

第2章 確率変数列の収束

2.1 確率変数列の収束モード

定義 2.1. $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ を確率空間とし, $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ をこの空間上で定義される確率変数列とし, X を同じ空間上で定義される確率変数とする.

(1) 確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ は確率変数 X に確率収束するとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\Pr(|X_n - X| > \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

をみたすことをいう. これを $X_n \xrightarrow{P} X (n \rightarrow \infty)$ と記す.

(2) 確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ は確率変数 X に分布収束するとは, 任意の $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ に対して

$$E[h(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[h(X)]$$

をみたすことをいう. これを $X_n \rightsquigarrow X (n \rightarrow \infty)$ と記す. ただし, $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ は実数上の実数値有界連続関数全体を表す.

(3) 確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ は確率変数 X に概収束するとは,

$$\Pr\left(\omega \in \Omega; X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X(\omega)\right) = 1$$

をみたすことをいう. これを $X_n \xrightarrow{a.s.} X (n \rightarrow \infty)$ と記す.

(4) $1 \leq p < \infty$ とする. 確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ は確率変数 X に p 次の平均収束¹するとは, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$E[|X_n|^p] < \infty, \quad E[|X_n - X|^p] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

をみたすことをいう. これを $X_n \xrightarrow{L^p} X (n \rightarrow \infty)$ と記す.

(5) 確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ は確率変数 X に全変動収束するとは

$$\sup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |\Pr(X_n \in B) - \Pr(X \in B)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

をみたすことをいう. これを $X_n \xrightarrow{TV} X (n \rightarrow \infty)$ と記す.

¹ L_p 収束ともいう.

注意 2.2. 確率変数列の収束モード間の関係は [39, p.149] を参照のこと.

次に分布収束の同値条件を述べる.

定理 2.3 (Portmanteau). $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を確率変数列とし, X を同じ空間上で定義される確率変数とする. 以下の 5 つは同値である.

(1) $X_n \rightsquigarrow X (n \rightarrow \infty)$.

(2) 写像 $\mathbb{R} \ni x \mapsto \Pr(X \leq x) \in [0, 1]$ のすべての連続点 $x (x \in \mathbb{R})$ において

$$\Pr(X_n \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Pr(X \leq x).$$

(3) 任意の Lipschitz 連続かつ有界な関数 h に対して

$$E[h(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[h(X)].$$

(4) 任意の閉集合 F に対して

$$\limsup_n \Pr(X_n \in F) \leq \Pr(X \in F).$$

(5) 任意の開集合 G に対して

$$\liminf_n \Pr(X_n \in G) \geq \Pr(X \in G).$$

(6) 任意の $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ で $\Pr(X \in \partial B) = 0$ なるものに対して

$$\Pr(X_n \in B) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Pr(X \in B).$$

ただし, ∂B は可測集合 B の境界である.

Proof. 節 2.4.1 を参照のこと. □

定理 2.4. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は連続関数とする. このとき, 以下が成立する.

(1) $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{P} g(X) (n \rightarrow \infty)$.

(2) $X_n \rightsquigarrow X \Rightarrow g(X_n) \rightsquigarrow g(X) (n \rightarrow \infty)$.

(3) $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \Rightarrow g(X_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} g(X) (n \rightarrow \infty)$.

Proof. 節 2.4.2 を参照のこと. □

補題 2.5. $X, \{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を確率変数列とする. $X_n \rightsquigarrow X (n \rightarrow \infty)$ であることの必要十分条件は, ∞ を許すある正整数 k が存在して, 有界かつ k 次までの有界な導関数をもつ任意の関数 h に対して

$$E[h(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E[h(X)]$$

となることである.

Proof. 節 2.4.3 を参照のこと. □

2.2 一様可積分性

定義 2.6. 確率変数の族 \mathcal{C} はオーダー p の一様可積分 (簡単に一様可積分) であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある定数 $K \in [0, \infty)$ が存在して

$$E[|X|^p \mathbf{1}\{|X| > K\}] \leq \epsilon \quad (\forall X \in \mathcal{C})$$

をみたすことをいう.

命題 2.7. \mathcal{C} を確率変数の族とし, $p' > p$ とする.

(1) $\forall X \in \mathcal{C}$ に対して, $E[|X|^{p'}] < \infty$ ならば, \mathcal{C} はオーダー p の一様可積分である.

(2) 非負値確率変数 Y で $E[|Y|^p] < \infty$ なるものが存在して, $\Pr(|X| < Y) = 1 (\forall X \in \mathcal{C})$ ならば, \mathcal{C} はオーダー p の一様可積分である.

Proof. 節 2.4.4 を参照のこと. □

定理 2.8. (1) 概収束 \Rightarrow 確率収束.

(2) 確率収束 \Rightarrow 分布収束.

(3) p 次平均収束 \Rightarrow 確率収束.

Proof. 節 2.4.5 を参照のこと. □

定理 2.9. (1) $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X (n \rightarrow \infty)$ で, 非負値確率変数 Y が存在して, $E[|Y|^p] < \infty$ $\Pr(|X_n| < Y) = 1 (\forall n \in \mathbb{N})$ ならば, $X_n \xrightarrow{L^p} X (n \rightarrow \infty)$ である.

(2) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は一様可積分ならば, $\sup_{n \in \mathbb{N}} E[|X_n|] < \infty$ である.

(3) $X_n \xrightarrow{P} X$ ならば, ある部分列 $\{X_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して, $X_{n(k)} \xrightarrow{\text{a.s.}} X (k \rightarrow \infty)$ である.

(4) $X_n \xrightarrow{P} X (n \rightarrow \infty)$ かつ $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ はオーダー 1 の一様可積分ならば, $X_n \xrightarrow{L^1} X (n \rightarrow \infty)$ である.

(5) c を定数とする. $X_n \rightsquigarrow c (n \rightarrow \infty) \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} c (n \rightarrow \infty)$ である.

Proof. 節 2.4.6 を参照のこと. □

2.3 Slutsky の定理

定理 2.10. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}, \{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を確率変数列とする. $X_n \rightsquigarrow X (n \rightarrow \infty)$ かつ $|X_n - Y_n| \xrightarrow{P} 0 (n \rightarrow \infty)$ ならば, $Y_n \rightsquigarrow X (n \rightarrow \infty)$ である.

Proof. 節 2.4.7 を参照のこと. □

命題 2.11. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}, \{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を確率変数列とし, $X_n \rightsquigarrow X (n \rightarrow \infty)$ かつ $Y_n \xrightarrow{P} c (n \rightarrow \infty)$ とする. ただし, c は定数である. このとき, 以下が成立する.

- (1) $X_n + Y_n \rightsquigarrow X + c (n \rightarrow \infty)$ である.
- (2) $X_n Y_n \rightsquigarrow cX (n \rightarrow \infty)$ である.
- (3) $c \neq 0$ のとき, $Y_n^{-1} X_n \rightsquigarrow c^{-1} X (n \rightarrow \infty)$ である.

Proof. 節 2.4.8 を参照のこと. □

2.4 証明

2.4.1 定理 2.3 の証明

(2) \Rightarrow (1) の証明: g を任意の有界連続関数とする. 一般性を失わずに $|h(x)| \leq 1/2 (x \in \mathbb{R})$ と仮定してよい. 任意の $\epsilon > 0$ に対して, 十分大きな有界区間 $(a, b] =: K$ をとると

$$\Pr(X \in K^c) \leq \epsilon \quad (2.1)$$

とできる. そこで, この K を $m (m \in \mathbb{N})$ 個の互いに素な区間 $K_1 = (a_1, b_1], K_j = (a_j, b_j] (j = 2, 3, \dots, m); a_j, b_j \in \mathbb{R})$ に直和分解する. すなわち, $a_1 = a, b_m = b, K = \bigcup_{j=1}^m K_j$ となっている. このとき, m を十分大きく取ると

$$\max_{j \in \{1, 2, \dots, m\}} \max_{x, y \in K_j} |h(x) - h(y)| \leq \epsilon \quad (2.2)$$

となるように $\{K_j\}_{j=1}^m$ をとることができる. さらに, $\{a_j, b_j\}_{j=1}^m$ は X の分布関数 F の連続点² に取る. このとき, (2) より

$$\Pr(X_n \in K) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Pr(X \in K) \quad (2.3)$$

となる. 実際, (2) に注意すると

$$\begin{aligned} & |\Pr(X_n \in K) - \Pr(X \in K)| \\ &= \left| \{\Pr(X_n \in b) - \Pr(X_n \in a)\} - \{\Pr(X_n \in b) - \Pr(X_n \in a)\} \right| \\ &= \left| \{\Pr(X_n \in b) - \Pr(X_n \in b)\} - \{\Pr(X_n \in a) - \Pr(X_n \in a)\} \right| \\ &\leq \left| \{\Pr(X_n \in b) - \Pr(X_n \in b)\} \right| + \left| \{\Pr(X_n \in a) - \Pr(X_n \in a)\} \right| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

²F の不連続点は高々可算個なので, このように取れることがわかる.

からわかる. つぎに, 各 K_j から 1 点 x_j を任意に選び, 関数 g_ϵ を

$$h_\epsilon(x) = \sum_{j=1}^m h(b_j) \mathbf{1}_{K_j}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

と定める. すると

$$\max_{x \in K} |h(x) - h_\epsilon(x)| \leq \max_{j \in \{1, 2, \dots, m\}} \max_{x, y \in K_j} |h(x) - h(y)| \leq \epsilon \quad (2.4)$$

となる. したがって, (2.1) と (2.4) に注意すると

$$\begin{aligned} & |E[h(X)] - E[h_\epsilon(X)]| \\ &= |E[\mathbf{1}_K(X)h(X)] + E[\mathbf{1}_{K^c}(X)h(X)] - E[\mathbf{1}_K(X)h_\epsilon(X)] \\ &\quad - E[\mathbf{1}_{K^c}(X)h_\epsilon(X)]| \\ &\leq |E[\mathbf{1}_K(X)h(X)] - E[\mathbf{1}_K(X)h_\epsilon(X)]| + |E[\mathbf{1}_{K^c}(X)h(X)] \\ &\quad - E[\mathbf{1}_{K^c}(X)h_\epsilon(X)]| \\ &\leq E[\mathbf{1}_K(X)|h(X) - h_\epsilon(X)|] + E[\mathbf{1}_{K^c}(X)|h(X) - h_\epsilon(X)|] \\ &\leq \underbrace{\max_{x \in K} |h(x) - h_\epsilon(x)|}_{\leq \epsilon \quad \because (2.4)} E[\mathbf{1}_K(X)] + E[\mathbf{1}_{K^c}(X)|h(X) - h_\epsilon(X)|] \\ &\leq \epsilon \Pr(X \in K) + \Pr(X \in K^c) \\ &\leq 2\epsilon \end{aligned} \quad (2.5)$$

となる. (2.3) から, n を十分大きく取ると

$$\left| \underbrace{\Pr(X_n \in K^c)}_{=1-\Pr(X_n \in K)} - \underbrace{\Pr(X \in K^c)}_{=1-\Pr(X \in K)} \right| = |\Pr(X_n \in K) - \Pr(X \in K)| \leq \epsilon$$

とできるので

$$\Pr(X_n \in K^c) \leq \Pr(X \in K^c) + |\Pr(X_n \in K^c) - \Pr(X \in K^c)| \leq 2\epsilon \quad (2.6)$$

がわかる. これより

$$\begin{aligned} & |E[h(X_n)] - E[h_\epsilon(X_n)]| \\ &= |E[\{h(X_n) - h_\epsilon(X_n)\} \mathbf{1}_K(X_n) + \{h(X_n) - h_\epsilon(X_n)\} \mathbf{1}_{K^c}(X_n)]| \\ &\leq E[\underbrace{|h(X_n) - h_\epsilon(X_n)|}_{\leq \epsilon} \mathbf{1}_K(X_n) + |h(X_n) - h_\epsilon(X_n)| \mathbf{1}_{K^c}(X_n)] \\ &\leq E[\epsilon \mathbf{1}_K(X_n) + \underbrace{\{|h(X_n)| + |h_\epsilon(X_n)|\}}_{\substack{\leq 1/2 \quad \leq 1/2}} \mathbf{1}_{K^c}(X_n)] \\ &= \epsilon \Pr(X_n \in K) + \underbrace{\Pr(X_n \in K^c)}_{\leq 2\epsilon \quad \because (2.6)} \\ &\leq 3\epsilon \end{aligned} \quad (2.7)$$

を得る. g_ϵ の作りかたから n を十分大きくとると

$$\begin{aligned}
& |E[h_\epsilon(X)] - E[h_\epsilon(X_n)]| \\
& \leq \left| E\left[\sum_{j=1}^m h(x_j) \{\mathbb{1}_{K_j}(X) - \mathbb{1}_{K_j}(X_n)\}\right] \right| \\
& = \left| \sum_{j=1}^m h(x_j) E[\mathbb{1}_{K_j}(X) - \mathbb{1}_{K_j}(X_n)] \right| \\
& \leq \sum_{j=1}^m |\Pr(X \in K_j) - \Pr(X_n \in K_j)| \underbrace{\max_{j=\{1,2,\dots,m\}} |h(x_j)|}_{\leq 1/2} \\
& \leq \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon \tag{2.8}
\end{aligned}$$

となる. よって, (2.5) – (2.8) を合わせると

$$\begin{aligned}
|E[h(X_n)] - E[h(X)]| & \leq \underbrace{|E[h(X_n)] - E[h_\epsilon(X_n)]|}_{\leq 3\epsilon} + \underbrace{|E[h_\epsilon(X_n)] - E[h_\epsilon(X)]|}_{\leq \epsilon} \\
& \quad + \underbrace{|E[h_\epsilon(X)] - E[h(X)]|}_{\leq 2\epsilon} \\
& \leq 6\epsilon
\end{aligned}$$

がわかるので, 主張は証明された.

(1) \Rightarrow (3) の証明: 明らか.

(1) \Rightarrow (4) の証明: 非負値連続関数 h と $M > 0$ に対して, $h_M(x) = \min\{h(x), M\} \geq 0$ ($x \in \mathbb{R}$) と定める h_M は有界連続となる. よって

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} E[h(X_n)] \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} E[h_M(X_n)] = E[h_M(X)] \quad (\because (1))$$

となる. 両辺で $M \rightarrow \infty$ とすることにより, 有界単調収束定理 (定理 1.23) から (4) を得る.

(4) \Rightarrow (1) の証明: g を有界連続関数とする. するとある $M > 0$ が存在して, $|h| \leq M$ とできる. すると $M \pm g \geq 0$ は非負値連続関数となるので, (4) を用いると (2) を得る.

(3) \Rightarrow (5) の証明: 開集合 O と $x \in \mathbb{R}$ に対して $h_M(x) \uparrow \mathbb{1}_O(x)$ ($M \rightarrow \infty$) となるような Lipschitz 連続関数列 $g_M \geq 0$ を取ることができるので, (3) から

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \Pr(X_n \in O) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} E[h_M(X_n)] = E[h_M(X)]$$

となる. この両辺で $M \rightarrow \infty$ とすると, 単調収束定理 (定理 1.23) により (5) を得る.

(5) \Leftrightarrow (4) の証明: お互いの補集合をとればよい.

(4) + (5) \Rightarrow (6) の証明: B° を B の内部, $\text{cl}(B)$ を B の閉包とすると $\partial B = \text{cl}(B) \setminus B^\circ$ である. このことに注意すると

$$\begin{aligned} \Pr(X \in B^\circ) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \Pr(X_n \in B^\circ) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \Pr(X_n \in \text{cl}(B)) \\ &\leq \Pr(X_n \in \text{cl}(B)) \end{aligned}$$

となる. $\Pr(X \in \partial B) = 0$ より, 上式の右辺と左辺は等しいので, (7) が得られる.

(6) \Rightarrow (2) の証明: $B = (-\infty, x]$ ととればよい. \square

2.4.2 定理 2.4 の証明

(1) の証明: 関数 g は $x_0 (\in \mathbb{R})$ で連続なので, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\exists \delta > 0$ があって

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \epsilon$$

である. よって

$$\{\omega \in \Omega : |X(\omega) - X_n(\omega)| < \delta\} \subset \{\omega \in \Omega : |g(X(\omega)) - g(X_n(\omega))| < \epsilon\}$$

となる. 上式の補事象を取ると

$$\Pr(|X - X_n| \geq \delta) \geq \Pr(|g(X) - g(X_n)| \geq \epsilon)$$

がわかる. よって, $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X) (n \rightarrow \infty)$ が示せた.

(2) の証明: $g \circ f$ が有界連続関数となるように有界連続関数 f を取る. $X_n \rightsquigarrow X (n \rightarrow \infty)$ と定理 2.3 から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[f(g(X_n))] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[(f \circ g)(X_n)] = \mathbf{E}[(f \circ g)(X)] = \mathbf{E}[f(g(X))]$$

から示される.

(3) の証明: $A = \{\omega \in \Omega; X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X(\omega)\}$ とおく. $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X (n \rightarrow \infty)$ から $\Pr(A) = 1$ である. 任意の $\omega \in A$ に対して, g は連続なので, $g(X_n(\omega)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(X(\omega))$ となる. したがって

$$A \subset \{\omega \in \Omega; g(X_n(\omega)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(X(\omega))\}$$

がわかるので

$$\Pr(\omega \in \Omega; g(X_n(\omega)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(X(\omega))) = 1$$

が示せた. \square

2.4.3 補題 2.5 の証明

必要性の証明: $\mathcal{BL}(\mathbb{R})$ を有界な Lipschitz 関数族, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ を ∞ を許すある正正数 k が存在して, 有界かつ k 次までの有界な導関数をもつ関数族とする. すると $\mathcal{BL}(\mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ なので

$$\mathbb{E}[h(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[h(X)] \quad (\forall h \in \mathcal{BL}(\mathbb{R})) \quad (2.9)$$

ならば

$$\mathbb{E}[h(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[h(X)] \quad (\forall h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})) \quad (2.10)$$

である. よって定理 2.3 から

$$X_n \rightsquigarrow X (n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow (2.9) \Rightarrow (2.10)$$

である. よって, $X_n \rightsquigarrow X (n \rightarrow \infty) \Rightarrow (2.9)$ が証明できたので, 必要性は証明された.

十分性の証明: そのために, (2.10) \Rightarrow (2.9) を示せばよい. $Z (\sim N(0, 1))$ を確率変数とする. 任意の有界 Lipschitz 関数 h と $\sigma > 0$ に対して

$$\begin{aligned} h_\sigma(x) &:= \mathbb{E}[h(x + \sigma Z)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x + \sigma z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) \mathrm{d}m(z) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} h(z) \exp\left(-\frac{(z-x)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}m(z) \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

と定める. すると

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-\infty}^{\infty} h(z) \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \exp\left(-\frac{(z-x)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}m(z) \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(z)| |z-x|^k \exp\left(-\frac{(z-x)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}m(z) < \infty \end{aligned}$$

なので, 微分記号と積分記号の交換ができ

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} h_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} h(z) \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \exp\left(-\frac{(z-x)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}m(z)$$

は連続かつ有界となる. よって, h_σ は有界かつ k 次までの有界な導関数をもつ関数である. よって, 仮定から

$$\mathbb{E}[h_\sigma(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[h_\sigma(X)] \quad (2.11)$$

となる. さらに, h の bounded Lipschitz ノルムを $\|h\|_{\text{BL}}$ と書く³と, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$|h(x + \sigma Z)] - h(x)| \leq \|h\|_{\text{BL}} |\sigma Z|$$

かつ

$$|h(x + \sigma Z)] - h(x)| \leq 2 \sup_x |h(x)| \leq \|h\|_{\text{BL}}$$

となる. よって

$$\begin{aligned} |h_\sigma(x) - h(x)| &= \left| \mathbb{E}[h(x + \sigma Z)] - h(x) \right| \\ &\leq \mathbb{E} \left[\left| h(x + \sigma Z) - h(x) \right| \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\|h\|_{\text{BL}} \min\{|\sigma Z|, 1\} \right] \\ &= \|h\|_{\text{BL}} \min\{\sigma \mathbb{E}[|Z|], 1\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

と評価できる. (2.11) と (2.12) から

$$\begin{aligned} &\left| \mathbb{E}[h(X_n)] - \mathbb{E}[h(X)] \right| \\ &= \left| \mathbb{E}[h(X_n)] - \mathbb{E}[h_\sigma(X_n)] \right| + \left| \mathbb{E}[h(X_n)] - \mathbb{E}[h_\sigma(X)] \right| \\ &\quad + \left| \mathbb{E}[h_\sigma(X)] - \mathbb{E}[h(X)] \right| \\ &\leq 2\|h\|_{\text{BL}} \min\{\sigma \mathbb{E}[|Z|], 1\} + \left| \mathbb{E}[h(X_n)] - \mathbb{E}[h_\sigma(X)] \right| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\|h\|_{\text{BL}} \min\{\sigma \mathbb{E}[|Z|], 1\} \\ &\xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

がわかる. よって, (2.10) \Rightarrow (2.9) は証明されたので, (2.9) $\Rightarrow X_n \rightsquigarrow X (n \rightarrow \infty)$ が示せた. \square

2.4.4 命題 2.7 の証明

(1) の証明: $K > 0$ とする. 仮定から, ある $A > 0$ が存在して

$$\sup_{X \in \mathcal{C}} \mathbb{E}[|X|^{p'}] < A$$

3

$$\|h\|_{\text{BL}} := \max\{K_1, 2K_2\}, \quad K_1 := \sup_{x \neq y} \frac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|}, \quad K_2 := \sup_x |h(x)|$$

である.

とできる. すると

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X|^p \mathbb{1}\{|X|^p > K\}] &\leq \mathbb{E}\left[|X|^p \underbrace{\left(\frac{|X|^p}{K}\right)}_{>1}^{(p'-p)/p} \mathbb{1}\{|X|^p > K\}\right] \\ &\leq \frac{1}{K^{(p'-p)/p}} \mathbb{E}[|X|^{p'}] \\ &< \frac{C}{K^{(p'-p)/p}} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

よりわかる.

(2) の証明: $\forall K > 0$ に対して, $\Pr(|X| < Y) = 1$ から

$$|X| > K^{1/p} \Rightarrow Y > K^{1/p}$$

となる. このことから

$$\{|X|^p > K\} \subset \{Y^p > K\} \quad (2.13)$$

である. (2.19) と $\mathbb{E}[|Y|^p] < \infty$ から

$$\sup_{X \in \mathcal{C}} \mathbb{E}[|X|^p \mathbb{1}\{|X|^p > K\}] \leq \mathbb{E}[|Y|^p \mathbb{1}\{|Y|^p > K\}] \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0$$

よりわかる. □

2.4.5 定理 2.8 の証明

(1) の証明: 任意の $\epsilon > 0$ を取る. $\mathbb{1}_{(\epsilon, \infty)}(X_n - X) \leq 1$ と $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ ($n \rightarrow \infty$) であるので, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{(\epsilon, \infty)}(X_n - X) = 0$ (a.s.) であることに注意して, Lebesgue の有界収束定理 (定理 1.41) を用いると

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(|X_n - X| > \epsilon) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{(\epsilon, \infty)}(X_n - X)] = \mathbb{E}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{(\epsilon, \infty)}(X_n - X)\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

がわかる.

(2) の証明: $X_n \xrightarrow{P} X$ ($n \rightarrow \infty$) とする. $\epsilon > 0$ を固定し, x と $x \pm \epsilon$ を X の c.d.f. $F(x)$ の連続点⁴ とする. このとき

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \Pr(X_n \leq x) \\ &= \Pr(X_n \leq x, X < x + \epsilon) + \Pr(X_n \leq x, X \geq x + \epsilon) \\ &\leq \Pr(X \leq x + \epsilon) + \Pr(|X_n - X| \geq \epsilon) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$= F(x + \epsilon) + \Pr(|X_n - X| \geq \epsilon) \quad (2.15)$$

⁴ X の分布関数の不連続点は高々加算個なので, このように点を取れることに注意せよ.

となる. 同様に

$$\begin{aligned} F(x - \epsilon) &= \Pr(X \leq x - \epsilon) \\ &= \Pr(X_n \leq x - \epsilon, X_n < x) + \Pr(X \leq x - \epsilon, X_n \geq x) \\ &\leq \Pr(X_n \leq x) + \Pr(|X_n - X| \geq \epsilon) \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$= F_n(x) + \Pr(|X_n - X| \geq \epsilon) \quad (2.17)$$

となる. (2.15) と (2.17) を合わせると

$$F(x - \epsilon) - \Pr(|X_n - X| \geq \epsilon) \leq F_n(x) \leq F(x + \epsilon) + \Pr(|X_n - X| \geq \epsilon)$$

がわかる. 上の式の辺々で $n \rightarrow \infty$ とすれば

$$F(x - \epsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \leq F(x + \epsilon)$$

となる. ここで $\epsilon \rightarrow 0$ とし x を $F(x)$ の連続点とすれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

がわかる.

(3) の証明: $X_n \xrightarrow{L^p} X$ ($n \rightarrow \infty$) とする. $\epsilon > 0$ を固定する. このとき Markov の不等式 (命題 1.33) より

$$\Pr(|X_n - X| \geq \epsilon) = \Pr(|X_n - X|^2 \geq \epsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_n - X|^2]}{\epsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

がわかる. □

2.4.6 定理 2.9 の証明

(1) の証明:

加筆予定 (2025/10/13).

(2) の証明: $K > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n|] &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \mathbb{E}[|X_n| \mathbf{1}\{|X_n| \leq K\}] + \mathbb{E}[|X_n| \mathbf{1}\{|X_n| > K\}] \right\} \\ &\leq K + \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n| \mathbf{1}\{|X_n| > K\}] \end{aligned}$$

となる. 上の不等式の右辺第二項が 1 より小さくなるように K を選ぶことができる. それを K_0 と書いたとき

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n|] \leq K_0 + 1 < \infty$$

から証明された.

(3) の証明: $k, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$A_{n,k} := \left\{ |X_n - X| > \frac{1}{k} \right\}$$

とおく. 確率収束の定義 (定義 2.1(1)) から, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(A_{n,k}) = 0$$

である. そこで

$$\Pr(A_{n,k}) \leq \frac{1}{k^2}$$

となる n を $n(k)$ とおく. さらに, $B_k := A_{n(k),k}$ とおく. すると

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Pr(B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

となるので, Borel-Cantelli の補題 (補題 1.44) より, 無限個の k で B_k が起こる確率は 0 である. すなわち, ある $C \subset \Omega$ が存在し, $\Pr(C) = 1$ であり, 任意の $\omega \in C$ に対して, 有限個の k を除いて, $\omega \notin B_k$ である. このことから, ある $K(\omega) \in \mathbb{N}$ をとると

$$|X_{n(k)}(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{k} \quad (\forall k \geq K(\omega))$$

となる. よって

$$\omega \in C \Rightarrow X_{n(k)}(\omega) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} X(\omega)$$

となるので

$$\Pr\left(\omega \in \Omega; X_{n(k)}(\omega) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} X(\omega)\right) \geq \Pr(C) = 1$$

がわかる.

(4) の証明: まず

$$E[|X|] < \infty \tag{2.18}$$

を示す. 三角不等式から

$$||X_n| - |X|| \leq |X_n - X|$$

となるので

$$X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow |X_n| \xrightarrow{P} |X| \quad (n \rightarrow \infty)$$

であることがわかる. さらに, 定理 2.9(3) から, ある部分列 $\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して

$$X_{n(k)} \xrightarrow{\text{a.s.}} X \quad (k \rightarrow \infty)$$

とできる. Fatou の補題 (1.40) を用いると

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[|X|] &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}[|X_{n(k)}|] && \text{(Fatou の補題 (1.40))} \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[|X_n|] < \infty && (\because \text{定理 2.9(2)}) \end{aligned}$$

より (2.18) が示せた.

次に, 任意の $0 < \epsilon < K < \infty$ に対して

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[|X_n - X|] &= \mathbf{E}[|X_n - X| \mathbf{1}\{|X_n - X| \leq \epsilon\}] \\ &\quad + \mathbf{E}[|X_n - X| \mathbf{1}\{\epsilon < |X_n - X| \leq K\}] \\ &\quad + \mathbf{E}[|X_n - X| \mathbf{1}\{|X_n - X| > K\}] \\ &\leq \epsilon + K \Pr(|X_n - X| \geq \epsilon) \\ &\quad + \mathbf{E}[2 \max\{|X_n|, |X|\} \mathbf{1}\{\max\{|X_n|, |X|\} > k\}] \\ &\leq \epsilon + K \Pr(|X_n - X| \geq \epsilon) + \mathbf{E}[2|X_n| \mathbf{1}\{2|X_n| > K\}] \\ &\quad + \mathbf{E}[2|X| \mathbf{1}\{2|X| > K\}] \\ &\leq \epsilon + K \Pr(|X_n - X| \geq \epsilon) + \sup_{n \in \mathbb{N}} 2\mathbf{E}[|X_n| \mathbf{1}\{|X_n| > K/2\}] \\ &\quad + 2\mathbf{E}[|X| \mathbf{1}\{|X| > K/2\}] \end{aligned}$$

を得る. まず

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[|X_n| \mathbf{1}\{|X_n| > K/2\}] &\xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0, \\ \mathbf{E}[|X| \mathbf{1}\{|X| > K/2\}] &\xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

に注意する. 次に

$$\Pr(|X_n - X| \geq \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

に注意する. 最後に, $\epsilon \rightarrow 0$ とすれば, $X_n \xrightarrow{L^1} X$ ($n \rightarrow \infty$) がわかる.

(5) の証明: $X_n \rightsquigarrow c$ ($n \rightarrow \infty$) ならば, $X_n \xrightarrow{P} c$ ($n \rightarrow \infty$) を示す. $X_n \rightsquigarrow X$ かつある定数 c があって $\Pr(X = c) = 1$ とする. $c \pm \epsilon$ を $F(x)$

の連続点になるようにして $\epsilon > 0$ を固定する⁵. このとき

$$\begin{aligned} \Pr(|X_n - c| \geq \epsilon) &= \Pr(X_n \leq c - \epsilon) + \Pr(X_n \geq c + \epsilon) \\ &= \Pr(X_n \leq c - \epsilon) + \Pr(X_n \geq c + \epsilon) \\ &= F_n(c - \epsilon) + 1 - F_n(c + \epsilon) \\ &\rightarrow F(c - \epsilon) + 1 - F(c + \epsilon) \quad (n \rightarrow \infty) \\ &= 0 + 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

となる. □

2.4.7 定理 2.10 の証明

定理 2.3(3) を用いて証明をする. 関数 $h: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ を 1-Lipschitz とする. すなわち, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$|h(x) - h(y)| \leq |x - y|$$

である⁶. このとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[h(Y_n)] - \mathbb{E}[h(X_n)]| &\leq \mathbb{E}[|h(Y_n) - h(X_n)|] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\underbrace{|h(Y_n) - h(X_n)|}_{\leq |Y_n - X_n| \cdot 1\text{-Lipschitz}} \mathbb{1}\{|Y_n - X_n| \leq \epsilon\}\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\underbrace{h(X_n)}_{\leq 1} \mathbb{1}\{|Y_n - X_n| > \epsilon\}\right] + \mathbb{E}\left[\underbrace{h(Y_n)}_{\leq 1} \mathbb{1}\{|Y_n - X_n| > \epsilon\}\right] \\ &\leq \mathbb{E}[|Y_n - X_n| \mathbb{1}\{|Y_n - X_n| \leq \epsilon\}] + 2\mathbb{E}[\mathbb{1}\{|Y_n - X_n| > \epsilon\}] \\ &\leq \epsilon + 2\underbrace{\Pr(|Y_n - X_n| > \epsilon)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \\ &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

がわかる. $X_n \rightsquigarrow X$ なので, $\mathbb{E}[h(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[h(X)]$ であることと (2.19) から

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[h(Y_n)] - \mathbb{E}[h(X)]| &\leq |\mathbb{E}[h(X_n)] - \mathbb{E}[h(X)]| + |\mathbb{E}[h(Y_n)] - \mathbb{E}[h(X_n)]| \\ &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

が証明できる. □

⁵ $F(x)$ は有界非減少関数なので, $F(x)$ の不連続点は高々可算個である. よってこのように ϵ を取ることができる.

⁶有界な Lipschitz 関数 h に対して, $\mathbb{E}[h(Y_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[h(X)]$ を示せばよいので, 一般性を失うことないことに注意する.

2.4.8 命題 2.11 の証明

(1) の証明: $Y_n \xrightarrow{P} c(n \rightarrow \infty)$ なので, 定理 2.9(5) から $Y_n \rightsquigarrow c(n \rightarrow \infty)$ となる. このことから $(X_n, Y_n) \rightsquigarrow (X, Y) (n \rightarrow \infty)$ となることが証明⁷ できる. あとは, 定理 2.4(2) において, $g(x, y) = x + y$ とすればよい.

(2) の証明: 定理 2.4(2) において, $g(x, y) = xy$ とすればよい.

(3) の証明: 定理 2.4(2) において, $g(x, y) = \frac{x}{y}$ とすればよい. □

⁷これは特性関数の収束と分布収束が同値である事実からわかる. あとは特性関数に対して三角不等式を用いればよい. 詳しくは [7, p.135] を参照のこと.