統計数学特別講義第2 (2025/07/05)

本日の講義内容

- VC集合族
  Vapnik-Chervonenkis
- VC関数族
- 混合モデルのMLEの一致性
- P-Donsker族

復習

$X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} P$

$\mathcal{G}$: $\mathbb{R}$ 上の実数値関数のある集合

$\mathcal{G}$ は P-GC 族

$$\iff \sup_{g \in \mathcal{G}} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} g(X_j) - Pg \right| \xrightarrow{a.s.} 0 \quad (n \to \infty)$$

ただし、$Pg = \int g(x)\, dP(x)$.

GC = Glivenko-Cantelli

定理 6.20 $G(x) := \sup_{g \in \mathcal{G}} |g(x)|$ とおく

$G \in L_1(P)$ かつ $\frac{1}{n} H(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(\hat{P}_n)}) \xrightarrow{P} 0$

$(\forall \delta > 0)$ ならば、$\mathcal{G}$ は P-GC 族

$N := H(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(\hat{P}_n)})$ とする。

$\exists \{g_1, \dots, g_N\} \subset \mathcal{G}$ s.t. $\forall g \in \mathcal{G}$ に対し、

$\exists j_0 \in \{1, \dots, N\}$ が有り

$$\|g_{j_0} - g\|_{L_1(\hat{P}_n)} < \delta.$$

6.8 VC集合族

$\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$ とする.

$\mathcal{D}$: $\mathbb{X}$ の部分集合の集まり.

$n \in \mathbb{N}$ と $\{\xi_1, \dots, \xi_n\} \subset \mathbb{X}$

定義 6.31

$$\Delta^{\mathcal{D}}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \#\{D \cap \{\xi_1, \dots, \xi_n\} : D \in \mathcal{D}\}$$

とする. さらに

$$VC^{\mathcal{D}}(n) := \sup\{ \Delta^{\mathcal{D}}(\xi_1, \dots, \xi_n) ;$$

$$\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{X} \}.$$

例 6.32 $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ とし

$$\mathcal{D} := \{ (-\infty, r] ; r \in \mathbb{R} \}$$

とする. $\forall \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$ に対し

$$\Delta^{\mathcal{D}}(\xi_1, \dots, \xi_n) \le n+1,$$

一方，

$$\Delta^{\mathcal{B}(\mathbb{R})}(\xi_1, \dots, \xi_n) \leq 2^n.$$

定理 6.33 $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. P とする

つぎは同値

(1) $$\frac{1}{n}\log \Delta^{\mathcal{D}}(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow{P} 0 \quad (n \to \infty).$$

(2) $$\sup_{D \in \mathcal{D}} |\hat{P}_n(D) - P(D)| \xrightarrow{P} 0 \quad (n \to \infty)$$

(1) ⇒ (2) の証明

$$\mathcal{G} := \{ \mathbb{1}_D(x) : \mathbb{X} \to \mathbb{R},\ D \in \mathcal{S} \}$$

とおく

すると，${}^{\forall} g \in \mathcal{G}$ に対し

$$|g(x)| \leq 1 \quad (x \in \mathbb{X})$$

いま

$$\| g \|_{L_\infty(\hat{P}_n)} = \max_{1 \leq j \leq n} | g(X_j) |$$

と定める．すると

$$N(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_\infty(\hat{P}_n)}) = O^{D}(X_1, \dots, X_n)$$

がわかる。よって

$$N(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(\hat{P}_n)})$$

$$\leq N(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_\infty(\hat{P}_n)}).$$

$$\because) \quad \|g\|_{L_1(\hat{P}_n)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} |g(X_j)|$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \max |g(X_j)|$$

$$= L_\infty(\hat{P}_n).$$

よって, $G \in L_1(P)$ かつ

$$\frac{1}{n}\log N(\delta, \mathcal{S}, \|\cdot\|_{L_1(\tilde{P}_n)}) \xrightarrow{p} 0 \quad (n\to\infty)$$

定理 6.20 より, $\mathcal{S}$ は P-GC 族.

(2) ⇒ (1) の証明　　略

定義 6.34 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$VC^{\mathcal{D}}(n) := \sup\{\Delta^{\mathcal{D}}(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}\}.$$

で定める

$\mathcal{D}$ が VC 族

$\Leftrightarrow$ ${}^{\exists} C > 0$ と ${}^{\exists} V > 0$ s.t. ${}^{\forall} n \in \mathbb{N}$ に対して

$$VC^{\mathcal{D}}(n) \leq C n^V.$$

定理 6.35

$\mathcal{D}$ は VC 族 $\Rightarrow$ $\mathcal{G} = \{ \mathbb{I}_D ; D \in \mathcal{D} \}$ は P-GC 族

証明

$^\forall \delta > 0$ に対して

$$\frac{1}{n} H(\delta, \mathcal{G}, \| \cdot \|_{L_1(\hat{P}_n)})$$

$$\leq \frac{1}{n} \log \Delta^{\mathcal{D}}(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\leq \log VC^{\mathcal{D}}(n)$$

$$\leq \frac{1}{n} \log \{ C n^{V} \}$$

$$= V \frac{\log n}{n} + \frac{C}{c} \xrightarrow{n \to \infty} 0 . \quad \square$$

例 6.36

(1) $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, $D = \{ (-\infty, r] ; r \in \mathbb{R} \}$

$$\Rightarrow \quad VC^D(n) \leq n+1 .$$

補題 6.37 $\mathcal{D}, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ は UC 族とする。

このとき、以下も UC 族

(1) $\mathcal{D}^c = \{ D^c ; D \in \mathcal{D} \}$

(2) $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$

(3) $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$

(4) $\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^p ; |\underline{x} - \underline{\mu}|^2 < c, \ \underline{\mu} \in \mathbb{R}^p, \ c > 0 \}$

定義 3.88

$$VC^{\mathcal{D}} := \inf\{n \in \mathbb{N} ; VC^{\mathcal{D}}(n) < 2^n\}$$

を $\mathcal{D}$ の VC 次元．$^{\forall} n \in \mathbb{N}$ に対して

$VC^{\mathcal{D}}(n) = 2^n$ のとき，$VC^{\mathcal{D}} = \infty$ と約束

補題 6.39

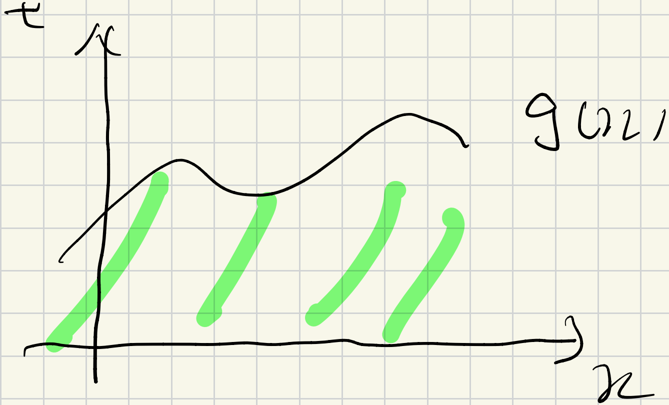
$\mathcal{D}$ は VC 族 $\Longleftrightarrow$ $VC^{\mathcal{D}} < \infty$.

6.9 VC関数族

定義 6.40 関数 $g: \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ のサブグラフ

$$\mathrm{subgraph}(g) := \{(x, t) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R} ;\ g(x) \geq t\}$$

$\mathcal{G}$ がVC族 $\Leftrightarrow$ $\{\mathrm{subgraph}(g) ; g \in \mathcal{G}\}$ はVC族



定義 6.43 (M, d)を距離空間とする.

$\delta > 0$ とし $S \subset M$ の δ 網の最大の元の個数を $D(\delta, S, d)$ とおく.

補題 6.44

(1) $N(\delta, S, d) \leq D(\delta, S, d)$

(2) $D(\delta, S, d) \leq N\left(\frac{\delta}{2}, S, d\right)$

定理6.45 Qを$\mathcal{X}$上の確率測度とし

$\mathcal{G}$を$\mathcal{X}$上の実数値関数の族

Gを$\mathcal{G}$の包絡関数

$N(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(Q)})$ $(\delta > 0)$

V: $\mathcal{G}$のVC次元

すると、Vに依存する定数$A>0$が存在して

$$N(\delta Q G, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(Q)}) \leq \max\{A e^{-2V}, e^{\delta/4}\}$$

系 6.46

$\mathcal{G}$ は VC 族 かつ $PG < \infty \Rightarrow \mathcal{G}$ は P-GC 族

証明 まず、定理 6.20 を思い出す。

$PG \in L_1(P)$ かつ

$$\frac{1}{n} H(\delta, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(\hat{P}_n)}) \xrightarrow{P} 0 \quad (n \to \infty)$$

$\Rightarrow \mathcal{G}$ は P-GC 族

だって、

一方，定理6.45から，任意の$\overbrace{\text{確率測度}}^{PQ<\infty\text{なる}}$ Q

に対して

$$N(\delta PQ, \mathcal{S}, \|\cdot\|_{L_1(Q)})$$

$$\le \max\{A e^{-2v}, e^{\delta/4}($$

だった。

ここで，$Q = \hat{P}_n$ と取ると

$$N(\delta \hat{P}_n G, \mathcal{S}, \|\cdot\|_{L_1(\hat{P}_n)})$$

$$\le \max\{A e^{-2v},\ e^{\delta/4}\}$$

がわかる。したがって、$\hat{\delta} = \delta \hat{P}_n G$ とおくと

$$\frac{1}{n} H(\hat{\delta}, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(\hat{P}_n)})$$

$$= \frac{1}{n} H(\delta \hat{P}_n G, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(\hat{P}_n)})$$

$$= \frac{1}{n} \log N(\delta \hat{P}_n G, \mathcal{G}, \|\cdot\|_{L_1(\hat{P}_n)})$$

$$\le \frac{1}{n} \log\{\max\{A e^{-2v},\ e^{\delta/2}\ 4\}\}$$

$$\to 0 \quad (n \to \infty)$$

よって

$$\frac{1}{n} H\left(\tilde{\mathcal{F}}, \varepsilon, \|\cdot\|_{L_1(\hat{P}_n)}\right) \xrightarrow{P} 0 \quad (n \to \infty)$$

$\square$