統計数学特別講義 第二 (5/10)

本日の講義内容

- 確率変数列の収束
- 累積分布関数全体のなす空間
- 大数の法則　(WLLN・SLLN)
- 中心極限定理 (CLT)

2.1 確率変数列の収束のモード

$(\Omega, \mathcal{F}, Pr)$：確率空間

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, X：確率変数列

定義 2.1 (1) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X に確率収束　　$X_n \xrightarrow{P} X \ (n\to\infty)$.

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\forall}\varepsilon>0$ に対して，$\lim_{n\to\infty} Pr(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$.

(2) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X に分布収束　　$X_n \rightsquigarrow X \ (n\to\infty)$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の有界連続関数 h に対して

$$\lim_{n\to\infty} E[h(X_n)] = E[h(X)].$$

3

(2) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X に概収束　　$X_n \xrightarrow{a.s.} X \ (n \to \infty)$

$$\overset{\text{def}}{\iff} \Pr\left(\omega \in \Omega ; \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1.$$

(4) $1 \leq p < \infty$ とする. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X に p 次平均収束

$$\overset{\text{def}}{\iff} E[|X_n|^p] < \infty \text{ かつ } \lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^p] = 0.$$

$X_n \xrightarrow{L^p} X \ (n \to \infty).$

(5) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X に全変動収束　　$X_n \xrightarrow{TV} X \ (n \to \infty)$

$$\overset{\text{def}}{\iff} \sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \left| \Pr(X_n \in B) - \Pr(X \in B) \right| \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

注意　収束モード間の関係は以下である．

- $X_n \xrightarrow{L^p} X$

$$\Longrightarrow X_n \xrightarrow{p} X \Longrightarrow X_n \rightsquigarrow X$$

- $X_n \xrightarrow{a.s} X$

定理2.2 (Portmanteau) 以下の(1)〜(6)は同値

(1) $X_n \rightsquigarrow X \ (n \to \infty)$

(2) $\lim_{n\to\infty} \Pr(X_n \leq x) = \Pr(X \leq x)$. ただし, x は $x \mapsto P(X \leq x)$ の連続点

(2) $\lim_{n\to\infty} E[h(X_n)] = E[h(X)]$ ($^\forall h$ は任意の有界Lipschitz)

h は Lipschitz $\Leftrightarrow$ $^\forall x, y$ に対し, $^{\exists} L > 0$, $|h(x) - h(y)| \leq L|x - y|$

(4) 任意の閉集合 F に対して

$$\limsup_{n\to\infty} \Pr(X_n \in F) \leq \Pr(X \in F)$$

(5) 任意の開集合 G に対して

$$\liminf_{n\to\infty} \Pr(X_n \in G) \geq \Pr(X \in G).$$

(6) 任意のBorel集合Bで $\Pr(X\in\partial B)=0$ なるものに対して

$$\lim_{n\to\infty}\Pr(X_n\in B)=\Pr(X\in B).$$

gを有界連続とする.

(2) ⇒ (1) の証明 gは有界なので, 一般性を失わず, $|g(x)|\le 1/2$ $(x\in\mathbb{R})$ としてよい.

${}^\forall\varepsilon>0$ に対して, 十分大きな区間 $(a,b]=:K$ を取ると

$$P(X\in K^c)=1-\Pr(X\in K)\le\varepsilon$$

とできる.

Kの内部

$$K = \underbrace{(a_1, b_1]}_{=K_1} \bigcup_{j=2}^{m} \underbrace{(a_j, b_j]}_{=K_j}$$ と排反な区間で分解できる

∵) Kはコンパクト

mを十分大きく取ると，gの連続性から

$$\max_{j=1,\dots,m} \max_{x,y \in K_j} |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon.$$

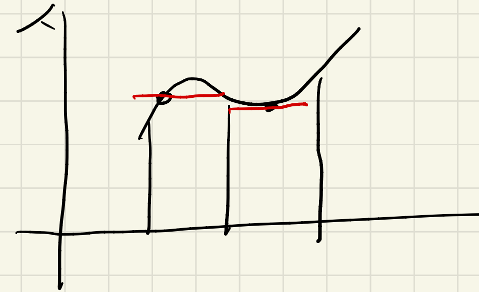
関数 $x \mapsto \Pr(X \leq x)$ の不連続点は高々可算個なので，$\{a_j, b_j\}_{j=1}^{m}$

は連続点とできる。すると，(1) から

$$\Pr(X_n \leq y) \xrightarrow{n\to\infty} \Pr(X \leq y) \qquad y \in \{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m\}.$$

次に，$x_j \in K_j$ を選んで

$$g_\varepsilon(x) := \sum_{j=1}^{m} g(x_j)\, \mathbb{I}_{K_j}(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$



と定める　すると

$$|E[g(X)] - E[g_\varepsilon(X)]| \le \varepsilon$$ ⟹ 詳しくはp.3を見よ。

と評価できる。また，十分nを大きく取ると

$$|Pr(X_n \in K^c) - Pr(X \in K^c)|$$

$$= |1 - Pr(X_n \in K) - \{1 - Pr(X \in K)\}|$$

$$= |Pr(X_n \in K) - Pr(X \in K)|$$

$$= |Pr(X_n \le b) - Pr(X_n \le a) - \{Pr(X \le b) - Pr(X \le a)\}|$$

$$\leq |\Pr(X_n \leq b) - \Pr(X_n \leq b)| + |\Pr(X_n \leq a) - \Pr(X \leq a)| \leq \varepsilon$$

とできる. よって

$$\Pr(X_n \in K^c) \leq \Pr(X \in K^c) + |\Pr(X_n \in K^c) - \Pr(X \in K^c)|$$

$$\leq 2\varepsilon.$$

これより

$$|E[g(X_n)] - E[g_\varepsilon(X_n)]|$$

$$= \left| E\left[\{g(X_n) - g_\varepsilon(X_n)\} \mathbb{1}_K(X_n) + \{g(X_n) - g_\varepsilon(X_n)\} \mathbb{1}_{K^c}(X_n) \right] \right|$$

$$\leq E\left[|g(X_n) - g_\varepsilon(X_n)| \mathbb{1}_K(X_n) + |g(X_n) - g_\varepsilon(X_n)| \mathbb{1}_{K^c}(X_n) \right]$$

$$\leq E\left[\varepsilon \mathbb{1}_K(X_n) + \{\underbrace{|g(X_n)|}_{\leq \frac{1}{2}} + |g_\varepsilon(X_n)|\} \mathbb{1}_{K^c}(X_n)\right]$$

$$\leq \varepsilon \Pr(X_n \in K) + \Pr(X_n \in K^c) \leq 3\varepsilon.$$

となる. nを十分大きく取ると

$$|E[g_\varepsilon(X)] - E[g_\varepsilon(X_n)]|$$

$$= \left| E\left[\sum_{j=1}^{m} g(x_j) \mathbb{1}_{K_j}(X) - \sum_{j=1}^{m} g(x_j) \mathbb{1}_{K_j}(X_n)\right] \right|$$

$$\leq \max_j |g(x_j)| \sum_{j=1}^{m} |E[\mathbb{1}_{K_j}(X)] - E[\mathbb{1}_{K_j}(X_n)]|$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} |\Pr(X \in K_j) - \Pr(X_n \in K_j)|$$

$$\leq \varepsilon.$$

以上の結果と三角不等式から

$$
\begin{aligned}
&|E[g(X_n)] - E[g(X)]| \\
&\leq \underbrace{|E[g(X_n)] - E[g_\varepsilon(X_n)]|}_{\leq 3\varepsilon} + \underbrace{|E[g_\varepsilon(X_n)] - E[g_\varepsilon(X)]|}_{\leq \varepsilon} \\
&\quad + \underbrace{|E[g_\varepsilon(X)] - E[g(X)]|}_{2\varepsilon} \\
&\leq 6\varepsilon.
\end{aligned}
$$

$\square$

定理1.3　$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$は連続関数とする

(1) $X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{p} g(X)$.

(2) $X_n \rightsquigarrow X \Rightarrow g(X_n) \rightsquigarrow g(X)$.

(3) $X_n \xrightarrow{a.s} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{a.s} g(X)$.

(1)の証明　gは点x_0で連続

$$\Leftrightarrow {}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

各$\omega \in \Omega$において, $X(\omega) = x_0$と思えば

$$|X_n(\omega) - X(\omega)| < \delta \Rightarrow |g(X_n(\omega)) - g(X(\omega))| < \varepsilon.$$

よって

$$\{\omega\in\Omega : |X_n(\omega)-X(\omega)|<\delta\} \subset \{\omega\in\Omega : |g(X_n(\omega))-g(X(\omega))|<\varepsilon\}.$$

したがって

$$\Pr(|X_n-X|<\delta) \leq \Pr(|g(X_n)-g(X)|<\varepsilon)$$

$$\begin{array}{ccc} \Pr(|X_n-X|<\delta) & \leq & \Pr(|g(X_n)-g(X)|<\varepsilon) \\ \| & & \| \\ 1-\Pr(|X_n-X|\geq\delta) & & 1-\Pr(|g(X_n)-g(X)|\geq\varepsilon) \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\downarrow\, n\to\infty \\ 0}}{\Pr(|X_n-X|\geq\varepsilon)} \geq \underline{\Pr(|g(X_n)-g(X)|\geq\varepsilon)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$\square$

Q1の証明　hを任意の有界連続関数とすると

$g \circ h$も有界連続.

$$X_n \rightsquigarrow X \Rightarrow \lim_{n\to\infty} E[h \circ g(X_n)] = E[h \circ g(X)]$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} E[h(g(X_n))] = E[h(g(X))]$$

$$\Rightarrow g(X_n) \rightsquigarrow g(X).$$

$\blacksquare$

2.2 一様可積分

まず

$$X_n \xrightarrow{L^1} X$$

$$\Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{P} X$$

$$X_n \xrightarrow{a.s} X$$

を思い出す。すると

$X_n \xrightarrow{P} X$ と他の条件 (A) $\Longrightarrow$ $X_n \xrightarrow{L^1} X$

$X_n \xrightarrow{a.s} X$ と他の条件 (A') $\Longrightarrow$ $X_n \xrightarrow{L^1} X$

と期待できる。

定義2.4 $\mathcal{C}=\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を確率変数の族とする.

$\mathcal{C}$ は一様可積分 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall\varepsilon>0,\ ^\exists K>0$ s.t.

$$E[|X|\mathbb{1}\{|X|>K\}]\leq\varepsilon\quad(^\forall X\in\mathcal{C})$$

優関数

命題2.5 (2) 非負値確率変数 Y で $E[|Y|]<\infty$ なるものが存在して, $\Pr(|X|<Y)=1\ (^\forall X\in\mathcal{C})$ ならば $\mathcal{C}$ は一様可積分.

証明 各 $K>0$ に対して, $\Pr(|X|<Y)=1$ より

$$|X|>K\Rightarrow Y>K \Rightarrow \{|X|>K\}\subset\{Y>K\}.$$

よって

$$\sup_{X\in\mathcal{C}} E[|X|\,\mathbb{1}\{|X|>k\}] \le \sup_{X\in\mathcal{C}} E[Y\,\mathbb{1}\{|X|>k\}]$$

$$\le E[Y\,\mathbb{1}\{Y>k\}]$$

$$\xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

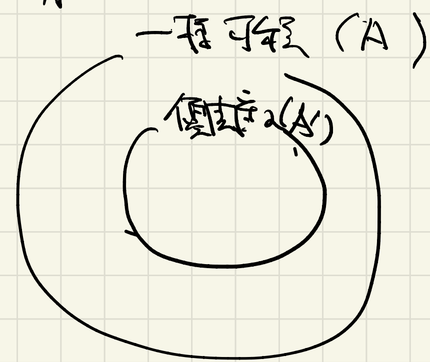
□

$\mathcal{C}$に対して, 優関数が存在 $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$は一様可積分

$X_n \xrightarrow{a.s.} X$ + (優関数の存在) $\Rightarrow$ $X_n \xrightarrow{L^1} X$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$X_n \xrightarrow{P} X$ + (一様可積分) $\Rightarrow$ $X_n \xrightarrow{L^1} X$



定理2.7

(4) $X_n \xrightarrow{P} X$ かつ $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は一様可積分ならば、

$$X_n \xrightarrow{L^1} X.$$

(1) $X_n \xrightarrow{a.s} X$ かつ $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は優関数を持つ $\Rightarrow$ $X_n \xrightarrow{L^1} X$.

(3) $X_n \xrightarrow{P} X$ ならば、ある部分列 $\{X_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して

$$X_{n(k)} \xrightarrow{a.s} X \ (k \to \infty).$$

(4)の証明の概略

- Fatouの補題と(3)を用いて、$E[|X|] < \infty$ を示す。
- $0 < \varepsilon < K < \infty$ に対して

technical な評価.

$$
\begin{aligned}
E[|X - X_n|] &\le \varepsilon + K \underbrace{\Pr(|X_n - X| > \varepsilon)}_{\text{確率収束}} \\
&\quad + \sup_n 2\underbrace{E[|X_n| \, \mathbb{I}\{|X_n| > K/2\}]}_{\text{一様可積分}} \\
&\quad + 2\underbrace{E[|X| \, \mathbb{I}\{|X| > K/2\}]}_{E[|X|] < \infty}
\end{aligned}
$$

$\square$

2.3 Slutskyの定理

命題 2.9

$X_n \rightsquigarrow X$ かつ $Y_n \xrightarrow{P} c$ （cは定数）

を仮定。すると以下が成り立つ

(1) $X_n + Y_n \rightsquigarrow X + c$.

(2) $X_n Y_n \rightsquigarrow cX$.

(3) $c \neq 0$ のとき、$Y_n^{-1} X_n \rightsquigarrow c^{-1} X$.

証明の方針

- $Y_n \xrightarrow{p} c \Rightarrow Y_n \rightsquigarrow c$ by 定理2.7(5)

自明ではない

- $X_n \rightsquigarrow X$ かつ $Y_n \rightsquigarrow c \Rightarrow (X_n, Y_n) \rightsquigarrow (X, c)$

- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続関数とすると

定理2.3(2)

$$(X_n, Y_n) \rightsquigarrow (X, c) \Rightarrow g(X_n, Y_n) \rightsquigarrow g(X, c)$$

あとは、$g(x, y) = x + y$, $g(x, y) = xy$, $g(x, y) = \dfrac{x}{y}$ とすればよい。。。

3.1 累積分布関数

$(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$：確率空間

$X : \Omega \to \mathbb{R}$：確率変数

Xの分布 P^X

$$P^X(B) = \Pr(X \in B) \quad ({}^\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

注意 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P^X)$は$\mathbb{R}$上の確率空間

Xの（累積）分布関数 F^X

$$F^X(x) := \Pr(X \leq x) \quad ({}^\forall x \in \mathbb{R}).$$

・ X と Y は Ω 上の確率変数で，

$$F^X(x) = P_r(X \leq x), \quad F^Y(x) = P_r(Y \leq x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

とする．

$$X \text{ と } Y \text{ の分布は同じ} \iff F^X(x) = F^Y(x) \quad ({}^\forall x \in \mathbb{R})$$

・ X が分布関数 F を持つことを $X \sim F$ と記す．

注意　X と Y の分布が同じならば

$$P^X(B) = P^Y(B) \quad ({}^\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

が証明できる．

定理 3.3 $X \sim F$ とする。このとき、以下が成立

(1) F は非減少。 $x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$.

(2) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$; $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

(3) F は右連続。

証明は確率測度の性質(補題1.5)を用いる。

(3)の証明 $n \in \mathbb{N}$ に対して、$A_n = (-\infty, x + \frac{1}{n}]$ とおく。

$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ かつ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (-\infty, x]$ となる。

補題1.5(7)より

$$F(x) = \Pr\left(X \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \Pr\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \in A_n\}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Pr(X \in A_n) = \lim_{n\to\infty} F\left(x + \frac{1}{n}\right) = F(x+). \qquad \square$$

定理 3.5 (Helly) $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ を分布関数列とする.

このとき, 非減少右連続関数 F と部分列 $\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して
$$(0 \leq F(x) \leq 1 \ (x \in \mathbb{R}))$$

$$\lim_{k \to \infty} F_{n(k)}(x) = F(x)$$

となる. ただし, x は F の連続点

注意 $\lim_{x \to \infty} F(x) < 1$ の場合もある.

証明の方針 各 x に対して, $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は有界列なので, $\{F_{n(k)}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ は $F_{n(k)}(x) \xrightarrow{n \to \infty} y = F(x)$ と定める.

あとは、Fは非減少かつ右連続性を示す。

$\square$

定義3.6 $\{\mu_n\}$は測度の列。

$$\{\mu_n\} \text{は tight} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^\exists K>0 \text{ s.t. } \mu_n([-K,K]) \geq 1-\varepsilon \quad ({}^\forall n \in \mathbb{N}).$$

※必要ならば部分列を取る。

補題3.7 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$を分布関数の列、$\{F_n\}$はtightならば、分布関数Fが存在して

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \quad (x\text{は}F\text{の連続点}).$$

証明 F_n に対応する分布を P_n とかく. すると, $\forall \varepsilon > 0$ に対し

k をうまく取ると

$$F_n(k) \geq P_n((-k, k]) \geq 1 - \varepsilon.$$

よって

$$F(k) = \lim_{n \to \infty} F_n(k) \geq 1 - \varepsilon \quad (\varepsilon \to 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$ □

3.2 有界右連続関数全体のなす空間

$\tilde{\mathcal{F}}'$: $\mathbb{R}$ 上の有界右連続関数全体のなす集合

$^\forall F \in \tilde{\mathcal{F}}'$ に対して

$$\|F\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x)| < \infty$$

と定める.

すると, $\tilde{\mathcal{F}}'$ は ノルム $\|\cdot\|_\infty$ を持つ線型ノルム空間.

$\tilde{\mathcal{F}}$: $\mathbb{R}$ 上の分布関数全体の集合

すると, $\tilde{\mathcal{F}} \subset \tilde{\mathcal{F}}'$ となる.

命題 3.8 $\tilde{X}'$ は Banach 空間.

すなわち, 任意の Cauchy 列は $\tilde{X}'$ の元に収束.

命題 3.9 $\tilde{X}$ は $(\tilde{X}', \|\cdot\|_\infty)$ の閉部分集合

注意 $(\tilde{X}', \|\cdot\|_\infty)$ はコンパクトであることがわかる.

よって, $\tilde{X}$ もコンパクト!

4.1 大数の法則

定理 4.1　$X_1, X_2, \ldots$ は $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ 上の i.i.d. 確率変数列で

$E[|X_1|] < \infty$ とする．このとき

$$\bar{X}_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{P} \mu \qquad (\mu = E[X_1]).$$

強い条件のもとの証明

$E[X_1^2] < \infty$ と仮定．$Var[X_1] = \sigma^2$ とおく．

$$\Pr(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var[\bar{X}_n]}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

証明の方針　$\forall \delta > 0$ と n に対して

$$Y_j := \begin{cases} X_j & (|X_j| \leq \delta n) \\ 0 & (|X_j| > \delta n) \end{cases} ; \quad Z_j := \begin{cases} 0 & (|X_j| \leq \delta n) \\ X_j & (|X_j| > \delta n) \end{cases}$$

とする. すると

- $X_j = Y_j + Z_j$
- $\mathrm{Var}[Y_j] \leq \delta n E[|X_1|]$
- $E[Y_1] \xrightarrow{n \to \infty} \mu \implies \frac{1}{n}(Y_1 + \cdots + Y_n) \xrightarrow{P} \mu$
- Z_j はあまり影響しない.

(1)

定理 4.3　定理4.1と同じ設定で

$$X_n \xrightarrow{a.s.} \mu \quad (n \to \infty).$$

証明のコメント　$E[X_1^4] < \infty$ を仮定しなくてもよい。

$X_n \xrightarrow{P} \mu$ とリバースマルチンゲールの性質を使って

$X_n \xrightarrow{a.s.} \mu$ がわかる。

$\boxed{\text{ls}}$

定理 4.6 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を i.i.d. 確率変数列とし、

$E[X_1]=\mu$, $Var[X_1]=\sigma^2$ $(0<\sigma<\infty)$ とする。

このとき

$$Z_n := \frac{\bar{X}_n-\mu}{\sqrt{Var[\bar{X}_n]}} = \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}_n-\mu)}{\sigma} \rightsquigarrow Z \sim N(0,1).$$

証明の方針

① 一般性を失わず，$\mu=0,\ \sigma=1$ としてよい．

② $E[X_i^3]<\infty$ を仮定して

$$\sqrt{n}\ \bar{X}_n \rightsquigarrow N(0,1)$$

を示す．

③ $E[X_i^3]<\infty$ の条件をはずしてよいことを示す．

② の概略

$E[Y_1]=0,\ E[Y_1^2]=1,\ E[|Y_1|^3]<\infty$ とし、

$Z_1, \dots, Z_n \overset{i.i.d}{\sim} N(0,1)$

とする。これに

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} Y_j = \sqrt{n}\,\overline{Y}_n$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n} Z_j \sim N(0,1)$$

とおく、目標は

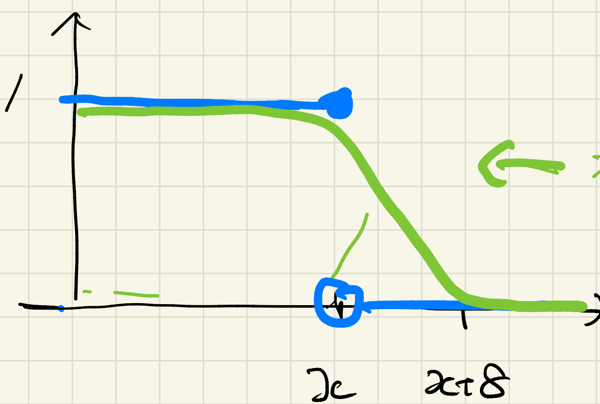
$$\Pr(S_n \le x) \xrightarrow{n\to\infty} \Pr(S \le x) \quad (x \in \mathbb{R}). \qquad (※)$$

ここで

$$g(y) = \mathbb{1}_{(-\infty, x]}(y)$$

とおくと

$$(※) \iff E[g(S_n)] \xrightarrow{n\to\infty} E[g(S)]$$



有界な3次の導関数をもつ

$$g_{\delta,x}(y) = \begin{cases} 1 & (y \le x) \\ 0 & (y \ge x+\delta) \end{cases}$$

すると

$$g_{\delta,x-\delta}(y) \le g(y) \le g_{\delta,x}(y) \qquad (y \in \mathbb{R})$$

$$E[g_{\delta,x-\delta}(S_n)] \xrightarrow{n\to\infty} E[g_{x,\delta-x}(S)]$$

$$E[g_{\delta,x}(S_n)] \xrightarrow{n\to\infty} E[g_{x,\delta}(S)]$$

を示せばよい.

いま, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は有界な3次の導関数を持つ関数

telescope argument $\qquad (1 \le m \le n+1)$

$$T_m = \frac{1}{\sqrt{n}}\{Y_1 + \cdots + Y_{m-1} + Z_m + \cdots + Z_n\}$$

$$\therefore\ U_m = \frac{1}{\sqrt{n}}\{Y_1 + \cdots + Y_{m-1} \qquad + Z_{m+1} + \cdots + Z_n\}$$

とおくと

$$T_m = U_m + \frac{1}{\sqrt{n}} Z_m, \quad T_{m+1} = U_m + \frac{1}{\sqrt{n}} Y_m$$

すると

$$|E[h(T_m)] - E[h(T_{m+1})]| \leq \left| \frac{C}{6n^{3/2}} E[|Z_m|^3 + |Y_m|^3] \right.$$

ただし、Cは generic constant.

これより

$$|E[h(S_n)] - E[h(S)]| \leq \frac{C}{6\sqrt{n}} E[|Z_1|^3 + |Y_1|^3] \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

□

例4.7　$X_1, X_2, \ldots$ を i.i.d. 確率変数列 とし

$$E[X_1] = \mu ; \quad Var[X_1] = \sigma^2 \quad (0 < \sigma < \infty)$$

とする。このとき　← T統計量

$$T_n := \frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - \mu)}{S_n} \rightsquigarrow N(0,1)$$

を示そう。ただし

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$$

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X}_n)^2} 。$$

← $n-1$ は不変ではなく‥

まず，CLTより

$$Z_n := \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \rightsquigarrow N(0, 1)$$

が成立．また

$$S_n^2 = \frac{n}{n-1}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu)^2 - (\overline{X}_n-\mu)^2\right\}$$

に注意して，WLLN（大数の弱法則）を用いる．

$E[(X_j-\mu)^2] = Var[X_j] = \sigma^2 < \infty$ なので．

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu)^2 \xrightarrow{P} \sigma^2.$$

$E[|X_1|] < \infty$ なので

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu . \implies (\bar{X}_n - \mu)^2 \xrightarrow{p} 0 \quad \text{by 命題 } 2.9$$

よって.

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mu)^2 - (\bar{X}_n - \mu)^2 \xrightarrow{p} \sigma^2 \quad \text{by 命題 } 2.8(1)$$

となる. $\dfrac{n}{n-1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ より

$$\implies \frac{\sigma}{S_n} \xrightarrow{p} 1$$

$$S_n^2 \xrightarrow{p} \sigma^2 \implies S_n \xrightarrow{p} \sigma \quad \text{by 命題 } 2.8(1) .$$

$S_n \xrightarrow{p} \sigma$ に注意して Slutsky の定理を用いると

$$T_n = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{S_n} = \frac{\sigma}{S_n}\,\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \rightsquigarrow N(0, 1).$$

□