ddot{h}(U_m)Y_m^2}{2n}\right|\right\}\mathbb{1}\{|Y_m| > \epsilon\sqrt{n}\} \\
&\quad \le \left\{\left|\frac{\ddot{h}(U_m^{***})Y_m^2}{2n}\right| + \left|\frac{\ddot{h}(U_m)Y_m^2}{2n}\right|\right\}\mathbb{1}\{|Y_m| > \epsilon\sqrt{n}\} \\
&\quad \le \frac{C'Y_m^2}{n}\mathbb{1}\{|Y_m| > \epsilon\sqrt{n}\}
\end{aligned}$$

となる．ただし U_m^{***} は T_m と U_m の間にあるものである．これらの不等式を合わせると

$$\begin{aligned}
&\left|h(T_m) - h(U_m) - \frac{\dot{h}(U_m)Y_m}{\sqrt{n}} - \frac{\ddot{h}(U_m)Y_m^2}{2n}\right| \\
&\qquad \le \frac{C\epsilon}{6n}Y_m^2\mathbb{1}\{|Y_m| \le \epsilon\sqrt{n}\} + \frac{C'Y_m^2}{n}\mathbb{1}\{|Y_m| > \epsilon\sqrt{n}\}
\end{aligned}$$

をなる．この式と (4.23) を合わせると

$$
\begin{aligned}
\left|\mathsf{E}\left[h(S_n)\right]-\mathsf{E}\left[h(S)\right]\right| &\le \frac{C}{\sqrt{n}}\mathsf{E}\left[Z_1^3\right]+\frac{C}{6}\epsilon\mathsf{E}\left[Y_1^2\mathbb{1}\{|Y_1|\le\epsilon\sqrt{n}\}\right]\\
&\quad +C'\mathsf{E}\left[Y_1^2\{Y_1>\epsilon\sqrt{n}\}\right]\\
&\le \frac{C}{\sqrt{n}}\mathsf{E}\left[Z_1^3\right]+\frac{C\epsilon}{6}+\frac{C'}{6}\mathsf{E}\left[Y_1^2\{Y_1>\epsilon\sqrt{n}\}\right]\\
&\xrightarrow{n\to\infty}\ \frac{C'}{6}\epsilon
\end{aligned}
$$

を得る．上の式で $\epsilon\to 0$ とすれば

$$
\mathsf{E}\left[h(S_n)\right]\xrightarrow{n\to\infty}\mathsf{E}\left[h(S)\right]
$$

が証明できた． □

4.4.5 定理 4.8 の証明

$g(x)$ は $x=\mu$ の近傍で連続微分可能である．このことからある $\delta_1>0$ が存在して $|x-\mu|<\delta_1$ なる任意の x に対して

$$
g(x)-g(\mu)=(x-\mu)\int_0^1 \overset{\bullet}{g}\left(\mu+t(x-\mu)\right)\mathrm{d}t \tag{4.24}
$$

が成立する．また $\overset{\bullet}{g}(x)$ は $x=\mu$ で連続なので, 任意の $\epsilon>0$ に対してある $\delta_2>0$ があって

$$
|x-\mu|<\delta_2 \ \Rightarrow\ \left|\overset{\bullet}{g}(x)-\overset{\bullet}{g}(\mu)\right|<\epsilon
$$

となる．よって $|x-\mu|<\min(\delta_1,\,\delta_2)=:\delta$ なる任意の x に対して

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^1 \overset{\bullet}{g}\left(\mu+t(x-\mu)\right)dt-\overset{\bullet}{g}(\mu)\right| &\le \int_0^1\left|\overset{\bullet}{g}\left(\mu+t(x-\mu)\right)-\overset{\bullet}{g}(\mu)\right|dt\\
&<\epsilon\int_0^1 dt=\epsilon
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

となる．(4.25) より

$$
\mathsf{Pr}\left(\left|\int_0^1 \overset{\bullet}{g}\left(\mu+t(Y_n-\mu)\right)dt-\overset{\bullet}{g}(\mu)\right|\ge\epsilon\right)\le\mathsf{Pr}\left(\left|Y_n-\mu\right|\ge\delta\right) \tag{4.26}
$$

が成立する．$\sqrt{n}\left(Y_n-\mu\right)/\sigma\rightsquigarrow\mathsf{N}(0,\,1)$ なので $Y_n\xrightarrow{\mathrm{P}}\mu$ である．(4.26) から

$$
\int_0^1 \overset{\bullet}{g}\left(\mu+t(Y_n-\mu)\right)\mathrm{d}t\xrightarrow{\mathrm{P}}\overset{\bullet}{g}(\mu) \tag{4.27}
$$

が成立する．$|Y_n-\mu|<\delta$ が起こったとき, (4.24) に $x=Y_n$ を代入すれば

$$\frac{\sqrt{n}\big(g(Y_n)-g(\mu)\big)}{\sigma}=\frac{\sqrt{n}\big(Y_n-\mu\big)}{\sigma}\int_0^1 \overset{\bullet}{g}\,\big(\mu+t(Y_n-\mu)\big)\,\mathrm{d}t \tag{4.28}$$

を得る． さらに, $\sqrt{n}(Y_n-\mu)/\sigma \rightsquigarrow \mathsf{N}(0,\,1)$ と (4.27) に注意して定理 2.10(5) を (4.28) に適用すれば

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{n}\big(g(Y_n)-g(\mu)\big)}{\sigma}\\
&\quad=\frac{\sqrt{n}\big(g(Y_n)-g(\mu)\big)}{\sigma}\mathbb{1}\{|Y_n-\mu|<\delta\}+\frac{\sqrt{n}\big(g(Y_n)-g(\mu)\big)}{\sigma}\mathbb{1}\{|Y_n-\mu|\geq\delta\}\\
&\quad=\frac{\sqrt{n}(Y_n-\mu)}{\sigma}\underbrace{\int_0^1 \overset{\bullet}{g}\,\big(\mu+t(Y_n-\mu)\big)\,\mathrm{d}t\mathbb{1}\{|Y_n-\mu|<\delta\}}_{\overset{\bullet}{g}(\mu)+o_P(1)}\\
&\qquad+\underbrace{\frac{\sqrt{n}\big(g(Y_n)-g(\mu)\big)}{\sigma}\mathbb{1}\{|Y_n-\mu|\geq\delta\}}_{=o_P(1)}\\
&\quad\rightsquigarrow\overset{\bullet}{g}\,(\mu)\mathsf{N}(0,\,1)
\end{aligned}$$

を得る．よって定理は示された． □