第5章　確率集中不等式

この章では, 独立な確率変数列の期待値からの偏差を制御する道具を導出する. 確率不等式は

$$\mathsf{Pr}\big(Z - \mathsf{E}[Z] \geq t\big) \leq g(t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

という形式で与えられる. ただし, Z はある確率変数で, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ は関数である. 特に, $X_1, X_2, \ldots, X_n\,(n \in \mathbb{N})$ は i.i.d. 確率変数列で

$$Z := Z_n = f_n(X_1, X_2, \ldots, X_n), \qquad f_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

としたとき

$$\mathsf{Pr}\big(Z - \mathsf{E}[Z] \geq t\big) \leq g(n, t), \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と書ける. ここで, $g(\,\cdot\,, \cdot\,)$ は 2 つの変数そうぞれに関して非減少であることが期待される.

5.1　Chernoff 限界

5.1.1　基本原理

系 5.1 (Chebyshev の不等式)**.** X を $\mathsf{E}[X^2] < \infty$ なる確率変数とする. このとき

$$\mathsf{Pr}\big(|X - \mathsf{E}[X]| \geq t)\big) \leq \frac{\mathsf{Var}[X]}{t^2}, \qquad (t > 0)$$

が成立する.

Proof. Markov の不等式 (命題 1.32) を用いると

$$\begin{aligned}\mathsf{Pr}\big(|X - \mathsf{E}[X]| \geq t)\big) = \mathsf{Pr}\big(|X - \mathsf{E}[X]|^2 \geq t^2)\big) &\leq \frac{\mathsf{E}[(X - \mathsf{E}[X])^2]}{t^2} \\ &= \frac{\mathsf{Var}[X]}{t^2}\end{aligned}$$

からわかる. □

Chebyshev の不等式では, 変換

$$x \mapsto x^2$$

を用いた. この変換を

$$x \mapsto e^{\lambda x}$$

に変えたものを考える. ただし, $\lambda > 0$ は定数である.

$\lambda_0 > 0$ とし, Z を確率変数とする. このとき, 関数

$$[0, \lambda_0) \ni \lambda \mapsto \Phi_Z(\lambda) := \log \mathsf{E}\big[\exp(\lambda Z)\big]$$

を **確率変数** Z **の** Cramér-Chernoff **変換** [1] という. ただし, $\forall\lambda \in [0, \lambda_0)$ に対して, $\mathsf{E}\big[e^{\lambda Z}\big] < \infty$ と仮定する. 次に, Φ_Z の Fenchel-Legendre **変換**を

$$\Phi_Z^{\vee}(t) := \sup_{\lambda \geq 0}\big\{\lambda t - \Phi_Z(\lambda)\big\} \qquad (t \geq 0)$$

で定める [2].

系 5.2. $\lambda \geq 0$ とする. 原点を含む近傍で $\mathsf{E}[e^{\lambda Z}] < \infty$ なる確率変数 Z に対して

$$\mathsf{Pr}\big(Z \geq t\big) \leq \exp\Big(-\Phi_Z^{\vee}(t)\Big) \qquad (t > 0)$$

が成り立つ.

Proof. 原点を含むある近傍に含まれる $\lambda > 0$ を取る. Markov の不等式 (命題 1.32) を用いると

$$\begin{aligned}
\mathsf{Pr}\big(Z \geq t\big) &= \mathsf{Pr}\big(\exp(\lambda Z) \geq \exp(\lambda t)\big) \\
&\leq \frac{1}{\exp(\lambda t)}\mathsf{E}\big[\exp(\lambda Z)\big] \\
&= \exp\Big\{-\big\{\lambda t - \log \mathsf{E}\big[\exp(\lambda Z)\big]\big\}\Big\} \\
&= \exp\Big\{-\big\{\lambda t - \Phi_Z(\lambda)\big\}\Big\} \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

となる. さらに, $\lambda = 0$ のときは

$$\mathsf{Pr}(Z \geq t) \leq 1 = \exp\big[-\{0 \times t - \Phi_Z(0)\}\big]$$

[1] $\lambda = 0$ のとき, $\mathsf{E}[e^{\lambda Z}] = 1$ となるので, $\Phi(0) = 0$ である.

[2] $\Phi_Z(\lambda) \geq 0$ で $\lambda = 0$ のとき, $\Phi_Z(0) = 0$ となる. よって, $t = 0$ のとき, $\Phi_Z^{\vee}(0) = \sup_{\lambda \geq 0}\big\{-\Phi_Z(\lambda)\big\} = \Phi_Z(0) = 0$ となる.

となるので, (5.1) は $\lambda \geq 0$ で成立する. $\lambda \geq 0$ は任意だったので

$$\begin{aligned} \mathsf{Pr}\bigl(Z \geq t\bigr) &\leq \exp\biggl\{-\sup_{\lambda \geq 0}\bigl\{\lambda t - \Phi_Z(\lambda)\bigr\}\biggr\} \\ &= \exp\Bigl\{-\Phi_Z^{\vee}(t)\Bigr\} \end{aligned}$$

を得る. □

5.1.2 例

例 5.3 (正規分布)**.** $Z \sim \mathsf{N}(0, \sigma^2)$ $(\sigma > 0)$ とする. このとき, $\lambda \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[e^{\lambda Z}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\biggl\{\lambda z - \frac{z^2}{2\sigma^2}\biggr\} \mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\biggl\{-\frac{1}{2\sigma^2}\bigl(z - \sigma^2\lambda\bigr)^2 + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}\biggr\} \mathrm{d}z \\ &= \exp\biggl(\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}\biggr) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\biggl\{-\frac{1}{2\sigma^2}\bigl(z - \sigma^2\lambda\bigr)^2\biggr\} \mathrm{d}z}_{=1} \\ &= \exp\biggl(\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}\biggr) \end{aligned}$$

となる. よって

$$\Phi_Z(\lambda) = \exp\biggl(\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}\biggr)$$

である. これより

$$\begin{aligned} \Phi_Z^{\vee}(t) &= \sup_{\lambda \geq 0}\biggl\{\lambda t - \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}\biggr\} \\ &= \sup_{\lambda \geq 0}\biggl\{-\frac{\sigma^2}{2}\biggl(\lambda - \frac{t}{\sigma^2}\biggr)^2 + \frac{t^2}{2\sigma^2}\biggr\} \\ &= \exp\biggl(\frac{t^2}{2\sigma^2}\biggr) \end{aligned}$$

となる. よって, 系 4.5 を用いると

$$\mathsf{Pr}\bigl(Z \geq t\bigr) \leq \exp\biggl(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\biggr) \qquad (t > 0)$$

を得る. □

例 5.4 (Poisson 分布)**.** $Y \sim \mathsf{Poi}(\nu)\,(\nu > 0)$ とする．$Z := Y - \nu$ とおくと, Z の積率母関数は

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\big[e^{\lambda Z}\big] &= e^{-\lambda\mu}\mathsf{E}\big[e^{\lambda Y}\big] = e^{-\lambda\mu}\sum_{k=0}^{\infty} e^{\lambda k}\frac{e^{-\nu}}{k!}\nu^k = e^{-\lambda\mu}e^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\nu e^{\lambda})^k}{k!}] \\ &= e^{-\lambda\mu}e^{-\nu}e^{\nu e^{\lambda}}\end{aligned}$$

となる．これより

$$\Phi_Z(\lambda) = \log\big\{e^{-\lambda\mu}e^{-\nu}e^{\nu e^{\lambda}}\big\} = \nu\big\{e^{\lambda} - \lambda - 1\big\}$$

となる．ここで

$$f_t(\lambda) := \lambda t - \nu\big\{e^{\lambda} - \lambda - 1\big\}$$

とおくと

$$\dot{f}_t\,(\lambda = t - \nu(e^{\lambda} - 1)$$

となるので, f_t は $\lambda = \log\left(1 + \frac{t}{\nu}\right)$ で最大値を取る．このことから

$$\begin{aligned}\Phi_Z^{\vee}(t) &= t\log\left(1 + \frac{t}{\nu}\right) - \nu\left(\left(1 + \frac{t}{\nu}\right) - \log\left(1 + \frac{t}{\nu}\right) - 1\right) \\ &= (t + \nu)\log\left(1 + \frac{t}{\nu}\right) - t \\ &= \nu\left\{\left(1 + \frac{t}{\nu}\right)\log\left(1 + \frac{t}{\nu}\right) - \frac{t}{\nu}\right\} \\ &= \nu h\left(\frac{t}{\nu}\right)\end{aligned}$$

となる．ただし, $h(x) = (1 + x)\log(1 + x) - x$ である．

これが劣ガンマであることを加筆する?

5.1.3 劣 Gauss と劣 Gamma 確率変数

定義 5.5. (1) 確率変数 X は定数 $\nu > 0$ の劣 **Gauss** であるとは

$$\Phi_X(\lambda) \le \frac{\lambda^2\nu}{2} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

であることをいう．これを $X \sim \mathsf{SubG}(\nu)$ と記す．

(2) 確率変数 X は定数 $\nu > 0$ と $c > 0$ の右からの劣 **Gamma** であるとは

$$\Phi_X(\lambda) \leq \frac{\lambda^2 \nu}{2(1-2c\lambda)} \qquad \left(0 < \lambda < \frac{1}{c}\right)$$

であることをいう. これを $X \sim \mathsf{\Gamma}_+(\nu, c)$ と記す. さらに, $-X \in \mathsf{\Gamma}_+(\nu, c)$ のとき, $X \in \mathsf{\Gamma}_-(\nu, c)$ と記す. 最後に, $\mathsf{\Gamma}(\nu, c) = \mathsf{\Gamma}_+(\nu, c) \bigcap \mathsf{\Gamma}_-(\nu, c)$ と定める.

補題 5.6. $X \sim \mathsf{subG}(\sigma^2)$ とする. このとき, $\forall t > 0$ に対して

$$\mathsf{Pr}(X \geq t) \;\; \leq \;\; \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right); \qquad \mathsf{Pr}(X \leq -t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$$

となる.

Proof. Chernoff 限界と呼ばれるテクニックを用いる. $\forall s > 0$ に対して, Markov の不等式 (命題 1.32) を用いる. $X \sim \mathsf{subG}(\sigma^2)$ であることより

$$\mathsf{Pr}(X \geq t) = \mathsf{Pr}\big(e^{sX} \geq e^{st}\big) \leq \frac{\mathsf{E}[e^{sX}]}{e^{st}} \leq \exp\left(\frac{\sigma^2}{2} s^2 - st\right) \tag{5.2}$$

となる. ここで $\phi(s) := (\sigma^2/2)s^2 - st \, (s > 0)$ とおくと

$$\phi(s) \geq \inf_{s>0} \phi(s) = -\frac{t^2}{2\sigma^2}$$

となるので, 不等式 (5.2) は任意の $s > 0$ で成立しているので

$$\mathsf{Pr}(X \geq t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$$

を得る. □

補題 5.7. 確率変数 X は

$$\mathsf{Pr}\big(|X| \geq t\big) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$$

をみたすとする. このとき, $\forall k \geq 1 \, (k \in \mathbb{N})$ に対して

$$\mathsf{E}\big[|X|^k\big] \leq (2\sigma^2)^{k/2} k \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)$$

となる. 特に

$$\Big(\mathsf{E}\big[|X|^k\big]\Big)^{1/k} \leq \sigma e^{1/e}\sqrt{k}, \qquad (k \geq 2)$$

と

$$\mathsf{E}\big[|X|\big] \leq \sigma\sqrt{2\pi}$$

である.

Proof. 命題 1.31 と補題 5.6 より, $t > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[|X|^k\big] &= \int_0^\infty \mathsf{Pr}(|X| > t^{1/k})\,\mathrm{d}t \qquad (\because \text{命題 } 1.31) \\
&\le 2\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t^{2/k}}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}t \qquad (\because \text{補題 } 5.6) \\
&= (2\sigma^2)^{k/2} k \int_0^\infty e^{-u} u^{(k/2)-1}\,\mathrm{d}u \qquad \left(\because u = \frac{t^{2/k}}{2\sigma^2} \text{ と変換}\right) \\
&= (2\sigma^2)^{k/2} k \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)
\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる. 2 番目の主張は, $\forall k \ge 2$ に対して

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \le \left(\frac{k}{2}\right)^{k/2}; \qquad k^{1/k} \le e^{1/e}$$

を用いると

$$\left\{(2\sigma^2)^{k/2} k \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right\}^{1/k} \le k^{1/k}\sqrt{\frac{2\sigma^2 k}{2}} \le e^{1/e}\sigma\sqrt{k}$$

となる. さらに, $k = 1$ に対しては

$$\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi}$$

よりわかる. □

補題 5.8. X を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{Pr})$ 上の確率変数で以下をみたすものとする.
(1) $\mathsf{E}[X] = 0$.
(2) $\forall t > 0$ に対して

$$\mathsf{Pr}(X \ge t) \le \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right); \qquad \mathsf{Pr}(X \le -t) \le \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right).$$

ただし, $\sigma > 0$ である. このとき, $\forall s > 0$ に対して

$$\mathsf{E}\big[e^{sX}\big] \le e^{4\sigma^2 s^2}$$

となる.

Proof. 指数関数に対する Taylor 展開を用いる.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}[e^{sX}] &\le 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k \mathsf{E}[|X|^k]}{k!} \\
&\le 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\sigma^2 s^2)^{k/2} k\Gamma(k/2)}{k!} \qquad (\because \text{補題 } 5.7) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\sigma^2 s^2)^{k} (2k)\Gamma(k)}{(2k)!} \\
&\quad\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\sigma^2 s^2)^{k+1/2} (2k+1)\Gamma(k+1/2)}{(2k+1)!} \\
&\le 1 + \bigl(2 + \sqrt{2\sigma^2 s^2}\bigr) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\sigma^2 s^2)^{k} k!}{(2k)!} \\
&\quad\quad \bigl(\because\ 2(k!)^2 \le (2k)!\bigr) \\
&= 1 + \left(1 + \sqrt{\frac{\sigma^2 s^2}{2}}\right)\left(e^{2\sigma^2 s^2} - 1\right) \\
&= e^{2\sigma^2 s^2} + \sqrt{\frac{\sigma^2 s^2}{2}}\bigl\{e^{2\sigma^2 s^2} - 1\bigr\} \\
&\le e^{4\sigma^2 s^2}
\end{aligned}
$$

からわかる. □

注意 5.9. 補題 5.8 の証明の最後の不等式は以下からわかる. $x > 0$ に対して, $x = 2\sigma^2 s^2$ とおいて考える.

$$
\begin{aligned}
e^{2x} \ge e^x + \sqrt{\frac{x}{4}}(e^x - 1) \ &\Leftrightarrow\ e^x \ge 1 + \sqrt{\frac{x}{4}}(1 - e^{-x}) \qquad (\because \text{両辺 } e^{-x} \text{ をかけた}) \\
&\Leftrightarrow\ e^x + e^{-x}\sqrt{\frac{x}{4}} \ge 1 + \sqrt{\frac{x}{4}}
\end{aligned}
$$

となる. 最後の不等式はほとんど明らかだが, どのように評価してよいか思いつかない. □

命題 5.10. $X \in \mathsf{\Gamma}(\nu,\, c)\,(\nu > 0,\, c > 0)$ とする. このとき, 任意の $t > 0$ に対して

$$
\mathsf{Pr}\bigl(X > \sqrt{2\nu t} + ct\bigr) \le e^{-t}, \qquad \mathsf{Pr}\bigl(-X > \sqrt{2\nu t} + ct\bigr) \le e^{-t},
$$

が成り立つ.

Proof. $\Phi_X(\lambda) \le \dfrac{\nu\lambda^2}{2(1-c\lambda)}$ から, $0 < \lambda < c^{-1}$ に対して

$$t\lambda - \Phi_X(\lambda) \ge t\lambda - \frac{\nu\lambda^2}{2(1-c\lambda)}$$

となることに注意する.

$$\begin{aligned}\Phi_X^\vee(t) &= \sup_{\lambda\ge 0}\bigl\{t\lambda - \Phi_X(\lambda)\bigr\}\\ &\ge \sup_{\lambda\in(0,\,1/c)}\bigl\{t\lambda - \Phi_X(\lambda)\bigr\}\\ &\ge \sup_{\lambda\in(0,\,1/c)}\left(t\lambda - \frac{\nu\lambda^2}{2(1-c\lambda)}\right) = \frac{\nu}{c^2}g\left(\frac{ct}{\nu}\right)\end{aligned}$$

となる[3]. ただし

$$g(u) = 1 + u - \sqrt{1+2u} \qquad (u \ge 0)$$

である. □

補題 5.11. $0 < b \le \infty$ とする. $\Phi : [0,\, b) \longrightarrow [0,\, \infty)$ は凸関数で $[0,\, b)$ 上で微分可能で $\Phi(0) = \dot{\Phi}(0) = 0$ をみたすものとする. 任意の $t \ge 0$ に対して

$$\Phi^\vee(t) = \sup_{\lambda\in[0,\,b)}\bigl\{\lambda t - \Phi(\lambda)\bigr\}$$

とおく. このとき, $\Phi^\vee$ は $(0,\, \infty)$ 上の正値, 狭義増加かつ凸関数で, $\Phi^\vee(0) = 0$ と

$$\{\Phi^\vee\}^{-1}(y) = \inf_{\lambda\in(0,\,b)}\left[\frac{y + \Phi(\lambda)}{\lambda}\right] \tag{5.3}$$

となる.

---

[3]

$$f_t(\lambda) = t\lambda - \frac{\nu\lambda^2}{2(1-c\lambda)}$$

とおく. すると

$$\dot{f}_t(\lambda) = t - \frac{\lambda\nu}{1-c\lambda} - \frac{c\nu\lambda^2}{2(1-c\lambda)^2} = 0$$

を解けばよい.

Proof. ① $\Phi^\vee(0)=0$ の証明: まず, 仮定から Φ は非減少関数で, $[0,\,b)$ 上で非負である. すると $\Phi^\vee(0)$ は 0 を含む非正値関数の最大なので, $\Phi^\vee(0)=0$ がわかる.
② $\Phi^\vee$ の凸性の証明:
③ $\Phi^\vee$ の狭義単調増加性の証明:
④ (5.3) の証明:

$$u := \inf_{\lambda\in(0,\,b)}\left[\frac{y+\Phi(\lambda)}{\lambda}\right]$$

とおく. 任意の $t\geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} u\geq t \ &\Leftrightarrow\ \frac{y+\Phi(\lambda)}{\lambda}\geq t \quad (\forall\lambda\in(0,\,b)) \\ &\Leftrightarrow\ y\geq \lambda t-\Phi(\lambda) \quad (\forall\lambda\in(0,\,b)) \\ &\Leftrightarrow\ y\geq \sup_{\lambda\in(0,\,b)}\Big\{\lambda t-\Phi(\lambda)\Big\}=\Phi^\vee(t) \end{aligned}$$

を得る. 一方, $\Phi^\vee$ の右逆関数 $\{\Phi^\vee\}^{\leftarrow}$ の定義と $u\geq t$ に注意すると

$$\{\Phi^\vee\}^{\leftarrow}(y)=\sup\big\{t\geq 0;\ \Phi^\vee(t)\leq y\big\}=u$$

となる. さらに, $\Phi^\vee$ は狭義単調増加なので, 逆関数を持つので, 逆関数は右逆関数に一致するので

$$\{\Phi^\vee\}^{-1}(y)=u$$

がわかる. □

命題 5.12. $b>0$ とする. $Z_1,\,Z_2,\,\ldots,\,Z_N$ は確率変数列で, $\forall\lambda\in(0,\,b)$ に対して

$$\Phi_{Z_j}(\lambda)\leq\Phi(\lambda) \qquad (j=\{1,\,2,\,\ldots,\,N\})$$

をみたすとする. ただし, Φ は微分可能な凸関数で $\Phi(0)=\dot{\Phi}(0)=0$ をみたすのものある. このとき

$$\mathsf{E}\left[\max_{j=1,\,2,\,\ldots,\,N} Z_j\right]\leq\{\Phi^\vee\}^{-1}(\log N)$$

が成り立つ.

Proof. 任意の $\lambda\in(0,\,b)$ に対して

$$\exp\left(\lambda\mathsf{E}\left[\max_{j=1,\,2,\,\ldots,\,N} Z_j\right]\right)\leq\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}\big[\exp(\lambda Z_j)\big]\leq N\exp\big(\Phi(\lambda)\big)$$

となる. この不等式の辺々に対数をとると

$$\lambda \mathsf{E}\left[\max_{j=1,2,\dots,N} Z_j\right] \le \log N + \Phi(\lambda)$$

を得る. $\lambda \in (0, b)$ は任意だったことと (5.3) に注意すると

$$\mathsf{E}\left[\max_{j=1,2,\dots,N} Z_j\right] \le \inf_{\lambda\in(0,b)}\left[\frac{\log N + \Phi(\lambda)}{\lambda}\right] = \left\{\Phi^{\vee}\right\}^{-1}(\log N)$$

を得る. □

5.1.4 Hoeffding の不等式

補題 5.13. (Hoeffding の補題) X を確率変数で $\mathsf{E}[X]=0$ とし, ほとんど確実に $X \in [a, b]$ とする. ただし, $a<b$ である. このとき, $\forall s \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathsf{E}[e^{sX}] \le \exp\left(\frac{s^2}{8}(b-a)^2\right)$$

が成立する. 特に, $X \sim \mathsf{subG}\left(\frac{(b-a)^2}{4}\right)$ である.

Proof. $\Phi_X(s) := \log \mathsf{E}\left[e^{sX}\right]$ $(s\in\mathbb{R})$ とする. このとき

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_X(s) &:= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Phi_X(s) = \frac{\mathsf{E}[Xe^{sX}]}{\mathsf{E}[e^{sX}]}; \\ \ddot{\Phi}_X(s) &:= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\Phi_X(s) = \frac{\mathsf{E}[X^2e^{sX}]}{\mathsf{E}[e^{sX}]} - \left\{\frac{\mathsf{E}[Xe^{sX}]}{\mathsf{E}[e^{sX}]}\right\}^2 \end{aligned} \tag{5.4}$$

となる. しかし, ほとんど確実に $X \in [a, b]$ なので

$$\mathsf{Var}[X] = \mathsf{Var}\left[X - \frac{a+b}{2}\right] \le \mathsf{E}\left[\left(X-\frac{a+b}{2}\right)^2\right] \le \frac{(b-a)^2}{4}$$

となる．このこととキュムラント関数の性質[4]から

$$\ddot{\Phi}_X(s) \le \frac{(b-a)^2}{4}$$

である．ここで, $\Phi_X(0) = \log 1 = 0$ および $\dot{\Phi}_X(0) = \mathsf{E}[X] = 0$ に注意すれば

$$\begin{aligned}
\Phi_X(s) &= \Phi_X(s) - \Phi_X(0) = \int_0^s \dot{\Phi}_X(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^s \left\{ \dot{\Phi}_X(u) - \dot{\Phi}_X(0) \right\} \mathrm{d}u \\
&= \int_0^s \left\{ \int_0^u \ddot{\Phi}_X(r)\,\mathrm{d}r \right\} \mathrm{d}u = \int_0^s \int_0^u \ddot{\Phi}_X(r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}u \\
&\le \frac{(b-a)^2}{4} \int_0^s \int_0^u \mathrm{d}r\,\mathrm{d}u = \frac{(b-a)^2}{4} \int_0^s u\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{(b-a)^2}{8} s^2
\end{aligned}$$

を得る． □

命題 5.14. (Hoeffding の不等式) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立な確率変数列で, ほとんと確実に $X_j \in [a_j, b_j]\,(a_j < b_j;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ とする．

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$$

としたとき, $\forall t > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathsf{Pr}\big(\overline{X} - \mathsf{E}[\overline{X}] \ge t\big) &\le \exp\left(-\frac{2n^2t^2}{\sum_{j=1}^n (b_j - a_j)^2} \right), \\
\mathsf{Pr}\big(\overline{X} - \mathsf{E}[\overline{X}] \le -t\big) &\le \exp\left(-\frac{2n^2t^2}{\sum_{j=1}^n (b_j - a_j)^2} \right)
\end{aligned}$$

を得る．

[4] X の p.d.f./p.m.f. を p としたとき, $\mathsf{q}_s(x) = e^{sx-\kappa(s)}\mathsf{p}(x)$ は指数型分布族となる．ただし, $\kappa(s) = \int_a^b e^{-sx}\mathsf{p}(x)\,\mathrm{d}x$(連続型の場合) である．この分布に従う確率変数を $\widetilde{X}$ と記す．すると (5.4) と指数型分布族の性質から

$$\ddot{\Phi}_X(s) = \ddot{\kappa}(x) = \mathsf{Var}[\widetilde{X}]$$

となる．一方, $\mathsf{Pr}(a \le \widetilde{X} \le b) = 1$ であることと関数 $[a, b] \ni x \mapsto \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \in \mathbb{R}$ は端点のいずれかで最大となる．その値はいずれも $(b-a)^2/4$ である．よって

$$\mathsf{Var}[\widetilde{X}] \le \mathsf{Var}\left[\widetilde{X} - \frac{a+b}{2} \right] \le \frac{(b-a)^2}{4}$$

からわかる．したがって, $\ddot{\Phi}_X(s) \le \dfrac{(b-a)^2}{4}$ がわかる．

Proof. $Y_j = X_j - \mathsf{E}[X_j]\,(j = 1, 2, \ldots, n)$ とおく．すると $Y_j \in \bigl[a_j - \mathsf{E}[X_j],\, b_j - \mathsf{E}[X_j]\bigr]$ かつ $\mathsf{E}[Y_j] = 0$ となる．ここで $Y_j\,(j = 1, 2, \ldots, n)$ に対して補題 5.13 を適用すると

$$\mathsf{E}\bigl[e^{sY_j}\bigr] \le \exp\biggl(\frac{s^2}{8}(b_j - a_j)^2\biggr) \tag{5.5}$$

を得る．よって

$$\begin{aligned}
\mathsf{Pr}\bigl(\overline{X} - \mathsf{E}[\overline{X}] \ge t\bigr) &= \mathsf{Pr}\biggl(\sum_{j=1}^n Y_j \ge nt\biggr) = \mathsf{Pr}\biggl(\exp\biggl(s\sum_{j=1}^n Y_j\biggr) \ge e^{nst}\biggr)\\
&\le \mathsf{E}\biggl[\exp\biggl(s\sum_{j=1}^n Y_j\biggr)\biggr]e^{-nst}\\
&\qquad (\because \text{Markov の不等式 (命題 1.32)})\\
&= \prod_{j=1}^n \mathsf{E}[\exp(sY_j)]e^{-nst}\\
&\le \prod_{j=1}^n \exp\biggl(\frac{s^2}{8}(b_j - a_j)^2\biggr)e^{-nst} \qquad (\because (5.5))\\
&= \exp\biggl(\frac{s^2}{8}\sum_{j=1}^n (b_j - a_j)^2 - nst\biggr)\\
&= \exp\biggl\{\frac{\sum_{j=1}^n (b_j - a_j)^2}{8}\biggl(s - \frac{4nt}{\sum_{j=1}^n (b_j - a_j)^2}\biggr)^2\\
&\qquad - \frac{2n^2t^2}{\sum_{j=1}^n (b_j - a_j)^2}\biggr\}
\end{aligned}$$

を得る．ここで

$$s = \frac{4nt}{\sum_{j=1}^n (b_j - a_j)^2}$$

とおくと

$$\mathsf{Pr}\bigl(\overline{X} - \mathsf{E}[\overline{X}] \ge t\bigr) \le \exp\biggl(-\frac{2n^2t^2}{\sum_{j=1}^n (b_j - a_j)^2}\biggr)$$

を得る． □

注意 5.15 (Chernoff-Okamoto の不等式)**.** $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathsf{Ber}(p)\,(0 < p < 1)$ とする．$\overline{X} = n^{-1}\sum_{j=1}^n X_j$ とおくと $n\overline{X} \sim \mathsf{Bino}(n, p)$ となる．命題 5.14 から, $t > 0$ に対して

$$\mathsf{Pr}\bigl(\overline{X} \ge p + t\bigr) \le \exp\bigl(-2nt^2\bigr)$$

を得る.

たとえば, $p = \dfrac{1}{2}$ とすると

$$\mathsf{Pr}(n\overline{X} = n) = \mathsf{Pr}(n\overline{X} \geq n) = \mathsf{Pr}\left(\overline{X} - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}\right) \leq \exp\left(-\frac{n}{2}\right)$$

となる. また

n	2	10	20
$\mathsf{Pr}(X = n)$	0.25	0.00098	9.54×10^{-7}
$\exp(-n/2)$	0.37	0.00674	4.54×10^{-5}

$$\mathsf{Pr}(n\overline{X} \geq \frac{n3}{4}) = \mathsf{Pr}\left(\overline{X} - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}\right) \leq \exp\left(-\frac{n}{8}\right)$$

である. □

5.1.5 Bennett の不等式

命題 5.16 (Bennett の不等式)**.** $b > 0$ を定数とし, $\phi(u) = e^u - u - 1\,(n \in \mathbb{R})$ とする. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立な確率変数列で, $X_j \leq b\,(j = 1, 2, \ldots, n)$ とする.

$$v = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}\left[X_j^2\right] \quad と \quad S = \sum_{j=1}^{n} \left\{X_j - \mathbb{E}[X_j]\right\}$$

とおく. このとき

$$\Phi_S(\lambda) = \log \mathsf{E}\left[e^{\lambda S}\right] \leq \frac{v}{b^2}\phi(b\lambda) \qquad (\lambda \geq 0) \tag{5.6}$$

が成り立つ. さらに, $\forall t \geq 0$ に対して

$$\mathsf{Pr}\big(S \geq t) \leq \exp\left\{-\frac{v}{b^2}h\left(\frac{tb}{v}\right)\right\} \tag{5.7}$$

が成り立つ. ただし, $h(x) = (1 + x)\log(1 + x) - x\,(x > 0)$ である.

Proof. ① (5.6) の証明: X_j/b を X_j とすることで $b = 1$ とできる. 関数 $u \mapsto \dfrac{\phi(u)}{u^2}$ は $\mathbb{R}$ 上の減少関数である. $X_j \leq 1\,(j = 1, 2, \ldots, n)$ なので $\lambda X_j \leq \lambda$ であることに注意すると

$$\frac{e^{\lambda X_j} - (\lambda X_j) - 1}{(\lambda X_j)^2} \leq \frac{e^{\lambda} - \lambda - 1}{\lambda^2} \Rightarrow e^{\lambda X_j} - \lambda X_j - 1 \leq X_j^2(e^{\lambda} - \lambda - 1)$$

を得る．この不等式の両辺の期待値を取ると

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}\big[e^{\lambda X_j}\big]-\lambda\mathsf{E}[X_j]-1\le\mathsf{E}\big[X_j^2\big]\phi(\lambda)\\ &\qquad\Rightarrow\ \mathsf{E}\big[e^{\lambda X_j}\big]\le 1+\lambda\mathsf{E}[X_j]+\mathsf{E}\big[X_j^2\big]\phi(\lambda)\end{aligned}$$

がわかる．さらに, 上の不等式の両辺に対数をとると

$$\Phi_{X_j}(\lambda)=\log\mathsf{E}[e^{\lambda X_j}]\le\log\Big(1+\lambda\mathsf{E}[X_j]+\mathsf{E}[X_j^2]\phi(\lambda)\Big)$$

を得る．このとき

$$\begin{aligned}\Phi_S(\lambda)&=\log\mathsf{E}\big[e^{\lambda S}\big]=\log\left(\prod_{j=1}^n\mathsf{E}\big[\exp\big\{\lambda\big(X_j-\mathsf{E}[X_j]\big)\big\}\big]\right)\\ &=\sum_{j=1}^n\log\mathsf{E}\big[\exp\big\{\lambda\big(X_j-\mathsf{E}[X_j]\big)\big\}\big]\\ &=\sum_{j=1}^n\log\Big(\mathsf{E}\big[\exp\{\lambda X_j\}\big]\exp\{-\lambda\mathsf{E}[X_j]\}\Big)\\ &=\sum_{j=1}^n\Big(\log\mathsf{E}\big[\exp\{\lambda X_j\}\big]-\lambda\mathsf{E}[X_j]\Big)\\ &=\sum_{j=1}^n\Big(\Phi_{X_j}(\lambda)-\lambda\mathsf{E}[X_j]\Big)\\ &\le\sum_{j=1}^n\left\{\log\Big(1+\lambda\mathsf{E}[X_j]+\mathsf{E}[X_j^2]\phi(\lambda)\Big)-\lambda\mathsf{E}[X_j]\right\}\\ &\le\sum_{j=1}^n\mathsf{E}[X_j^2]\phi(\lambda)\qquad\big(\because\log(1+y)\le y\,(y>-1)\big)\\ &=v\phi(\lambda)\end{aligned}$$

となる．あとは, $X_j\to\dfrac{X_j}{b}$; $\lambda\to b\lambda$ と置き換えればよい．
<u>② (5.7) の証明</u>: $\lambda\ge 0$ に対して

$$\begin{aligned}\mathsf{Pr}\big(S\ge t\big)&=\mathsf{Pr}\big(e^{\lambda S}\ge e^{\lambda t}\big)\le e^{-\lambda t}\mathsf{E}\big[e^{\lambda S}\big]=\exp\left\{-\Big(\lambda t-\Phi_S(\lambda)\Big)\right\}\\ &\le\exp\left\{-\left(\lambda t-\frac{v}{b^2}\phi(b\lambda)\right)\right\}\end{aligned}$$

となる．最後の不等号は (5.6) からわかる．$\lambda\,(\ge 0)$ は任意だったので

$$\mathsf{Pr}\big(S\ge t\big)\le\exp\left\{-\sup_{\lambda\ge 0}\left(\lambda t-\frac{v}{b^2}\phi(b\lambda)\right)\right\}$$

となる. いま

$$g(t) := \lambda t - \frac{v}{b^2}\phi(b\lambda)$$

とおく. すると

$$\dot{g}(t) = t - \frac{v}{b^2}\big(be^{b\lambda} - b\big) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{b}\log\left(1 + \frac{bt}{v}\right)$$

となるので

$$\begin{aligned}
&\sup_{\lambda \geq 0}\left(\lambda t - \frac{v}{b^2}\phi(b\lambda)\right) \\
&\quad = \frac{t}{b}\log\left(1 + \frac{bt}{v}\right) - \frac{v}{b^2}\phi\left\{\log\left(1 + \frac{bt}{v}\right)\right\} \\
&\quad = \frac{t}{b}\log\left(1 + \frac{bt}{v}\right) - \frac{v}{b^2}\left\{\left(1 + \frac{bt}{v}\right) - \log\left(1 + \frac{bt}{v}\right) - 1\right\} \\
&\quad = \frac{t}{b}\log\left(1 + \frac{bt}{v}\right) \\
&\quad = \frac{v}{b^2}\left\{\left(1 + \frac{bt}{v}\right)\log\left(1 + \frac{bt}{v}\right) - \frac{bt}{v}\right\} \\
&\quad = \frac{v}{b^2}h\left(\frac{bt}{v}\right)
\end{aligned}$$

となるので

$$\mathsf{Pr}\big(S \geq t) \leq \exp\left\{-\frac{v}{b^2}h\left(\frac{bt}{v}\right)\right\}$$

がわかる. □

5.2 分散不等式

5.2.1 Efron-Stein の不等式

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を独立な確率変数列とし, $Z := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とする. すると, 独立性から $\mathsf{E}[Z^2] < \infty$ のとき

$$\mathsf{Var}[Z] = \sum_{j=1}^{\infty}\mathsf{Var}[X_j] \tag{5.8}$$

が成立する.

いま, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ を可測関数とし, $Z = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ とする. Efron-Stein の不等式は, (5.8) に対応する $\mathsf{Var}[Z]$ の上限を与えるものである.

定理 5.17 (Efron-Stein の不等式)**.** $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を独立な確率変数列とし, $Z = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ とする. ただし, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ を可測関数である. さらに, $\mathsf{E}[Z^2] < \infty$ を仮定する. このとき

$$\mathsf{Var}[Z] \le \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}\big[\mathsf{Var}^{(j)}[Z]\big]$$

が成り立つ. ただし, $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\begin{aligned}\mathsf{E}^{(j)}[\,\cdot\,] &= \mathsf{E}[\,\cdot \,|\, X_1, X_2, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_n],\\ \mathsf{Var}^{(j)}[Z] &= \mathsf{E}^{(j)}\big[\big(Z - \mathsf{E}^{(j)}[Z]\big)^2\big]\end{aligned}$$

である.

Proof. $\mathsf{E}_0[\,\cdot\,] = \mathsf{E}[\,\cdot\,]$ とし, $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\mathsf{E}_j[\,\cdot\,] = \mathsf{E}\big[\,\cdot\,\big|\, X_1, X_2, \ldots, X_j\big]$$

とし

$$\Delta_j = \mathsf{E}_j[Z] - \mathsf{E}_{j-1}[Z]$$

とおく. すると

$$\begin{aligned}Z - \mathsf{E}[Z] &= \big(\underbrace{\mathsf{E}_n[Z]}_{=Z} - \mathsf{E}_{j-1}[Z]\big) + \big(\mathsf{E}_{j-1}[Z] - \mathsf{E}_{j-2}[Z]\big) + \cdots\\ &\qquad + \big(\mathsf{E}_1[Z] - \underbrace{\mathsf{E}_0[Z]}_{=\mathsf{E}[Z]}\big)\\ &= \sum_{j=1}^{n} \Delta_j\end{aligned}$$

と書ける. これより

$$\mathsf{Var}[Z] = \mathsf{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} \Delta_j\right)^2\right] = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}\big[\Delta_j^2\big] + 2\sum_{\ell > j} \mathsf{E}\big[\Delta_j \Delta_\ell\big] \tag{5.9}$$

となる. $\ell > j$ のとき

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_j[\Delta_\ell] &= \mathsf{E}\big[\mathsf{E}_\ell[Z] - \mathsf{E}_{\ell-1}[Z]\big|\, X_1, X_2, \ldots, X_j\big]\\ &= \mathsf{E}\big[\mathsf{E}_\ell[Z]\big|\, X_1, X_2, \ldots, X_j\big] - \mathsf{E}\big[\mathsf{E}_{\ell-1}[Z]\big|\, X_1, X_2, \ldots, X_j\big]\\ &= \mathsf{E}\Big[\mathsf{E}\big[Z\big|\, X_1, X_2, \ldots, X_\ell\big]\Big|\, X_1, X_2, \ldots, X_j\Big]\\ &\qquad - \mathsf{E}\Big[\mathsf{E}\big[Z\big|\, X_1, X_2, \ldots, X_{\ell-1}\big]\Big|\, X_1, X_2, \ldots, X_j\Big]\\ &= \mathsf{E}\big[Z\big|\, X_1, X_2, \ldots, X_j\big] - \mathsf{E}\big[Z\big|\, X_1, X_2, \ldots, X_j\big]\\ &\qquad (\because \text{ towering property})\\ &= 0\end{aligned}$$

となる. 上の式から, $\ell > j$ のとき

$$\mathsf{E}_j\bigl[\Delta_\ell \Delta_j\bigr] = \Delta_j \mathsf{E}_j[\Delta_\ell] = 0$$

がわかる. 再度, towering property を用いると

$$\mathsf{E}\bigl[\Delta_j \Delta_\ell\bigr] = \mathsf{E}\Bigl[\mathsf{E}\bigl[\Delta_j \Delta_\ell \bigm| X_1, X_2, \ldots, X_j\bigr]\Bigr] = \mathsf{E}\Bigl[\mathsf{E}_j\bigl[\Delta_j \Delta_\ell\bigr]\Bigr] = 0 \quad (5.10)$$

がわかる. (5.10) を (5.9) に代入すると

$$\mathsf{Var}[Z] = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}\bigl[\Delta_j^2\bigr]$$

を得る.

次に

$$\Delta_j = \mathsf{E}_j[Z] - \mathsf{E}_{j-1}[Z] = \mathsf{E}_j[Z] - \mathsf{E}_j\bigl[\mathsf{E}^{(j)}[Z]\bigr] = \mathsf{E}_j\Bigl[Z - \mathsf{E}^{(j)}[Z]\Bigr]$$

と書きかえて, Jensen の不等式を用いると

$$\Delta_j^2 = \biggl\{\mathsf{E}_j\Bigl[Z - \mathsf{E}^{(j)}[Z]\Bigr]\biggr\}^2 \le \mathsf{E}_j\Bigl[\bigl\{Z - \mathsf{E}^{(j)}[Z]\bigr\}^2\Bigr]$$

を得る. したがって

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\bigl[\Delta_j^2\bigr] &\le \mathsf{E}\Bigl[\mathsf{E}_j\bigl[\bigl\{Z - \mathsf{E}^{(j)}[Z]\bigr\}^2\bigr]\Bigr] \\
&= \mathsf{E}\Bigl[\bigl\{Z - \mathsf{E}^{(j)}[Z]\bigr\}^2\Bigr] \qquad \bigl(\because \text{ towering property}\bigr) \\
&= \mathsf{E}\Bigl[\mathsf{E}^{(j)}\Bigl[\bigl\{Z - \mathsf{E}^{(j)}[Z]\bigr\}^2\Bigr]\Bigr] \qquad \bigl(\because \text{ towering property}\bigr) \\
&= \mathsf{E}\Bigl[\mathsf{Var}^{(j)}[Z]\Bigr]
\end{aligned}$$

がわかる. よって, 定理は証明された. □

5.3 Orlicz ノルム

定義 5.18. $\Phi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ は狭義凸関数で $\Phi(0) = 0$ かつ $\lim_{x \to \infty} \Phi(x) = \infty$ とする[5]. 確率変数 X の Orlicz **ノルム** $\|X\|_\Phi$ を

$$\|X\|_\Phi := \inf\biggl\{c > 0;\ \mathsf{E}\biggl[\Phi\biggl(\frac{|X|}{c}\biggr)\biggr] \le 1\biggr\} \quad (5.11)$$

[5] したがって, Φ は狭義単調増加でもある.

で定める．また

$$\left\{c>0;\ \mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|X|}{c}\right)\right]\le 1\right\}=\varnothing \Leftrightarrow \|X\|_\Phi=\infty$$

と約束する．

命題 5.19. $a\in\mathbb{R}$ を定数, X, Y を確率変数とする．以下が成立する．
(1) $\|X\|_\Phi\ge 0$. さらに, $\|X\|_\Phi=0 \Leftrightarrow X=0$ a.s..
(2) $\|aX\|_\Phi=|a|\|X\|_\Phi$.
(3) $\|X+Y\|_\Phi\le\|X\|_\Phi+\|Y\|_\Phi$.

Proof. (2) の証明: 任意の実数 a に対して

$$\begin{aligned}\|af\|_\Phi&=\inf\left\{c>0;\ \mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|aX|}{c}\right)\right]\le 1\right\}\\&=\inf\left\{\frac{c}{|a|}>0;\ \mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|aX|}{c/|a|}\right)\right]\le 1\right\}\\&=\inf\left\{\frac{c}{|a|}>0;\ \mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|X|}{c}\right)\right]\le 1\right\}\\&=|a|\ \inf\left\{c>0;\ \mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|X|}{c}\right)\right]\le 1\right\}\\&=|a|\|X\|_\Phi\end{aligned}$$

からわかる．
(1) の証明: $X=0$ ならば, $\|X\|_\Phi=0$ は明らかである．$\|X\|_\Phi=0$ ならば, $X=0$, a.s. を示すために, 背理法を用いる．すなわち, $\mathsf{Pr}\big(|X|>a\big)>0$ をみたす $a>0$ の存在を仮定して矛盾を導こう．$A:=\{\omega\in\Omega;\ |X(\omega)|>a\}$ とおく．任意の $c>0$ に対して

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|X|}{c}\right)\right]&=\mathsf{E}\left[\Phi\Bigg(\underbrace{\frac{|X|}{c}}_{\ge\frac{a}{c}}\Bigg)\mathbb{1}_A(X)\right]+\underbrace{\mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|X|}{c}\right)\mathbb{1}_{A^c}(X)\right]}_{\ge 0}\\&\ge\Phi\left(\frac{a}{c}\right)\mathsf{E}[\mathbb{1}_A(X)]\\&=\Phi\left(\frac{a}{c}\right)\mathsf{Pr}\big(|X|>a\big)\end{aligned}\tag{5.12}$$

が成立する．一方, $\|X\|_\Phi=0$ と (2) から, 任意の $c>0$ に対して

$$0=\frac{1}{|c|}\|X\|_\Phi=\|X/c\|_\Phi=\inf\left\{c>0;\ \mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|X|}{c}\right)\right]\le 1\right\}$$

がわかる．よって, $\forall c > 0$ に対して

$$\mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|X|}{c}\right)\right] \leq 1 \tag{5.13}$$

が成り立つ．(5.12) と (5.13) から

$$\Phi\left(\frac{a}{c}\right)\mathsf{Pr}\big(|X| > a\big) \leq 1 \tag{5.14}$$

が成立することがわかる．しかし, (5.14) の左辺の項は $a \to 0$ のとき, $\Phi(\infty) = \infty$ かつ $\mathsf{Pr}\big(|X| > a\big) > 0$ なので, (5.14) の左辺は発散する．よって, 矛盾が生じるので, $\|X\|_\Phi = 0$ ならば $X = 0$, a.s. が示せた．

③ の証明: $\|X\|_\Phi = 0$ または $\|Y\|_\Phi = 0$ のときは, 明らかだから, $\|X\|_\Phi > 0$ かつ $\|Y\|_\Phi > 0$ を仮定して, 証明すればよい．

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|X+Y|}{\|X\|_\Phi + \|Y\|_\Phi}\right)\right] \\
&\quad \leq \mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|X|}{\|X\|_\Phi + \|Y\|_\Phi} + \frac{|Y|}{\|X\|_\Phi + \|Y\|_\Phi}\right)\right] \\
&\qquad\quad (\because \Phi \text{ の単調増加性}) \\
&\quad = \mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{\|X\|_\Phi}{\|X\|_\Phi + \|Y\|_\Phi}\frac{|X|}{\|X\|_\Phi} + \frac{\|Y\|_\Phi}{\|X\|_\Phi + \|U\|_\Phi}\frac{|Y|}{\|Y\|_\Phi}\right)\right] \\
&\quad \leq \frac{\|X\|_\Phi}{\|X\|_\Phi + \|Y\|_\Phi}\mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|X|}{\|X\|_\Phi}\right)\right] \\
&\qquad\quad + \frac{\|Y\|_\Phi}{\|X\|_\Phi + \|Y\|_\Phi}\mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|Y|}{\|Y\|_\Phi}\right)\right] \qquad (\because \Phi \text{ の凸性}) \\
&\quad \leq 1 \qquad (\because (5.11))
\end{aligned}$$

がわかる．よって

$$\|X\|_\Phi + \|Y\|_\Phi \in \left\{c > 0;\ \mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{X+Y|}{c}\right)\right] \leq 1\right\}$$

となる．一方, $\|\cdot\|_\Phi$ の定義 (5.11) から

$$\|X+Y\|_\Phi = \inf\left\{c > 0;\ \mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|X+Y|}{c}\right)\right] \leq 1\right\}$$

であることに注意すると

$$\|X+Y\|_\Phi \leq \|X\|_\Phi + \|Y\|_\Phi$$

がわかる． □

補題 5.20. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, X を確率変数列とし, $\{|X_n|\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加列で $|X_n| \stackrel{\text{a.s.}}{\to} |X|\,(n\to\infty)$ とする．このとき

$$\|X_n\|_\Phi \xrightarrow{n\to\infty} \|X\|_\Phi$$

が成立する．

Proof. $\underline{\|X\|_\Phi < \infty \text{ の場合の証明}}$: 補題の仮定と Φ の単調性から

$$\|X_n\|_\Phi \le \|X\|_\Phi\,(n = 1, 2, \ldots) \tag{5.15}$$

となること[6]がわかる．すなわち $\{\|X_n\|_\Phi\}_{n=1}^{\infty}$ は有界単調列となる．これから, ある $s\in\mathbb{R}$ が存在して, $\|X_n\|_\Phi \xrightarrow{n\to\infty} s$ となる．(5.15) と合わせると $s \le \|X\|_\Phi$ がわかるので

$$s \ge \|X\|_\Phi \tag{5.16}$$

を示せば, $s = \|X\|_\Phi$ がわかる．$s = 0$ の場合, $X_n = 0\,(\text{a.s.}, n \ge 1)$ から $X = 0\,(\text{a.s.})$ となり, 不等式は成立するので, $s > 0$ として, 補題の主張を証明しよう．$\|X_n\|_\Phi < s$ とノルム $\|\cdot\|_\Phi$ の定義 (5.11) から

$$s \ge \|X_n\|_\Phi = \inf\left\{c > 0;\ \mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|X_n|}{c}\right)\right] \le 1\right\}$$

から

$$\mathsf{E}\left[\frac{|X_n|}{s}\right] \le 1$$

がわかる．ここで単調収束定理を用いると

$$1 \ge \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|X_n|}{s}\right)\right] = \mathsf{E}\left[\lim_{n\to\infty} \Phi\left(\frac{|X_n|}{s}\right)\right] = \mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|X|}{s}\right)\right]$$

を得る．すなわち

$$s \in \left\{c > 0;\ \mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|X|}{c}\right)\right] \le 1\right\} \tag{5.17}$$

である．再度, ノルム $\|\cdot\|_\Phi$ の定義 (5.11) と (5.17) に注意すると

$$s \ge \|X\|_\Phi = \inf\left\{c > 0;\ \mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|X|}{c}\right)\right] \le 1\right\}$$

[6] $|X_n| \le |X|\,(\text{a.s.})$ とノルム $\|\cdot\|_\Phi$ の定義から $\Phi\left(\frac{|X|}{\|X_n\|_\Phi}\right) \ge 1 \ge \Phi\left(\frac{|X_n|}{\|X_n\|_\Phi}\right)$ である．一方, ノルム $\|\cdot\|_\Phi$ の定義から $\Phi\left(\frac{|X|}{\|X\|_\Phi}\right) \le 1$ なので, $\Phi\left(\frac{|X|}{\|X_n\|_\Phi}\right) \ge \Phi\left(\frac{|X|}{\|X\|_\Phi}\right)$ となる．関数 Φ の単調性から, $\frac{|X|}{\|X_n\|_\Phi} \ge \frac{|X|}{\|X\|_\Phi} \Rightarrow \|X\|_\Phi \ge \|X_n\|_\Phi$ がわかる．

がわかる．よって, (5.16) が示せたので, この場合について補題の主張が確認できた．

$\|X\|_\Phi = \infty$ の場合の証明: $\|X_n\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ となることを示せばよい．数列 $\{\|X_n\|_\Phi\}_{n=1}^\infty$ は有界単調増加列と仮定して矛盾を導く．背理法の仮定から

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n\|_\Phi = s < \infty$$

とおくことができる．すると

$$\inf\left\{c > 0;\ \mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|X_n|}{c}\right)\right] \leq 1\right\} = \|X_n\|_\Phi \leq s$$

から

$$1 \geq \mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|X_n|}{s}\right)\right]$$

がわかる．ここで, 単調収束定理を用いると

$$\begin{aligned} 1 &\geq \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|X_n|}{s}\right)\right] = \mathsf{E}\left[\lim_{n\to\infty} \Phi\left(\frac{|X_n|}{s}\right)\right] = \mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{\lim_{n\to\infty}|X_n|}{s}\right)\right] \\ &= \mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|X|}{s}\right)\right] \end{aligned}$$

を得る．よって, ノルム $\|\cdot\|_\Phi$ の定義から

$$s \geq \|X\|_\Phi$$

となり, $\|X\|_\Phi$ は有限となる．このことは $\|X\|_\Phi = \infty$ の仮定と矛盾する．以上の議論から

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n\|_\Phi = \infty$$

がわかる．よって, 補題は証明された． □

補題 5.21. $\{X\}_{n=1}^\infty$, X を確率変数列とする．このとき

$$\|X_n\|_\Phi \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|X\|_\Phi < \infty \Rightarrow X_n \overset{\mathrm{P}}{\to} X$$

となる．

Proof. 補題を証明するために

$$\|X_n\|_\Phi \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow X_n \overset{\mathrm{P}}{\to} 0 \tag{5.18}$$

を示せばよいことに注意する．任意の $\delta > 0$ を取る．するとある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\forall n \geq N \Rightarrow \|X_n\|_\Phi \leq \delta$$

となる．ノルム $\|\cdot\|_\Phi$ の定義 (定義 5.18) から

$$\mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|X_n|}{\delta}\right)\right] \leq 1$$

がわかる．Φ は $[0,\infty)$ 上の狭義単調増加関数で $\lim_{x\to\infty}\Phi(x) = \infty$ なので，任意の $\epsilon > 0$ に対して，十分大きな $M > 0$ を取ると

$$\Phi(M) \geq \frac{1}{\epsilon}$$

とできる．$\|X_n\|_\Phi \leq \delta$ に注意すると

$$\begin{aligned}
1 &\geq \mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|X_n|}{\delta}\right)\right] \geq \mathsf{E}\left[\mathbb{1}_{(M\delta,\infty)}(|X_n|)\Phi\left(\frac{|X_n|}{\delta}\right)\right] \\
&\geq \mathsf{E}\left[\mathbb{1}_{(M\delta,\infty)}(|X_n|)\Phi\left(\frac{M\delta}{\delta}\right)\right] \geq \Phi(M)\mathsf{E}\left[\mathbb{1}_{(M\delta,\infty)}(|X_n|)\right] \\
&\geq \Phi(M)\mathsf{Pr}\big(|X_n| > M\delta\big)
\end{aligned}$$

から

$$\mathsf{Pr}\big(|X_n| > M\delta\big) \leq \epsilon$$

がわかる．$\delta > 0$ は任意だったので，$M\delta = \epsilon$ になるように取れば

$$\mathsf{Pr}\big(|X_n| > \epsilon\big) \leq \epsilon$$

がわかる．よって，補題は証明された． □

5.3.1 $\Phi_2(x) = e^{x^2} - 1$ の場合

例 5.22. $\Phi(x) = x^p\,(p \geq 1)$ のとき，L^p ノルムとなる．他の重要な例として，劣 Gauss 確率変数に対する $\Phi_2(x) = e^{x^2} - 1$ と劣指数確率変数に対する $\Phi_1(x) = e^x - 1$ がある．

例 5.23. $1 \leq p < \infty$ とし

$$\Phi_p(x) = e^{x^p} - 1 \qquad (x \geq 0) \tag{5.19}$$

とおく．すると

$$\Phi_p^{-1}(x) = \sqrt[p]{\log(1+x)}$$

となる．したがって

$$\Phi_p^{\vee}(x) = \sup_{y>0}\bigl\{xy - \Phi(y)\bigr\} = x\Phi^{-1}(x) - x = x\sqrt[p]{\log(1+x)} - x$$

となる． □

補題 5.24. (5.19) において，$p = 2$ を考える．確率変数 X に対して，$\|X\|_{\Phi_2} < \infty$ としたとき，$q = 1, 2, \ldots$ に対して

$$\bigl\{\mathsf{E}\bigl[|X|^{2q}\bigr]\bigr\}^{1/(2q)} \le \bigl(q!\bigr)^{1/(2q)}\bigl\|X\bigr\|_{\Phi_2} \tag{5.20}$$

が成り立つ．特に

$$\mathsf{E}\bigl[|X|\bigr] \le \|X\|_{\Phi_2}$$

が成り立つ．

Proof. ① $q \ge 1$ の場合の証明: まず

$$\Phi_2(x) = e^{x^2} - 1 = x^2 + \frac{x^4}{2} + \cdots > \frac{x^{2q}}{q!} \qquad (x > 0,\ q = 1, 2, \ldots)$$

に注意する．$c > 0$ に対して

$$\frac{1}{q!}\mathsf{E}\left[\left(\frac{|X|}{c}\right)^{2q}\right] < \mathsf{E}\left[\Phi_2\left(\frac{|X|}{c}\right)\right] \tag{5.21}$$

となる．$c = \dfrac{\bigl\{\mathsf{E}[|X|^{2q}]\bigr\}^{1/(2q)}}{q!}$ を (5.21) に代入すると

$$\mathsf{E}\left[\Phi_2\left(\frac{|X|}{\bigl\{\mathsf{E}[|X|^{2q}]\bigr\}^{1/(2q)}/q!}\right)\right] > 1$$

となる．したがって

$$\frac{\bigl\{\mathsf{E}[|X|^{2q}]\bigr\}^{1/(2q)}}{q!} \notin \left\{c > 0;\ \mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|X|}{c}\right)\right] \le 1\right\}$$

となる．この不等式とノルム $\|\cdot\|_{\Phi_2}$ の定義 (5.18) から

$$\frac{\bigl\{\mathsf{E}[|X|^{2q}]\bigr\}^{1/(2q)}}{(q!)^{1/(2q)}} \le \|X\|_{\Phi_2} = \inf\left\{c > 0;\ \mathsf{E}\left[\Phi_2\left(\frac{|X|}{c}\right)\right] \le 1\right\}$$

がわかる．

② $\mathsf{E}[|X|] \le \|X\|_{\Phi_2}$ の証明: Cauchy-Schwarz の不等式と ① の $q = 1$ の場合の不等式から

$$\mathsf{E}[|X|] \le \sqrt{\mathsf{E}[X^2]}\sqrt{\mathsf{E}[1]} = \sqrt{\mathsf{E}[X^2]} \le \|X\|_{\Phi_2}$$

がわかる． □

命題 5.25. X を確率変数とし, $p \geq 1$ とする. つぎの 2 つは同値である.
(1) $\|X\|_{\Phi_p} < \infty$.
(2) ある C, $K > 0$ が存在して

$$\mathsf{Pr}\big(|X| > t\big) \leq Ke^{-Ct^p} \qquad (\forall t > 0)$$

となる.

Proof. (1) ⇒ (2) の証明: $0 < \|X\|_{\Phi_p} < \infty$ として証明すればよい. $t > 0$ に対して

$$\begin{aligned}\mathsf{Pr}\big(|X| > t\big) &= \mathsf{Pr}\left(\Phi_p\left(\frac{|X|}{\|X\|_\Phi}\right) > \Phi_p\left(\frac{t}{\|X\|_\Phi}\right)\right) \\ &\leq \left\{\Phi_p\left(\frac{t}{\|X\|_\Phi}\right)\right\}^{-1} \mathsf{E}\left[\Phi_p\left(\frac{|X|}{\|X\|_\Phi}\right)\right] \qquad (\because \text{ Markov の不等式 (命題 1.32)}) \\ &\leq \left\{\Phi_p\left(\frac{t}{\|X\|_\Phi}\right)\right\}^{-1} \qquad (\because (5.11))\end{aligned}$$

となる. したがって

$$\mathsf{Pr}\big(|X| > t\big) \leq \min\left[1, \left\{\Phi_p\left(\frac{t}{\|X\|_\Phi}\right)\right\}^{-1}\right] \quad \leq 2\exp\left(-\frac{t^p}{\|X\|_{\Phi_p}^p}\right)$$

がわかる. 最後の不等号は, 任意の $u > 0$ に対して

$$\min\left[1, \frac{1}{\Phi_p(u)}\right] = \min\left[1, \frac{1}{e^{u^p} - 1}\right] \leq \frac{2}{e^{u^p}}$$

が成り立つこと[7]からわかる.

[7]任意の $0 < x < 1$ のとき

$$\min\left[1, \frac{1}{x-1}\right] = \frac{1}{x-1} \leq \frac{2}{x}$$

である. 一方, $1 \leq x < 2$ のとき

$$\min\left[1, \frac{1}{x-1}\right] = 1 \leq \frac{2}{x}$$

となる. $x > 2$ のとき

$$\min\left[1, \frac{1}{x-1}\right] = \frac{1}{x-1} \leq \frac{2}{x}$$

となる. 以上から

$$\min\left[1, \frac{1}{x-1}\right] \leq \frac{2}{x}$$

がわかる. あとは, 上の不等式に $x = e^{-u^p}$ を代入すればよい.

(2) ⇒ (1) の証明:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[\Phi_p\left(\frac{|X|}{c}\right)\right] &= \mathsf{E}\left[\exp\left(\frac{|X|^p}{c^p}\right)-1\right] \\
&= \mathsf{E}\left[\int_0^{\|X\|_{\Phi_p}} \frac{e^{s/c^p}}{c^p}\,\mathrm{d}s\right] \\
&= \int_0^\infty \mathsf{Pr}\big(|X|>s^{1/p}\big)\frac{e^{s/c^p}}{c^p}\,\mathrm{d}s \quad (\text{この等号の証明がわからない!}) \\
&\le \int_0^\infty Ke^{-Cs}\frac{e^{s/c^p}}{c^p}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{K}{c^p}\int_0^\infty \exp\left\{-\left(C-\frac{1}{c^p}\right)s\right\}\mathrm{d}s \\
&= \frac{K}{c^p}\frac{1}{C-\frac{1}{c^p}}
\end{aligned}
$$

となる．この不等式から

$$
c \ge \left(\frac{1+K}{C}\right)^{1/p}
$$

のとき

$$
\mathsf{E}\left[\Phi_p\left(\frac{|X|}{c}\right)\right] \le \frac{K}{c^p}\frac{1}{C-\frac{1}{c^p}} = \frac{K}{c^pC-1} \le \frac{K}{\frac{1+K}{C}C-1} = 1
$$

となる．したがって

$$
\left[\left(\frac{1+K}{C}\right)^{1/p},\infty\right] \subset \left\{c>0;\ \mathsf{E}\left[\Phi_p\left(\frac{|X|}{c}\right)\right]\le 1\right\}
$$

なので, ノルム $\|\cdot\|_{\Phi_2}$ の定義に注意すると

$$
\left(\frac{1+K}{C}\right)^{1/p} \ge \inf\left\{c>0;\ \mathsf{E}\left[\Phi_p\left(\frac{|X|}{c}\right)\right]\le 1\right\} = \|X\|_{\Phi_p}
$$

がわかる． □

つぎに Φ_2 に関する最大不等式を導出する．

定理 5.26. $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ を確率変数列 (独立でなくともよい) とする．このとき

$$
\left\|\sup_n \frac{|X_n|}{\Phi_2^{-1}(n)}\right\|_{\Phi_2} \le C\sup_n \|X_n\|_{\Phi_2}
$$

が成立する．$C>0$ は Φ_2 にのみ依存する定数である．

Proof. $\Phi_2(x) = e^{x^2} - 1\,(x \geq 0)$ から $\Phi_2^{-1}(x) = \sqrt{\log(1+x)}\,(x \geq 0)$ である．$X_n/\sup_n \|X\|_{\Phi_2}$ を考えることで, 一般性を失わず

$$\|X_n\|_{\Phi_2} \leq \sup_n \|X_n\|_{\Phi_2} = 1$$

と仮定してよい．すると

$$\begin{aligned}
\|X_n\|_{\Phi_2} \leq 1 &\Leftrightarrow \mathsf{E}\left[\Phi\left(\frac{|X_n|}{1}\right)\right] \leq 1 \\
&\Leftrightarrow \mathbb{E}\left[e^{X_n^2} - 1\right] \leq 1 \\
&\Leftrightarrow \mathbb{E}\left[e^{X_n^2}\right] \leq 2
\end{aligned} \tag{5.22}$$

がわかる．$t \geq \dfrac{3}{2}$ とする．$n \geq 18$ に対して

$$\frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log t} \leq \frac{1}{\log 18} + \frac{1}{\log(3/2)} \leq 3$$

となるので

$$3(\log n)(\log t) \geq \log n + \log t = \log(nt)$$

である．したがって

$$\begin{aligned}
\mathsf{Pr}\left(\exp\left\{\sup_{n\geq 18}\left(\frac{|X_n|}{\sqrt{6\log n}}\right)^2\right\} > t\right) &= \mathsf{Pr}\left(\sup_{n\geq 18}\frac{|X_n|}{\sqrt{6\log n}} > \sqrt{\log t}\right) \\
&= \mathsf{Pr}\left(\sup_{n\geq 18}\frac{|X_n|}{\sqrt{6(\log n)(\log t)}} > 1\right) \\
&\leq \sum_{n=18}^{\infty} \mathsf{Pr}\left(|X_n| > \sqrt{6(\log n)(\log t)}\right) \\
&\leq \sum_{n=18}^{\infty} \mathsf{Pr}\left(e^{X_n^2} > e^{6(\log n)(\log t)}\right) \leq \sum_{n=18}^{\infty} \frac{\mathsf{E}[e^{X_n^2}]}{e^{6(\log n)(\log t)}} \\
&\leq \sum_{n=18}^{\infty} \frac{2}{e^{6(\log n)(\log t)}} \leq \sum_{n=18}^{\infty} \frac{2}{e^{2logn + 2\log t}} \leq \sum_{n=18}^{\infty} \frac{2}{n^2t^2} \leq \frac{1}{4t^2}
\end{aligned}$$

がわかる．よって

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[\exp\left\{\sup_{n\geq 18}\left(\frac{|X_n|}{\sqrt{6\log n}}\right)^2\right\}\right] &= \int_0^\infty \mathsf{Pr}\left(\exp\left\{\sup_{n\geq 18}\left(\frac{|X_n|}{\sqrt{6\log n}}\right)^2\right\} > t\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{4t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{3/2} \frac{1}{4t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{3/2}^\infty \frac{1}{4t^2}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{3}{2} + \int_{3/2}^\infty \frac{1}{4t^2} < 2
\end{aligned}$$

がわかる. よって, (5.22) に注意すると

$$\left\| \sup_{n \geq 18} \frac{|X_n|}{\sqrt{6 \log n}} \right\|_{\Phi_2} \leq 1 = \sup_n \|X_n\|_{\Phi_2}$$

がわかる. よって

$$\begin{aligned} \left\| \sup_n \frac{|X_n|}{\Phi_2^{-1}(n)} \right\|_{\Phi_2} &= \left\| \sup_n \frac{|X_n|}{\sqrt{\log(1+n)}} \right\|_{\Phi_2} \leq \sqrt{6} \left\| \sup_n \frac{|X_n|}{\sqrt{6 \log n}} \right\|_{\Phi_2} \\ &= 18\sqrt{6} \sup_n \|X_n\|_{\Phi_2} \end{aligned}$$

がわかる. よって, 定理は証明された. □

系 5.27. $N \in \mathbb{N}$ とし, $\{X_n\}_{n=1}^N$ を確率変数列 (独立でなくともよい) とする. このとき

$$\left\| \max_{1 \leq n \leq N} |X_n| \right\|_{\Phi_2} \leq C \Phi_2^{-1}(N) \max_{1 \leq n \leq N} \|X_n\|_{\Phi_2}$$

が成り立つ. さらに, $q = 1, 2, \ldots$ に対して

$$\left(\mathsf{E}\left[\max_{1 \leq n \leq N} |X_n|^{2q} \right] \right)^{1/(2q)} \leq C' \sqrt{\log(1+N)} \max_{1 \leq n \leq N} \|X_n\|_{\Phi_2}$$

が成り立つ. ただし, $C > 0$ と C' は Φ_2 にのみ依存する定数である.

Proof. $X_n = X_N \, (n \geq N+1)$ とおくと定理 5.26 から

$$\begin{aligned} \left\| \max_{1 \leq n \leq N} |X_n| \right\|_{\Phi_2} &\leq \left\| \Phi_2^{-1}(N) \max_{1 \leq n \leq N} \frac{|X_n|}{\Phi_2^{-1}(n)} \right\|_{\Phi_2} \\ &= \Phi_2^{-1}(N) \left\| \max_{1 \leq n \leq N} \frac{|X_n|}{\Phi_2^{-1}(n)} \right\|_{\Phi_2} \\ &= \Phi_2^{-1}(N) \left\| \sup_n \frac{|X_n|}{\Phi_2^{-1}(n)} \right\|_{\Phi_2} \\ &\leq C \Phi_2^{-1}(N) \sup_n \|X_n\|_{\Phi_2} \\ &= C \Phi_2^{-1}(N) \max_{1 \leq n \leq N} \|X_n\|_{\Phi_2} \end{aligned}$$

を得る.

次に, (5.20) から

$$\begin{aligned} \left(\mathsf{E}\left[\max_{1 \leq n \leq N} |X_n|^{2q} \right] \right)^{2q} &\leq (q!) \left\| \max_{1 \leq n \leq N} |X_n| \right\|_{\Phi_2} \\ &\leq (q!) C \Phi_2^{-1}(N) \max_{1 \leq n \leq N} \|X_n\|_{\Phi_2} \\ &\leq C' \sqrt{\log(1+N)} \max_{1 \leq n \leq N} \|X_n\|_{\Phi_2} \end{aligned}$$

がわかる. □

節 ?? および節 ?? と同様の評価式を導出できるのでは? (2025/01/15)

注意 5.28. 劣 Gauss 性の仮定のもとではより精緻な評価が得られる. $X_1, X_2, \ldots, X_N$ を定数 $\nu\,(\nu > 0)$ の劣 Gauss 列とする. すなわち, $\lambda > 0$ に対して

$$\mathsf{E}\left[e^{\lambda X_j}\right] \leq \exp\left(\frac{\nu\lambda^2}{2}\right) \qquad (j = 1, 2, \ldots, N) \tag{5.23}$$

をみたす. このとき, $\forall t > 0$ と $\lambda > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathsf{Pr}\left(X_j > t\right) &= \mathsf{Pr}\left(e^{\lambda X_j} \geq e^{\lambda t}\right) \\
&\leq e^{-\lambda t}\mathsf{E}\left[e^{\lambda X_j}\right] \qquad (\because \text{Markov の不等式 (命題 1.32)}) \\
&\leq e^{-\lambda t}\exp\left(\frac{\nu\lambda^2}{2}\right) \qquad (\because (5.23)) \\
&= \exp\left\{\frac{\nu}{2}\left(\lambda^2 - \frac{2\lambda t}{\nu}\right)\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{\nu}{2}\left(\lambda - \frac{t}{\nu}\right)^2 - \frac{t^2}{2\nu}\right\}
\end{aligned}$$

から

$$\mathsf{Pr}\left(X_j > t\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2\nu}\right)$$

を得る. よって

$$\begin{aligned}
\mathsf{Pr}\left(\max_{1\leq j\leq N} X_j > t\right) &= \mathsf{Pr}\left(\bigcup_{j=1}^{N}\{X_j > t\}\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{N}\mathsf{Pr}(X_j > t) \qquad (\because \text{union bound}) \\
&\leq N\exp\left(-\frac{t^2}{2\nu}\right) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\nu} + \log N\right)
\end{aligned}$$

を得る. □